Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 1, 2020, стр. 9 – 18

О СХОДИМОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ЧАСТНЫХ СУММ КРАТНОГО РЯДА ФРАНКЛИНА К БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*; *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В работе доказывается, что квадратичные частичные суммы кратного ряда Франклина с номерами 2^{ν}, $\nu = 1, 2, ...$, не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

MSC2000 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: система Франклина; кратный ряд; сходимость к бесконечности.

1. Введение

В 1915 году Н. Н. Лузиным [1] была поставлена задача о том, может ли тригонометрический ряд сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

С тех пор многие математики исследовали вопрос сходимости или суммируемости к $+\infty$ ортогональных рядов на множестве положительной меры.

Ю. Б. Гермейер [2] доказал, что тригонометрический ряд не может суммироваться методом Римана к $+\infty$ на множестве положительной меры. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов [3] построили пример тригонометрического ряда, почти всюду суммируемого к $+\infty$ методом Абеля. Д. Е. Меньшов [4] доказал, что для любой функции, не обязательно конечной почти всюду, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере. В частности, существует тригонометрический ряд, который по мере сходится к $+\infty$ на $[-\pi, \pi]$. А. А. Талалян [5] установил, что для любой измеримой на $[-\pi, \pi]$ функции f существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере и почти всюду на множестве, где f конечна.

Наконец, в 1988 году С. В. Конягин [6] решил проблему Н. Н. Лузина, доказав следующую теорему.

---

[1]Работа Г. Г. Геворкяна и М. Г. Григоряна выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проектов 18T-1A074 и 18T-1A148, соответственно.

Теорема (С. В. Конягин). *Пусть $\underline{S}(x)$ и $\overline{S}(x)$ нижний и верхний пределы частичных сумм некоторого тригонометрического ряда. Тогда*

$$\mathrm{mes}\{x \in [-\pi, \pi] : -\infty < \underline{S}(x) \le \overline{S}(x) = +\infty\} = 0.$$

В частности, тригонометрический ряд не может сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Для рядов по системам Хаара и Уолша имеется следующая картина. А. А. Талалян и Ф. Г. Арутюнян [7] доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. В работах [8], [9] даны более простые доказательства этой теоремы. Однако (см. [10]), существуют равномерно ограниченные ортонормированные системы функций, ряды по которым могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры при любой перестановке членов ряда. Н. Б. Погосян [11] установил, что для каждой полной ортонормированной системы существует ряд, который после подходящей перестановки сходится почти всюду к $+\infty$.

Ортонормальную в $L^2[0,1]$ систему Франклина, определение которой будет дано в следующем параграфе, обозначим через $\{f_n(t)\}_{m=1}^{\infty}$. Далее обозначим $I = [0,1]$ и $\mathrm{mes}(A)$-Лебеговая мера множества A. Недавно были доказаны следующие теоремы (см. [4]).

Теорема А (Г. Г. Геворкян). *Для любого ряда $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ имеет место*

$$\mathrm{mes}\{t \in I : \lim_{\nu\to\infty} \sum_{m=0}^{2^\nu} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0.$$

В частности, ряд Франклина не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Теорема Б (Г. Г. Геворкян). *Если для ряда $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ выполняется*

$$\mathrm{mes}\{t \in E : \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0,$$

то ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$ сходится на E почти всюду. В частности, ряд Франклина не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

В работе [18] доказаны:

- Если $\sup_k \frac{n_{k+1}}{n_k} < \infty$, то (см. [18], теорема 3)

$$\mathrm{mes}\{x \in I : \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{n_k} a_m f_m(t) = +\infty\} = 0.$$

- Если $\sup_k \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty$, то (см. [18], теорема 4) существует ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m f_m(t)$, со свойством

$$\mathrm{mes}\{x \in I : \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{n_k} a_m f_m(t) = +\infty\} = 1.$$

Аналог теоремы А для рядов по ортонормальным сплайнам доказан в работе [16]. Аналог теоремы Б для таких рядов неизвестен.

В настоящей работе рассматриваются кратные ряды по системе Франклина. Пусть k некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^k} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{N}_0^k$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in [0;1]^k$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1)\cdots f_{m_k}(x_k)$.

