Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 57 – 71

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ПОЛУОСИ

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова[1]
Институт математики НАН Армении
Армянский национальный аграрный университет
E-mails: *Khach82@rambler.ru*; *Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена исследованию одного класса интегральных уравнений с симметричным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой. Доказаны теоремы существования и единственности неотрицательного и ограниченного решения. Исследованы качественные свойства построенного решения. В конце работы приведены частные примеры указанного класса уравнений, имеющих непосредственные применения в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн и в теории географического распространения эпидемии.

MSC2010 number: 45G05.

Ключевые слова: монотонность; нелинейность; выпуклость; сходимость; ядро.

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению следующего класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$Q(f(x)) = \int_0^\infty K(x,t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty) \tag{1.1}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $f(x)$.

Ядро $K(x,t)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ неотрицательная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

I): $K(x,t) = K(t,x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

II): $K(0,t) = 0, \ t \in \mathbb{R}^+$ и $K(x,t) > 0, \ (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty),$

III): $\int_0^\infty K(x,t)dt \in C(\mathbb{R}^+), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty K(x,t)dt = 1,$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 19-11-00223)

$$\textbf{IV):}\ 0<\gamma(x):=1-\int\limits_0^\infty K(x,t)dt\in L_1(\mathbb{R}^+)\ \text{и}\ \int\limits_x^\infty K(x,t)dt\le\frac{1}{2},\quad x\in\mathbb{R}^+.$$

Функция Q - определенная на $\mathbb{R}^+$ непрерывная функция, причем

a): $y = Q(u)$ выпукла вниз на отрезке $[0,\eta]$, где число $\eta > 0$ является первым положительным корнем уравнения $Q(u) = u$, (в дальнейшем для краткости будем использовать термин "выпукла"),

b): $Q(u) \uparrow$ по u на отрезке $[0,\eta]$,

c): $Q(0) = 0$.

Следует отметить, что уравнение (1.1), кроме чисто теоретического интереса, представляет интерес во многих разделах современной математической физики и естествознания (см. [1]-[7]).

В частности, в случае когда ядро K зависит от разности своих аргументов и удовлетворяет условиям $I) - IV)$, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в теории переноса излучения (см. [1]-[3]). В том частном случае, когда ядро K представляется в виде разности двух гауссовских ядерных функцией, первая из которых зависит от разности своих аргументов, а вторая - от суммы своих аргументов, уравнение (1.1) имеет непосредственное применение в динамической теории p–адических открыто-замкнутых струн и в математической теории географического распространения эпидемии (см. [4]-[7]).

Отметим, что исследованию нелинейного уравнения (1.1) с разностными или суммарно-разностными ядрами K при различных ограничениях на Q посвящены работы [6]-[15].

В настоящей статье мы будем заниматься вопросами существования, единственности и асимптотического поведения решения для общего нелинейного интегрального уравнения (1.1). В конце работы приведем конкретные прикладные примеры нелинейности Q и ядра K, для которых выполняются все условия доказанных утверждений.

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. **Об одной априорной оценке снизу.** Пусть $\overset{\circ}{K}(\tau)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}$ непрерывная и ограниченная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

i_1)**:** $\overset{\circ}{K}(\tau) > 0,\ \tau \in \mathbb{R},\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau = 1,$

i_2)**:** $\overset{\circ}{K}(-x) = \overset{\circ}{K}(x),\ x > 0,\ \overset{\circ}{K}(\tau) \downarrow$ по τ на $\mathbb{R}^+$.

Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$\int\limits_0^\infty \overset{\circ}{K}(t)e^{-pt}dt = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

относительно неотрицательного числа p.

Из свойств i_1) и i_2), в силу теоремы Больцано-Коши, можно убедиться, что для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ уравнение (2.1) имеет единственное положительное решение p_ε.

В недавней работе одного из авторов (см. [8]) доказана следующая априорная оценка снизу:

$$\int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(\tau-\tau') - \overset{\circ}{K}(\tau+\tau'))(1-e^{-p_\varepsilon \tau'})d\tau' \geq \varepsilon(1-e^{-p_\varepsilon \tau}), \quad \tau \geq 0. \tag{2.2}$$

Оценка (2.2) будет играть важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

2.2. **Об одном вспомогательном нелинейном уравнении на полуоси.** Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное уравнение с "почти суммарно-разностным" ядром:

$$Q(\varphi(x)) = \int\limits_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$

относительно искомой неотрицательной и ограниченной функции $\varphi(x)$, где $\overset{\circ}{K}$ - удовлетворяет условиям $i_1), i_2)$.

