

МАТЕМАТИКА

Р. И. ОСИПОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

Как известно, еще не решен вопрос о существовании для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

универсального относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду.

Однако, А. А. Талаляном доказано [см. [1], стр. 135], что если заменить сходимость почти всюду сходимостью по мере, то вопрос о существовании рядов, универсальных относительно перестановок, будет иметь положительное решение для любых базисов пространства L_p , $p > 1$.

Ввиду трудности вышеуказанной задачи, можно рассматривать более простую, а именно задачу о существовании для любой полной ортонормированной системы (или частного класса таких систем) $\{\varphi_n(x)\}$ такого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

что для произвольной измеримой почти всюду на отрезке $[0, 1]$ конечной функции $f(x)$ существует подряд этого ряда, который после некоторой перестановки сходится почти всюду к $f(x)$.

В настоящей статье решается частный случай этой задачи, а именно справедлива следующая

Теорема. Пусть система функций $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормирована, полна в $L^2(0, 1)$ и

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n \\ m \Delta_n &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Δ_n — интервал, принадлежащий отрезку $[0, 1]$.

Тогда существует такая перестановка $\varphi_{k_n}(x)$, что для любой измеримой почти везде на отрезке $[0, 1]$ конечной функции $f(x)$ можно указать ряд

$$\sum a_n \varphi_{k_n}(x),$$

сходящийся почти всюду на $[0, 1]$ к ней.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. (А. А. Талалян). Пусть $\psi_0(x)$ — произвольная функция, определенная на отрезке $\Delta = [a, b]$, принадлежащая классу $L_p(\Delta)$, $p > 1$ и равная нулю вне некоторого множества E_0 , $E_0 \subset \Delta$.

Пусть $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ — произвольные функции (n — конечно), определенные на $\Delta = [a, b]$ и принадлежащие классу $L_q(\Delta)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить ограниченную функцию $f(x)$ и множество e , обладающих следующими свойствами:

$$1) f(x) = 0 \text{ при } x \notin e, \text{ где } e \subset E_0, \text{ т.е. } e \subset E_0 \mid \Delta \mid$$

$$2) \int_{\Delta} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon_0^{\frac{1}{p-1}} \int_{\Delta} |\psi_0(x)|^p dx$$

$$3) \left| \int_{\Delta} [\psi_0(x) - f(x)] \psi_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad 1 \leq k \leq n.$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — конечная система функций, ортогональных в интервале $[0, 1]$, $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ — перестановка чисел $(1, 2, \dots, m)$

$$S_n(x, \sigma) = \sum_{i=1}^n \Phi_{k_i}(x) \text{ и } S_m^*(x, \sigma) = \max_{1 \leq i \leq m} |S_n(x, \sigma)|.$$

Лемма 2. (Garzia). Для каждой системы ортогональных функций $\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x)$ мы имеем

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma} \int_0^1 S_m^*(x, \sigma) dx \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m \int_0^1 \Phi_i^2 dx \right]^{1/2},$$

где первая сумма берется по всем перестановкам.

Доказательство леммы 1 и леммы 2 можно найти соответственно в работах [1], [2].

Лемма 3. Каковы бы ни были функция $F(x) \in L^2(0, 1)$ ($F(x) = 0$, $x \in E \subset [0, 1]$), числа $\tau > 0$, $\delta > 0$, существуют множество $\tilde{E}$, ступенчатая функция $\psi(x)$, значения и концы интервалов постоянства которой — рациональные числа и

$$1) m(\Delta(\psi(x) \neq 0) - E) < \frac{\delta}{2}, \quad m(E - \Delta(\psi(x) \neq 0)) < \frac{\delta}{2}$$

$$2) |\psi(x) - F(x)| < \tau \quad x \in \tilde{E} \quad m\tilde{E} > 1 - \delta$$

$$3) |\psi(x)| \leq \sup |F(x)|.$$

Лемма 4. Пусть даны

а) произвольная полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая условию (1),

в) функция $\varphi(x) \in L^2(0, 1)$, причем $\varphi(x) = 0$, $x \in E \subset [0, 1]$, $mE > 0$,

с) натуральное число n , числа $\gamma > 0$, $\eta > 0$.