Обозначим через $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ кубические частичные суммы ряда (1.1) с номерами 2^ν, т.е.

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_k)$.

Верна следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого ряда* (1.1) *имеет место*

$$\mathrm{mes}\{\boldsymbol{x} \in I^k : \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(\boldsymbol{x}) = +\infty\} = 0.$$

2. Определение системы Франклина и вспомогательные леммы

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu \ge 0$, где $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } \ 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } \ 2\nu < i \le n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [12].

Введем следующие обозначения: $t_j^\nu = \frac{j}{2^\nu}$, когда $0 \le j \le 2^\nu$, $t_{-1}^\nu = t_0^\nu = 0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu = t_{2^\nu}^\nu = 1$. Положим $\delta_j^\nu = (t_{j-1}^\nu; t_{j+1}^\nu)$, для $0 \le j \le 2^\nu$. Пусть δ_{ij}-символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \ne j$. Функции φ_j^ν определим следуюшим образом:

$$\varphi_j^\nu(t_i^\nu) = \delta_{ij}, \quad j = 0, ..., 2^\nu, \quad \text{и} \quad \varphi_j^\nu \quad \text{линейна на} \quad [t_{i-1}^\nu, t_i^\nu], \quad i = 1, ..., 2^\nu.$$

Для натурального ν положим $\mathbb{N}_\nu^k = \{0, 1, ..., 2^\nu\}^k$. Для вектора $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_k) \in \mathbb{N}_\nu^k$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{j}}^\nu = \delta_{j_1}^\nu \times \cdots \times \delta_{j_k}^\nu, \ \mathbf{t}_{\mathbf{j}}^\nu = (t_{j_1}^\nu, ..., t_{j_k}^\nu), \ \text{ и } \ \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{j}}^\nu(t_1, ..., t_k) = \varphi_{j_1}^\nu(t_1) \cdots \varphi_{j_k}^\nu(t_k).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^{2^\nu} \varphi_j^\nu(x) = 1$, когда $x \in I$. Следовательно

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in I^k, \quad \text{и} \quad \mathrm{supp}\phi_{\mathbf{j}}^\nu = \Delta_{\mathbf{j}}^\nu.$$

Очевидно, что система функций $\{\phi_{\mathbf{j}}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^k}$ образует базис в линейном пространстве S_{2^ν}. Имеем также

$$\int_{I^k} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^k \int_{\delta_{j_i}^\nu} \varphi_{j_i}^\nu(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^k \frac{\mathrm{mes}(\delta_{j_i}^\nu)}{2} = \frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)}{2^k}.$$

Обозначив

$$M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) = \frac{2^k}{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^\nu)} \phi_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

получим

$$\int_{I^k} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{2.2}$$

Верна следующая лемма (см. [13] лемма 2).

Лемма 2.1. *Для любых $M_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}(\boldsymbol{x})$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа $\alpha_{\boldsymbol{j}}$ такие что*

$$M_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \alpha_{\boldsymbol{j}} M_{\boldsymbol{j}}^\nu(\boldsymbol{x}),$$

причем

$$\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}_\nu^k} \alpha_{\boldsymbol{j}} = 1, \quad \alpha_{\boldsymbol{j}} \ge 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\boldsymbol{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu \not\subset \Delta_{\boldsymbol{j}_0}^{\nu_0}.$$

Пусть $N_0(t) = 1 - t$, $N_1(t) = t$, $t \in I$ $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_k)$, где $\epsilon_i = 0$ или 1. Положим

$$N_\epsilon(\mathbf{x}) = N_{\epsilon_1}(x_1) \cdot N_{\epsilon_2}(x_2) \cdots N_{\epsilon_k}(x_k).$$

Лемма 2.2. *Пусть*

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_{\epsilon} a_\epsilon N_\epsilon(\boldsymbol{x}), \quad \text{где} \quad a_\epsilon \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

и

$$\int_{I^k} F(\boldsymbol{x}) N_{\epsilon'}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1, \quad \text{для некоторого} \quad \epsilon'. \tag{2.4}$$