Здесь $\lambda(x,t)$ - определенная на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ вещественная функция, обладающая следующими свойствами:

j_1)**:** $\lambda(x,t) = \lambda(t,x),\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

j_2)**:** $\varepsilon_0 := \inf\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \lambda(x,t) > 0,\ \lambda(x,t) \leq 1,\ (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$

j_3)**:** при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $\lambda(x,t)$ возрастает по x на $\mathbb{R}^+$.

Рассмотрим следующие итерации для уравнения (2.3):

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) = \int\limits_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))\varphi_n(t)dt, \tag{2.4}$$
$$\varphi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя следующее легко проверяемое неравенство:

$$\mathring{K}(x-t) \geq \mathring{K}(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{2.5}$$

непрерывность, монотонность и выпуклость функции Q, а также условие $j_2)$, индукцией по n нетрудно проверить, что

$$\varphi_n(x) \downarrow \text{ по } n, \tag{2.6}$$

$$\varphi_n(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi_n \in C(\mathbb{R}^+),\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.7}$$

Если итерации (2.4) представить в следующем виде:

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) = \int\limits_{-\infty}^{x} \lambda(x, x-\tau)\, \mathring{K}(\tau)\varphi_n(x-\tau)d\tau - \int\limits_0^\infty \mathring{K}(x+t)\lambda(x,t)\varphi_n(t)dt,$$

$$\varphi_0(x) \equiv \eta,\ \ n = 0,1,2,\ldots,\ \ x \in \mathbb{R}^+$$

и при этом использовать условия $i_2)$ и $j_3)$, то методом математической индукции можно также убедиться, что

$$\varphi_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,\ n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.8}$$

Предположим, что уравнение $Q(u) = \dfrac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение ξ. В силу выпуклости и монотонности функции Q решение является единственным на интервале $(0,\eta]$, причем $\xi < \eta$ (см. рис. 1).

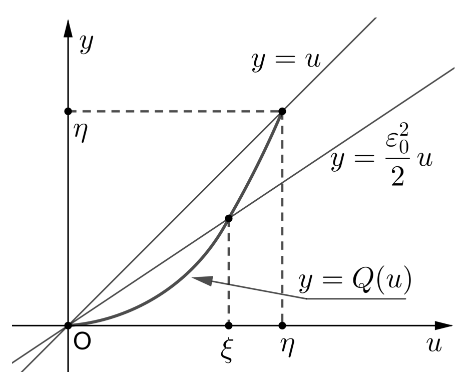

Рис. 1

Ниже индукцией по n убедимся, что

$$\varphi_n(x) \geq \xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}),\ x \in \mathbb{R}^+,\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{2.9}$$

где p_{ε_0} является единственным положительным решением характеристического уравнения (2.1) при $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Действительно, при $n = 0$ оценка (2.9) сразу следует из простого неравенства $\xi < \eta$. Предполагая, что (2.9) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$ и при этом используя j_2) априорную оценку (2.2) для $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, а также неравенство (2.5) и выпуклость функции Q на отрезке $[0, \eta]$, из (2.4) будем иметь

$$Q(\varphi_{n+1}(x)) \geq \varepsilon_0 \xi \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} t}) dt \geq$$

$$\geq \xi \frac{\varepsilon_0^2}{2}(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \geq Q(\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x})), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда в силу монотонности Q приходим к оценке (2.9) для $n + 1$.

Итак, из полученных фактов (2.6)-(2.9) можем утверждать, что последовательность непрерывных и монотонных на $\mathbb{R}^+$ функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Из (2.8) следует, что $\varphi(x)$ является монотонно неубывающей функцией на $\mathbb{R}^+$.

Используя теорему Б. Леви (см. [16]), а также непрерывность функции Q, легко можно убедиться, что предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3). Из (2.6) и (2.9) следует также, что

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \leq \varphi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Заметим, что $\varphi(x) \not\equiv \eta$. Действительно, этот факт сразу следует из следующего неравенства

$$\int\limits_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt \leq \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt = 1 - 2\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(t) dt < 1, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

при этом учитывается выпуклость функции Q.