Тогда существуют множества P, Q , натуральные числа $N \geq n$ и m , перестановка $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ чисел $(N+1, N+2, \dots, N+m)$, числа $a_1, \dots, a_m$ такие, что

$$1) P \subset CE \quad m(CE - P) < \eta$$

$$2) mQ > 1 - \eta$$

$$3) a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x) \equiv 0 \quad x \in P \quad i = 1, \dots, m$$

$$4) |a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x)| \leq \frac{100}{1/\eta^3} \|\varphi\| \quad x \in Q \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$5) |a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_m \varphi_{k_m}(x) - \varphi(x)| < \gamma \quad x \in Q.$$

Здесь

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Лемма 3 очевидна.

Доказательство леммы 4. Нетрудно показать, что существует открытое множество $G \subset [0, 1]$, имеющее конечное число составляющих интервалов и такое, что

$$m(G - E) < \frac{\eta}{4} \quad (2)$$

$$m(E - G) < \frac{\eta}{4}. \quad (3)$$

В силу условия (1) можно указать настолько большое натуральное число N , что если $\{\Delta_{k_i}\}$ — совокупность всех тех интервалов из $\{\Delta_n\}$, для которых

$$k_i \geq N \\ m\Delta_{k_i}G > 0, \quad (4)$$

то

$$m(G_1 - G) < \frac{\eta}{2}, \quad (5)$$

где $G_1 \equiv \sum_{i=N}^{\infty} \Delta_{k_i}$.

Обозначим множество $\sum_{i=N}^{\infty} \Delta_{k_i}$ через Δ и рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in G \\ 0 & x \notin G. \end{cases} \quad (6)$$

Выберем число $\gamma_0 > 0$ настолько малым, что для каждого x из некоторого множества A , для которого

$$mA > 1 - \frac{\eta}{8}, \quad (7)$$

справедливо следующее неравенство

$$\gamma_0 \{ |\varphi_1(x)| + \dots + |\varphi_N(x)| \} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Это возможно в силу того, что функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) почти везде конечные.

Далее положим в лемме 1 $[a, \beta] = [0, 1]$; $p = q = 2$, $E_0 = GE$, $\psi_0(x) \equiv F(x)$; $\psi_1(x) \equiv \varphi_1(x), \dots$, $\psi_n(x) \equiv \varphi_N(x)$, $\varepsilon = \gamma$, $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{4}$.

Пусть ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (9)$$

является рядом Фурье функции $\Phi(x) \equiv \psi_0(x) - f(x)$.

Из (7), (8) и п. 3) леммы 1 следует

$$|c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_N \varphi_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

на множестве A с $mA > 1 - \frac{\eta}{8}$.

Возьмем число $N + m$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^1 (S_{N+m}(x) - \Phi(x))^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\eta}{8} \quad (11)$$

(где $S_{N+m}(x)$ — частная сумма ряда (9)), откуда будет следовать, что во всех точках некоторого множества B , для которого

$$mB > 1 - \frac{\eta}{8}, \quad (12)$$

выполнено неравенство

$$|S_{N+m}(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Для множества $P \equiv [0, 1] - (G_1 + E)$ имеем, что $P \subset CE$ и далее

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \Delta_{k_i} + E \equiv (G_1 - G) + G + E. \quad (14)$$

Из (2), (5) и (14) следует, что

$$m(G_1 + E) < \frac{\eta}{2} + mE + \frac{\eta}{4} < mE + \eta, \quad (15)$$

откуда получаем

$$mP > 1 - mE - \eta = mCE - \eta \quad (16)$$

и, следовательно, $m(CE - P) < \eta$, т. е. п. 1) леммы 4 доказан.

Далее, при любом $i > N$ $c_i \varphi_i(x) = 0$ при $x \in P$.

В самом деле, или $\Delta_i G = 0$ и тогда из (6) следует, что $c_i = 0$, или если $\Delta_i G \neq 0$ (но $\Delta_i \subset G_1$ и, следовательно, $\Delta_i P = 0$), то из (!) следует, что $\varphi_i(x) = 0$ при $x \in P$, т. е.

$$\sum_{i=N+1}^{N+s} c_i \varphi_i(x) = 0 \quad x \in P \quad s = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

откуда вытекает справедливость п. 3) леммы 4.