Тогда $\operatorname{mes}\{\boldsymbol{x} \in I^k : F(\boldsymbol{x}) \geq 2^{k-1}\} \geq 3^{-k^2}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_I N_0(t) N_0(t) dt = \int_I N_1(t) N_1(t) dt = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \int_I N_0(t) N_1(t) dt = \frac{1}{6}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{I^k} N_{\epsilon'}(\mathbf{x}) N_\epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}, \quad \text{где} \quad |\epsilon - \epsilon'| := \sum |\epsilon_i - \epsilon'_i|. \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) получим

$$1 = \sum_{\epsilon} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$A_+ = \{\epsilon : a_\epsilon \geq 0\}, \quad A_- = \{\epsilon : a_\epsilon < 0\} \quad \text{и} \quad a := \max_{\epsilon \in A_+} a_\epsilon. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что

$$1 - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} = \sum_{\epsilon \in A_+} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} \leq a \frac{1}{3^k} \sum_{\epsilon} \frac{1}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}} = a \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^k = \frac{a}{2^k}.$$

Следовательно

$$a \geq 2^k - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^k} \cdot \frac{2^k}{2^{|\epsilon-\epsilon'|}}. \tag{2.8}$$

Пусть точка ϵ'' такая, что $a = a_{\epsilon''}$. Без ограничения общности, можем считать, что $\epsilon'' = (0, ..., 0)$. Обозначим $E = [0, 3^{-k}]^k$. Очевидно, что

$$N_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) \geq \left(1 - 3^{-k}\right)^k > \frac{1}{2}, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in E, \tag{2.9}$$

и

$$N_\epsilon(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{3^{k|\epsilon|}}, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in E. \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.7)–(2.10) $\mathbf{x} \in E$ получим

$$F(\mathbf{x}) \geq a N_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \frac{1}{3^{k|\epsilon|}} \geq 2^{k-1} - \sum_{\epsilon \in A_-} a_\epsilon \left(\frac{2^{k-1-|\epsilon|}}{3^k} - \frac{1}{3^{k|\epsilon|}}\right) \tag{2.11}$$

Из $0<|\epsilon|\le k$ следует, что

$$\frac{2^{k-1-|\epsilon|}}{3^k}-\frac{1}{3^{k|\epsilon|}}>0.$$

Поэтому, из (2.11) следует

$$F(\mathbf{x})\ge 2^{k-1}\quad\text{когда}\quad \mathbf{x}\in E.$$

Очевидно, что $\mathrm{mes}E=3^{-k^2}$. □

Лемма 2.3. *Если* $(\sigma_\nu,M_{\boldsymbol{j}}^\nu)=:A>0$, $\boldsymbol{j}=(j_1,...,j_k)$, $0<j_i<2^\nu$, $i=1,...,k$, *то*

$$\mathrm{mes}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{supp}\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu:\sigma_\nu(\boldsymbol{x})\ge\frac{A}{2}\right\}\ge 3^{-k^2}\mathrm{mes}(\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu).$$

Доказательство. Пусть Δ_i, $i=1,2,...,2^k$ октанты куба $\Delta_{\mathbf{j}}^\nu$. Очевидно, что из условия леммы следует, что на одной из Δ_i выполняется

$$\int_{\Delta_i}\sigma_\nu(\mathbf{x})M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x})d\mathbf{x}>2^{-k}A.$$

Куб Δ_i k-линейным преобразованием переведем в куб I^k. Тогда функция $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ перейдет в некую функцию вида (2.3), а $M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x})$ в функцию вида $2^kN_\epsilon(\mathbf{x})$. Тогда имеем

$$\int_{I^k}F(\mathbf{x})N_\epsilon(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ge 2^{-k}A.$$

Для завершения доказательства остается применить лемму 2.2. □

Из леммы 2.3 следует

Лемма 2.4. *Если* $(\sigma_\nu,M_{\boldsymbol{j}}^\nu)=:A<0$, $\boldsymbol{j}=(j_1,...,j_k)$, $0<j_i<2^\nu$, $i=1,...,k$, *то*

$$\mathrm{mes}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{supp}\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu:\sigma_\nu(\boldsymbol{x})\le\frac{A}{2}\right\}\ge 3^{-k^2}\mathrm{mes}(\Delta_{\boldsymbol{j}}^\nu).$$