Ниже убедимся, что $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$. Действительно, так как $\varepsilon_0 \leq \lambda(x,t) \leq 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, предельная функция φ удовлетворяет цепочке неравенств (2.10), а функция

$$\rho(x) := \int\limits_0^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt = 1 - 2\int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(t) dt$$

непрерывна на $\mathbb{R}^+$, то

$$\int_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t)-\overset{\circ}{K}(x+t))\varphi(t)dt \in C(\mathbb{R}^+).$$

Но, так как $Q \in C(\mathbb{R}^+), Q \uparrow$ на $[0,\eta,]$ то из (2.3) сразу следует, что $\varphi \in C(\mathbb{R}^+)$.

Следовательно, согласно теореме Дини сходимость последовательных приближений (2.4) равномерна на каждом компакте из $\mathbb{R}^+$. Итак, на основе вышеизложенного можем утверждать

Лемма 2.1. *При условиях $i_1)-i_2), j_1)-j_3)$ и $a)-c)$, если уравнение $Q(u)=\frac{\varepsilon_0^2}{2}u,\ \varepsilon_0\in(0,1]$ имеет положительное решение, то уравнение (2.3) обладает неотрицательным монотонно неубывающим непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi(x)$, удовлетворяющим двойному неравенству (2.10) и $\varphi(x)\not\equiv\eta$.*

2.3. **Интегральная асимптотика решения уравнения** (1.1).

Лемма 2.2. *Пусть ядро K и функция Q удовлетворяют соответственно условиям $I)-IV)$, $a)-c)$ и уравнение $Q(u)=\frac{\varepsilon_0^2}{2}u,\ \varepsilon_0\in(0,1]$ имеет положительное решение. Пусть, далее, $f(x)$ является нетривиальным решением уравнения (1.1) и удовлетворяет следующим условиям :*

- **1):** $0\le f(x)\le\eta, \quad x\in\mathbb{R}^+$,
- **2):** *существует такое число $r>0$, что на множестве $[r,+\infty)$ $f(x)$ является монотонно неубывающей функцией.*

Тогда данное решение обладает свойствами:

- $f(x)<\eta, \quad x\in\mathbb{R}^+$,
- *существует $\delta=\delta(r)>0$ такое, что $f(x)>0,\ x\in[\delta(r),+\infty)$,*
- $\eta-f\in L_1(\mathbb{R}^+)\cap C(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство. Сперва заметим, что из непрерывности функции $\gamma(x)$, с учетом условия 1) следует, что

$$Q(f(x))\in C_M(\mathbb{R}^+), \tag{2.11}$$

где $C_M(\mathbb{R}^+)$ - пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$. Так как $Q\in C(\mathbb{R}^+), Q(u)\uparrow$ на $[0,\eta]$, то из (2.11) и 1) сразу получаем, что

$$f\in C_M(\mathbb{R}^+). \tag{2.12}$$

Из (1.1) в силу условия $II)$ следует, что

$$f(0)=0. \tag{2.13}$$

В силу включения (2.12) можем утверждать, что $\eta - f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$. Уравнение (1.1) представим в следующем виде:

$$\eta - Q(f(x)) = \eta\gamma(x) + \int\limits_0^\infty K(x,t)(\eta - f(t))dt, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.14}$$

Так как $f\uparrow$ на $[r,+\infty)$, то из (2.14) и условия 1) следует, что всех $x\geq r$ имеет место неравенство:

$$\begin{gathered}0\leq \eta - Q(f(x))\leq \eta\gamma(x) + (\eta - f(x))\int\limits_x^\infty K(x,t)dt+\\ +\int\limits_0^x K(x,t)(\eta - f(t))dt, \quad x\in[r,+\infty).\end{gathered} \tag{2.15}$$

Пусть $R>r$ - произвольное число. Проинтегрируем обе части неравенства (2.15) по x на отрезке $[r,R]$. Тогда, учитывая условия $I)$, $III)$, $IV)$ и теорему Фубини (см. [16]), будем иметь

$$0\leq \int\limits_r^R (\eta - Q(f(x))dx \leq \eta\int\limits_r^R \gamma(x)dx + \int\limits_r^R (\eta - f(x))\int\limits_x^\infty K(x,t)dtdx + \int\limits_r^R\int\limits_0^x K(x,t)(\eta - f(t))dtdx \leq$$

$$\leq \eta\int\limits_r^\infty \gamma(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_r^R (\eta - f(x))dx + \int\limits_r^R\int\limits_0^r K(x,t)(\eta - f(t))dtdx + \int\limits_r^R\int\limits_r^x K(x,t)(\eta - f(t))dtdx \leq$$

$$\leq \eta\int\limits_r^\infty \gamma(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_r^R (\eta - f(x))dx + \eta\int\limits_0^r\int\limits_r^\infty K(x,t)dxdt + \int\limits_r^R (\eta - f(t))\int\limits_t^R K(x,t)dxdt \leq$$

$$\leq \eta\int\limits_r^\infty \gamma(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_r^R (\eta - f(x))dx + \eta\int\limits_0^r\int\limits_0^\infty K(t,x)dxdt + \int\limits_r^R (\eta - f(t))\int\limits_t^\infty K(t,x)dxdt \leq$$

$$\leq \eta\int\limits_r^\infty \gamma(x)dx + \int\limits_r^R (\eta - f(t))dt + \eta r.$$

Из этого неравенства в силу выпуклости функции Q сразу следует, что

$$0\leq \int\limits_r^R (f(x) - Q(f(x)))dx \leq \eta\int\limits_r^\infty \gamma(x)dx + \eta r. \tag{2.16}$$

Устремляя в (2.16) $R \to +\infty$ получим

$$f - Q(f) \in L_1(r, +\infty) \tag{2.17}$$

и

$$0 \le \int_r^\infty (f(x) - Q(f(x)))dx \le \eta \left(\int_r^\infty \gamma(x)dx + r \right). \tag{2.18}$$

Так как $\gamma(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}^+$, то из (1.1) сразу следует, что

$$f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Заметим теперь, что существует число $\delta > 0$, такое, что

$$f(x) > 0, \quad x \in [\delta, +\infty). \tag{2.19}$$

Действительно, так как $f(0) = 0$, $f \in C_M(\mathbb{R}^+)$, $f(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $f \uparrow$ на $[r, +\infty)$, то в силу условия 1), например, для всех $x \ge r+1$ функция $f(x)$ будет положительной.

Ниже убедимся, что для всех $x \ge r+1$ имеет место следующее неравенство:

$$f(x) - Q(f(x)) \ge \frac{f(r+1) - Q(f(r+1))}{\eta - f(r+1)}(\eta - f(x)). \tag{2.20}$$

Действительно, из выпуклости функции Q с учетом того, что $f(x) \ge f(r+1) > 0$, при $x \in [r+1, +\infty)$ сразу следует, что имеет место оценка

$$Q(f(x)) \le \frac{\eta - Q(f(r+1))}{\eta - f(r+1)} f(x) + \eta \frac{Q(f(r+1)) - f(r+1)}{\eta - f(r+1)},$$

(см. рис. 2) откуда сразу приходим к (2.20).

Учитывая (2.20), (2.17), (2.18) и условие a) заключаем, что $\eta - f \in L_1(r+1, +\infty)$ и

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_{r+1}^\infty (\eta - f(x))dx \le \frac{\eta - f(r+1)}{f(r+1) - Q(f(r+1))} \int_{r+1}^\infty (f(x) - Q(f(x)))dx \le \\ &\le \eta \left(\int_{r+1}^\infty \gamma(x)dx + r + 1 \right) \frac{(\eta - f(r+1))}{f(r+1) - Q(f(r+1))}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Так как $\eta - f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$ и $\eta - f \in L_1(r+1, +\infty)$, то $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$. □

3. Разрешимость уравнения (1.1)

3.1. **Теорема существования.** Возникает естественный вопрос: при каких ограничениях на ядро K уравнение (1.1) обладает нетривиальным неотрицательным и ограниченным решением, удовлетворяющим условиям леммы 2.2?