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.1. Допустим обратное, существует ряд (1.1), такой что для последовательности $\sigma_\nu(\mathbf{x})$, $\nu=1,2,...,$, определяемой формулой (1.2), выполняется

$$\mathrm{mes}(E_+)>0,\quad\text{где}\quad E_+:=\{\mathbf{x}\in I^k:\lim_{\nu\to\infty}\sigma_\nu(\mathbf{x})=+\infty\}.\tag{3.1}$$

Множества вида $\left[\frac{i_1}{2^\nu},\frac{i_1+1}{2^\nu}\right]\times\cdots\times\left[\frac{i_k}{2^\nu},\frac{i_k+1}{2^\nu}\right]$ назовем двоичными кубами. Применяя аналог теоремы о точках плотности измеримых множеств в многомерном случае (см. напр. [18], теорема 2.1), найдем двоичный куб Δ, для которого выполняется

$$\mathrm{mes}(\Delta\cap E_+)>(1-\gamma_1)\mathrm{mes}(\Delta),\quad\text{где}\quad\gamma_1:=2^{-5k}3^{-k^2}.\tag{3.2}$$

Далее, применяя теорему о непрерывности меры, найдем число $L<0$, такое что

$$\text{mes}(E_-) < \gamma_1 \text{mes}(\Delta), \tag{3.3}$$

где

$$E_- = \{\mathbf{x} \in \Delta : \inf_{\nu} \sigma_\nu(\mathbf{x}) \le L\}. \tag{3.4}$$

Ясно, что для некоторых ν_0, $\mathbf{j}_0$ будет $\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0} = \Delta$.

По индукции определим представления

$$M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}) = \sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} M^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} M^\nu_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}), \tag{3.5}$$

с неотрицательными коэффициентами $\alpha^{(n)}_{\mathbf{i}}$, $\beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$.

Полагая $\Lambda^1_{\nu_0} = \emptyset$, $\Lambda^2_{\nu_0} = \{\mathbf{j}_0\}$, $\beta^{(\nu_0)}_{\mathbf{j}_0} = 1$, получим представление (3.5) для $\nu = \nu_0$. Отметим, что выполняется (см. (3.3), (3.4))

$$\text{mes}(\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{i}} \cap E_-) < \gamma_1 \text{mes}(\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{i}}) \quad \text{для} \quad \mathbf{i} \in \Lambda^2_{\nu_0}.$$

Допустим имеем представление (3.5) для $\nu-1$ и получим ее для ν. В силу леммы 2.1 имеем

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_{\nu-1}} \beta^{(\nu-1)}_{\mathbf{i}} M^{\nu-1}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}} \eta^{(\nu)}_{\mathbf{l}} M^\nu_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}). \tag{3.6}$$

Обозначим $\Lambda_\nu = \{\mathbf{l} : \eta^{(\nu)}_{\mathbf{l}} \ne 0\}$,

$$\Lambda^1_\nu = \{\mathbf{l} \in \Lambda_\nu : \text{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{l}} \cap E_-) \ge \gamma_2 \text{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{l}})\}, \quad \text{где } \gamma_2 = 2^{-k}\cdot 3^{-k^2}, \tag{3.7}$$

$$\Lambda^2_\nu = \Lambda_\nu \backslash \Lambda^1_\nu. \tag{3.8}$$

Положим также

$$\alpha^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \eta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}, \quad \text{если} \quad \mathbf{i} \in \Lambda^1_\nu \quad \text{и} \quad \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \eta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}, \quad \text{если} \quad \mathbf{i} \in \Lambda^2_\nu.$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$, $\beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}}$ следует из леммы 2.1 и (3.6). Кроме того, учитывая, что интегралы всех функций, входящих в (3.5) равны единице, получим

$$\sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^2_\nu} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = 1. \tag{3.9}$$

Заметим, что

$$\text{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{i}} \cap E_-) \le 2^k \gamma_2 \text{mes}(\Delta^\nu_{\mathbf{i}}), \quad \text{когда} \quad \mathbf{i} \in \Lambda^1_\nu. \tag{3.10}$$