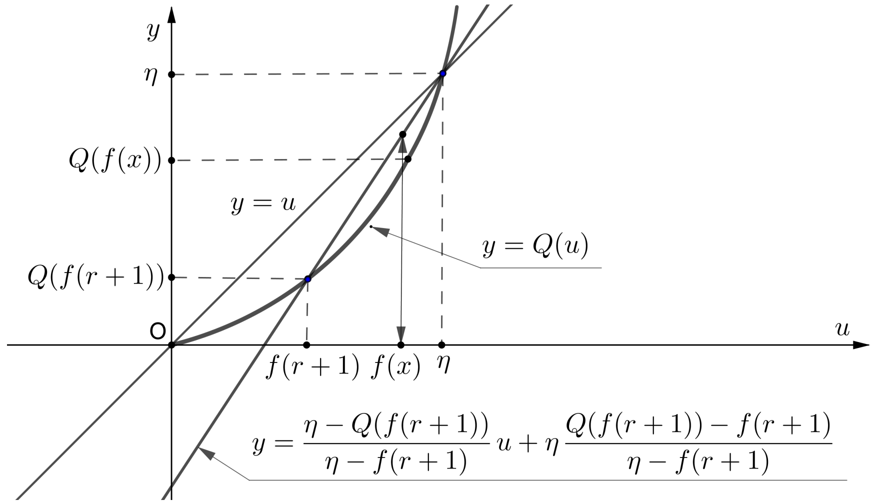

Рис. 2

Следующая теорема дает ответ на этот вопрос:

Теорема 3.1. *Пусть ядро K и функция Q удовлетворяют соответственно условиям $I) - III)$, $a) - c)$ и уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение. Тогда, если $\gamma(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и*

$$K(x,t) \geq \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

где $\overset{\circ}{K}$ и λ обладают свойствами $i_1) - i_2)$ и $j_1) - j_3)$ соответственно , то уравнение (1.1) имеет неотрицательное нетривиальное непрерывное и ограниченное решение $f(x)$, причем

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \leq \varphi(x) \leq f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Более того, если, дополнительно,

$$\mu(x) := \int_0^\infty (1 - \lambda(x,t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+) \tag{3.2}$$

и

$$\int_0^\infty t\,\overset{\circ}{K}(t)dt < +\infty, \tag{3.3}$$

то $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Если же

$$K(x,t) = \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

где λ *и* $\overset{\circ}{K}$ *удовлетворяют условиям* $j_1) - j_3)$ *и* $i_1) - i_2)$ *соответственно, то* $f(x) \uparrow$ *на* $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Рассмотрим следующие итерации

$$Q(f_{n+1}(x)) = \int_0^\infty K(x,t) f_n(t) dt, \tag{3.5}$$
$$f_0(x) = \varphi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя неравенство (3.1), условия $II)$, $III)$, $a)$ и $b)$, а также лемму 2.1 индукцией по n нетрудно убедиться в достоверности следующих утверждений:

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n, \tag{3.6}$$

$$f_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

$$f_n(x) \le \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

Следовательно, последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в силу непрерывности функции Q и предельной теоремы Б. Леви. Из (3.6) и (3.8) следует, что

$$\varphi(x) \le f(x) \le \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Но так как $\gamma(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ и функция Q выпукла на отрезке $[0, \eta]$, то из (1.1) следует, что $f(x) < \eta$, $x \in \mathbb{R}^+$. Следовательно, учитывая (2.10), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\xi(1 - e^{-p_{\varepsilon_0} x}) \le \varphi(x) \le f(x) < \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

Из непрерывности функций Q и $\int\limits_x^\infty K(x,t) dt$, с учетом неравенства (3.9), условия $b)$, следует, что $f \in C(\mathbb{R}^+)$.

Если выполняются условия (3.2) и (3.3), то тогда в силу $i_1)$

$$0 < \tilde{\gamma}(x) := 1 - \int_0^\infty \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)) dt =$$

$$= \int_0^\infty \overset{\circ}{K}(x-t)(1 - \lambda(x,t)) dt + 2\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(t) dt \le$$

$$\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \overset{\circ}{K}(\tau)\mu(x) + 2\int_x^\infty \overset{\circ}{K}(t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

ибо $\int\limits_0^\infty \int\limits_x^\infty \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau dx = \int\limits_0^\infty \tau \overset{\circ}{K}(\tau)d\tau < +\infty.$

Следовательно $\tilde{\gamma} \in L_1(\mathbb{R}^+)$. С другой стороны, для ядра

$$\tilde{K}(x,t) := \lambda(x,t)(\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

выполняется также следующее неравенство:

$$\int_x^\infty \tilde{K}(x,t)dt \leq \int_x^\infty (\overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t))dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{2x}^\infty \overset{\circ}{K}(u)dt \leq \frac{1}{2}, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, применяя лемму 2 для уравнения (2.3), можем утверждать, что

$$\eta - \varphi \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) сразу следует, что

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.11}$$

При выполнении равенства (3.4) получаем, что $f_n(x) = \varphi(x)$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $f(x) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^+$. Но тогда, используя лемму 2.1, можем утверждать, что $f(x) \uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$. □

3.2. **Теорема единственности.** Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия $I) - IV)$, $a) - c)$ и уравнение $Q(u) = \frac{\varepsilon_0^2}{2}u$, $\varepsilon_0 \in (0,1]$ имеет положительное решение. Тогда уравнение* (1.1) *не может иметь более одного решения в следующем классе функций:*

$$\mathfrak{M} := \{f(x) : 0 \leq f(x) \leq \eta, f(x) \not\equiv 0, f(x) \uparrow \ \textit{на} \ [r, +\infty)\}.$$

Доказательство. Предположим обратное: уравнение (1.1) имеет два решения $f, \tilde{f} \in \mathfrak{M}, f \not\equiv \tilde{f}$. Тогда согласно лемме 2.2

α_1)**:** $f, \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^+)$,

α_2)**:** существует число $\delta > 0$ такое, что

$$f(x) > 0, \ \tilde{f}(x) > 0, \ x \in [\delta, +\infty), \tag{3.12}$$

α_3):

$$f(x) < \eta,\ \tilde{f}(x) < \eta,\ x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

α_4):

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^+),\ \eta - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{3.14}$$

С учетом неравенства треугольника из (3.14) следует, что $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Так как $f(0) = \tilde{f}(0) = 0$ (см. доказательство леммы 2.2) и $f(x) \not\equiv \tilde{f}(x)$, то существует такая точка $x_0 > 0$, что $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$.

В силу непрерывности функций f и $\tilde{f}$ можем утверждать, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место $f(x) \neq \tilde{f}(x)$.

Рассмотрим и оценим следующую разность:

$$0 \leq f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| \leq f(x) \int\limits_0^\infty K(x,t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

Так как $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, то в силу условий I), III) можем утверждать, что правая часть неравенства (3.15) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, учитывая I) и используя теорему Фубини, из (3.15) получим

$$0 \leq \int\limits_0^\infty f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|dx \leq \int\limits_0^\infty f(x) \int\limits_0^\infty K(x,t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dtdx =$$

$$= \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)| \int\limits_0^\infty K(x,t)f(x)dxdt = \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)| \int\limits_0^\infty K(t,x)f(x)dxdt =$$

$$= \int\limits_0^\infty |f(t) - \tilde{f}(t)|Q(f(t))dt,$$

из чего следует, что

$$\int\limits_0^\infty \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx \leq 0. \tag{3.16}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx =$$

$$= \int\limits_E \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx,$$

где

$$E := \{x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \neq \tilde{f}(x), \tilde{f}(x) \neq 0, f(x) \neq 0\}.$$

Следовательно, из (3.16) имеем

$$\int_E \{f(x)|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))| - Q(f(x))|f(x) - \tilde{f}(x)|\}dx \le 0. \tag{3.17}$$

Следует отметить, что измеримое множество E имеет положительную меру: $mesE > 0$, ибо $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$. Так как для всех $x \in E, f(x) \neq 0, f(x) \neq \tilde{f}(x)$, то из (3.17) следует, что

$$\int_E |f(x) - \tilde{f}(x)| \left(\frac{|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|} f(x) - Q(f(x)) \right) dx \le 0. \tag{3.18}$$

Из выпуклости функции Q следует, что для всех $x \in E$ имеет место неравенство (см. рис. 3 и рис. 4)

$$tg\alpha = \frac{|Q(f(x)) - Q(\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|} > \frac{Q(f(x))}{f(x)} = tg\beta, \tag{3.19}$$

ибо $\alpha > \beta$ и $y = tgx$ - возрастающая функция.

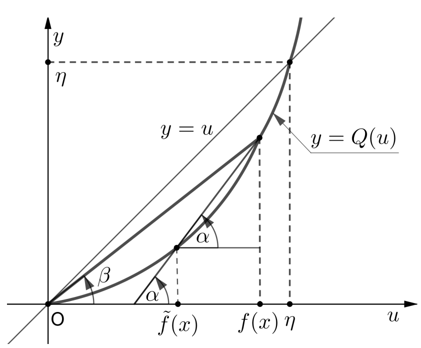

Рис. 3

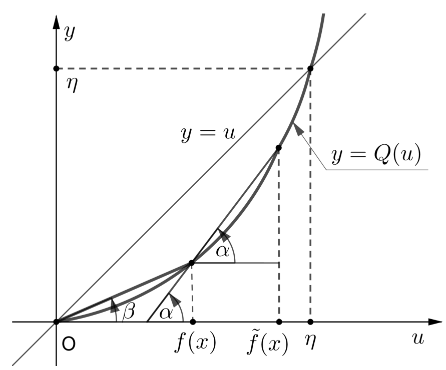

Рис. 4

Из полученных неравенств (3.19) и (3.18) в силу того что $mesE > 0$ приходим к противоречию. Следовательно, $f(x) = \tilde{f}(x), \;\; x \in \mathbb{R}^+$. □