Действительно, если $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1$, то для некоторого $\mathbf{j} \in \Lambda_{\nu-1}^2$ имеет место $\Delta_\mathbf{i}^\nu \subset \Delta_\mathbf{j}^{\nu-1}$. Поэтому (см. (3.7), (3.8))

$$(3.11) \qquad \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu \cap E_-) \le \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{j}^{\nu-1} \cap E_-) \le \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{j}^{\nu-1}) \le 2^k \gamma_2 \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu).$$

Из (3.7), (3.8), (3.10) и (3.11) следует, что

$$(3.12) \qquad \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu \cap E_-) \le 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu), \quad \text{когда} \quad \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1 \cup \Lambda_\nu^2.$$

Применяя лемму 2.4, из (3.12) и (3.4) получаем

$$(3.13) \qquad (\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) > 2L, \quad \text{когда} \quad \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^1 \cup \Lambda_\nu^2.$$

Для произвольного числа $L_1 > -1000L$ обозначим

$$(3.14) \qquad \Lambda_\nu^3 = \{\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^2 : \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} > (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu)\},$$

и

$$(3.15) \qquad \Lambda_\nu^4 = \Lambda_\nu^2 \backslash \Lambda_\nu^3.$$

Докажем, что

$$(3.16) \qquad (\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) \ge \frac{L_1}{2}, \quad \text{если} \quad \mathbf{i} \in \Lambda_\nu^3.$$

Допустим обратное: $(\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) < \frac{L_1}{2}$ для некоторого $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^3$. Тогда будем иметь

$$(3.17) \qquad (\sigma_\nu - L_1, M_\mathbf{i}^\nu) = -L_1 + (\sigma_\nu, M_\mathbf{i}^\nu) < -\frac{L_1}{2}.$$

Применяя лемму 2.4 к (3.17), получим

$$(3.18) \qquad \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) - L_1 \le -\frac{L_1}{4}\right\} \ge 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu).$$

Соотношение (3.18) противоречит (3.14). Следовательно выполняется (3.16).

Пусть $\mathbf{i} \in \Lambda_\nu^4$, т.е.

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{i}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} < (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_\mathbf{i}^\nu).$$

Обозначим через $\Delta_{\mathbf{i},j}^\nu$, $j = 1, ..., 2^k$, октанты куба $\Delta_\mathbf{i}^\nu$. Тогда для одного из них, допустим для $\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu$, выполняется

$$(3.19) \qquad \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) > L_1\} < (1 - 3^{-k^2}) \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu).$$

Положим

$$(3.20) \qquad B_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu = \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu : \sigma_\nu(\mathbf{x}) \le L_1\}$$

Из (3.19), (3.20) следует

$$\mathrm{mes}(B_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu) \ge 3^{-k^2} \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}^\nu).$$

Каждый куб $B^{\nu}_{\mathbf{i},j(\mathbf{i})}$, с условиями (3.19), (3.20), может содержаться не более чем в 2^k разных кубах $\Delta^{\nu}_{\mathbf{i}}$, с условием $\mathbf{i} \in \Lambda^4_{\nu}$. Следовательно

$$\operatorname{card}(\Lambda^4_{\nu}) \le 2^{\nu} 2^k 3^{k^2} \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta : \sigma_{\nu}(\mathbf{x}) < L_1\}. \tag{3.21}$$

Из (3.2) следует, что для любого L_1, при достаточно больших ν, имеет место

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta : \sigma_{\nu}(\mathbf{x}) < L_1\} < 2^{-5k} 3^{-k^2} \operatorname{mes}(\Delta). \tag{3.22}$$

Из (3.21), (3.22) имеем

$$\operatorname{card}(\Lambda^4_{\nu}) \le 2^{-4k} 2^{\nu-\nu_0}. \tag{3.23}$$

Обозначим

$$G = \bigcup_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_{\nu}} \Delta^{\nu}_{\mathbf{i}}. \tag{3.24}$$

Очевидно, что (см. (3.23), (3.24)) $\operatorname{mes}(G) < 2^{-3k} 2^{-\nu_0}$, и поэтому (см. также (2.2), (3.5), (2.1))

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_{\nu}} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_{\nu}} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} \int M^{\nu}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \le \int_G M^{\nu_0}_{\mathbf{i}_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \le 2^{k+\nu_0} 2^{-3k-\nu_0} = 2^{-2k}. \tag{3.25}$$