Замечание 1. *Следует отметить, что утверждение теоремы 3.2 даст ответ на открытый вопрос статьи* [4] *о единственности монотонного решения следующего нелинейного интегрального уравнения со степенной нелинейностью:*

$$f^p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} \right) f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.20}$$

с граничным условием

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \tag{3.21}$$

где $p > 2$ *- нечетное число.*

Действительно, если в качестве функции $Q(u)$ выбрать $Q(u) = u^p$, а в качестве ядра K функцию вида

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

то все условия сформулированных утверждений (Лемма 2.1, Лемма 2.2, Теорема 3.1, Теорема 3.2) будут выполнены. Граничная задача (3.20) - (3.21) возникает в теории p–адических открыто-замкнутых струн (см. [4]). В указанной теории встречаются также нелинейные уравнения вида (1.1), где

$$Q(u) = au^3 + (1-a)u, \quad a \in (0,1], \tag{3.22}$$

а

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\left(e^{-\frac{(x-t)^2}{4a}} - e^{-\frac{(x+t)^2}{4a}}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{3.23}$$

(см. [5]), для которых также выполняются все условия доказанных утверждений.

Небезинтересно отметить, что в том частном случае, когда

$$K(x,t) = \overset{\circ}{K}(x-t) - \overset{\circ}{K}(x+t),$$

а

$$Q^{-1}(u) = \gamma(1-e^{-u}),$$

$\gamma > 1$ - числовой параметр (Q^{-1} - обратная функция функции Q) уравнение (1.1) возникает в математической теории географического распространения эпидемии (см. [7], [10]).

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper is devoted to the study of a class of integral equations with a symmetric kernel and with convex nonlinearity on the positive semiaxis . Existence and uniqueness theorems for a nonnegative and bounded solution are proved. The qualitative properties of the constructed solution are investigated. At the end of the paper, some particular examples for the above mentioned class of equations, having direct applications in the p–adic open-closed string dynamic theory and in the theory of geographical spread of epidemics are given.

Список литературы

[1] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара-Гросса-Крука", ТМФ, **125:2**, 339 – 342 (2000).

[2] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях", ТМФ, **172:3**, 497 – 504 (2012).

[3] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2:1**, 31 – 36 (1966).

[4] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны", ТМФ, **138:3**, 355 – 368 (2004).

[5] Л. В. Жуковская, "Итерационний метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн", ТМФ, **146:3**, 402 – 409 (2006).

[6] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелиейных уравнений в теории $p-$адической струны", Изв. РАН Сер. матем., **82:2**, 172 – 193 (2018).

[7] O. Diekmann, "Thresholds and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection", Journal of Math. Biology, **6**, 109 – 130 (1978).

[8] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн", Тр. ММО, **79:1**, 117 – 132 (2018).

[9] Л. Г. Арабаджян, "Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна", Изв. НАН Армении, Математика, **32**, no. 1, 21 – 28 (1997).

[10] O. Diekmann, "Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic", Journal of Diff. Equations, **33: 1**, 58 – 73 (1979).

[11] Kh. A. Khachatryan, "On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator", Journal of Contemporary Math. Analysis, **46**, no. 2, 89 – 100 (2011).

[12] Х. А. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью", Изв. РАН. Сер. матем., **76:1**, 173 – 200 (2012).

[13] Li Kun, Li Xiong, "Asymptotic behavior and uniqueness of traveling wave solution in Richer competition system", Journal Math. Anal. Appl., **389:1**, 486 – 497 (2012).

[14] V. S. Vladimirov, "The equation of p-adic closed strings for the scalar tachyon field", Sci. China, Ser. A, **51:4**, 754 – 764 (2008).

[15] Х. А. Хачатрян, "О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой", Изв. РАН. Сер. матем., **79:2**, 205 – 224 (2015).

[16] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука, 544 стр. (1981).

Поступила 7 мая 2019

После доработки 17 сентября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019