Положим

$$H_{\nu} := \bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} \bigcup_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \Delta^n_i.$$

Из (3.10) следует , что

$$\operatorname{mes}(H_{\nu}) \le 2^k \gamma_2 \operatorname{mes}(\Delta) = 3^{-k^2} \operatorname{mes}(\Delta).$$

Следовательно (см. также (2.2), (3.5), (2.1))

$$\sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} = \sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} \int M^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \le \int_{H_{\mu}} M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.26}$$

$$\le \operatorname{mes}(H_{\mu}) \| M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0} \|_{\infty} \le 3^{-k^2} \operatorname{mes}(\Delta) \frac{2^k}{\operatorname{mes}(\Delta)} \le 2^{-k}.$$

Из (3.9), (3.15), (3.25), (3.26) вытекает, что

$$\sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^3_{\nu}} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} = 1 - \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^4_{\nu}} \beta^{(\nu)}_{\mathbf{i}} - \sum_{n=\nu_0}^{\nu} \sum_{\mathbf{i}\in\Lambda^1_n} \alpha^{(n)}_{\mathbf{i}} \ge 1 - 2^{-2k} - 2^{-k} > 0.5. \tag{3.27}$$

Комбинируя (3.25) – (3.27) с (3.5), (3.13), (3.16), получим

$$d := (\sigma_{\nu_0}, M^{\nu_0}_{\mathbf{i}_0}) > \frac{L_1}{4} + 2L,$$

где L_1 может быть сколь угодно большим. Полученное противоречие доказывает неверность предположения (3.1). Теорема доказана.

Abstract. In this paper we prove that the quadratic partial sums of a multiple Franklin series with indices 2^{ν}, $\nu = 1, 2, ...$, cannot converge to $+\infty$ on a set of positive measure.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и Тригонометрический Ряд, М.– Л., ГИИТЛ (1951).
[2] Ю. Б. Гермейер, Производные Римана и Валле-Пуссена и их Применение к Некоторым Вопросам из Теории Тригонометрических Рядов, Дис. канд. физ.-мат. наук, М. (1946).
[3] И. И. Привалов, Граничные Свойства Аналитических Функций, М. ГИИТЛ (1950).
[4] Д. Е. Меньшов, "О сходимости по мере тригонометрических рядов", Труды МИАН СССР **32**, 3 – 97 (1950).
[5] А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, 621 – 660 (1963).
[6] С. В. Конягин, "О пределах неопределенности тригонометрических рядов", Матем. заметки, **44**, 770 – 784 (1988).
[7] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, "О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$", Мат. сб. **66**, 240 – 247 (1965).
[8] R. F. Gundy, "Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series", Trans. Amer. Math. Soc., **124**, 228 – 248 (1966).
[9] В. А. Скворцов, "Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара", Мат. заметки **4**, 33 – 40 (1968).
[10] Р. И. Овсепян, А. А. Талалян, "О сходимости ортогональных рядов к $+\infty$", Мат. заметки **2**, 129 – 135 (1970).
[11] Н. Б. Погосян, "Представление измерумых функций базисами $L_p[0,1]$, $p \geq 2$", ДАН Арм. ССР **4**, 205 – 209 (1976).
[12] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., **100**, 522 – 528 (1928).
[13] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности для рядов по системе Франклина", Матем. заметки, **101**, 199 – 210 (2017).
[14] Г. Г. Геворкян, "О сходимости рядов Франклина к $+\infty$", Матем. заметки, принято в печать.
[15] G. G. Gevorkyan, "On a "martingale property" of Franklin series", Analysis Math., accepted.
[16] G.G. Gevorkyan, K. A. Keryan, M. P. Poghosyan, "Convergence to infinity for orthonormal spline series", Monatsh. Math., submited.
[17] К. А. Навасардян, В. Г. Микаелян, "О сходимостияастичных сумм рядов Франклина к $+\infty$", Изв. НАН Армении, сер. матем., **54**, no. 6, 54 – 65 (2019).
[18] М. Гусман, Дифференцирование Интегралов, Мир, Москва (1978).

Поступила 10 июня 2019

После доработки 15 сентября 2019

Принята к публикации 19 декабря 2019