А из (10), (12), (13) следует

$$|c_{N+1} \varphi_{N+1}(x) + \dots + c_{N+m} \varphi_{N+m}(x) - \Phi(x)| < \varepsilon. \quad (18)$$

Но $\Phi(x) \equiv F(x)$ при $x \in e$ и далее из (6) следует, $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при $x \in e + (E - G) \equiv P_0$ и, учитывая (18), получаем

$$|c_{N+1} \varphi_{N+1}(x) + \dots + c_{N+m} \varphi_{N+m}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (19)$$

при $x \in (CP_0) \cdot A \cdot B$.

Далее, полагая в лемме 2 $\Phi_1(x) \equiv c_{N+1} \varphi_{N+1}(x), \dots, \Phi_m(x) \equiv c_{N+m} \varphi_{N+m}(x)$, получим некоторую перестановку $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ чисел $(N+1, \dots, N+m)$ такую, что

$$\int_0^1 S_m(x, \varepsilon) dx \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m c_{N+i}^2 \right]^{1/2} \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m c_{N+i}^2 \right] = 4 \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Затем, учитывая п. 2 леммы 1, (6) и следующее неравенство

$$\int_0^1 |\phi_0(x) - f(x)|^2 dx \leq 2^2 \left(\int_0^1 \phi_0^2 dx + \int_0^1 f^2 dx \right).$$

получаем из (20)

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_m(x, \varepsilon) dx &\leq 4 \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{1/2} = 4 \left\{ \int_0^1 |\phi_0(x) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq 8 \left[\frac{4 + \eta}{\eta} \int_0^1 \phi_0^2 dx \right]^{1/2} \leq \frac{25}{\sqrt{\eta}} \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует

$$S_m^*(x, \sigma) \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (22)$$

на некотором множестве R $mR > 1 - \frac{\eta_1}{4}$.

Учитывая (3), (7), (12), (19) и (22), получаем, что для всех точек множества $Q \equiv R(CP_0)A \cdot B$ справедливы неравенства

$$|a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x)| \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \|\varphi\| \quad i = 1, \dots, m$$

$$|a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_m \varphi_{k_m}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon = \eta_1,$$

где $a_i = c_{k_i}$, $i = 1, \dots, m$ и $mQ > 1 - \eta_1$.

Тем самым лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{\psi_i(x)\}$ — множество всех таких ступенчатых функций, концы интервалов постоянства значения которых являются рациональными числами, причем $m\Delta(\psi_i(x) = 0) > 0$ для каждого i . Очевидно, что множество этих функций счетно.

Фиксируем последовательности $\eta_j \rightarrow 0$, $\gamma_j \rightarrow 0$, $\eta_j > 0$, $\gamma_j > 0$. Рассмотрим множество $[\psi(x), \eta, \gamma]$, зависящее от трех параметров. Пусть η пробегает множество $\{\eta_j\}$, γ — множество $\{\gamma_j\}$.

Перенумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности $[\psi_1(x), \eta_1, \gamma_1], [\psi_2(x), \eta_2, \gamma_2], \dots$. Далее положим в лемме 4 $\varphi(x) \equiv \psi_1(x)$, $\gamma = \gamma_1$, $\eta = \eta_1$ и $n = 0$ и получим множества P_1 , Q_1 , натуральные числа $N_1 \geq 0$ и m_1 , перестановки $\sigma_1 = (k_{1,1}, \dots, k_{m_1,1})$ чисел $(N_1 + 1, \dots, N_1 + m_1)$, числа $a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}$ такие, что

$$P_1 \subset CE_1 \quad m(CE_1 - P_1) < \eta_1 \quad E_1 \equiv \Delta(\psi_1(x) \neq 0) \quad (23)$$

$$mQ_1 > 1 - \eta_1 \quad (24)$$

$$a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_{m_1}^{(1)} \varphi_{k_{m_1,1}}(x) = 0 \quad x \in P_1, \quad j = 1, \dots, m_1 \quad (25)$$

$$|a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_j^{(1)} \varphi_{k_{j,1}}(x)| \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \|\psi_1\| \quad x \in Q_1, \quad j = 1, \dots, m_1 \quad (26)$$

$$|a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_{m_1}^{(1)} \varphi_{k_{m_1,1}}(x) - \psi_1(x)| < \gamma_1 \quad x \in Q_1 \quad (27)$$

Пусть уже определены числа $N_1, N_2, \dots, N_i; m_1, \dots, m_i; a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(i)}, \dots, a_{m_i}^{(i)}$, множества $P_1, \dots, P_i; Q_1, \dots, Q_i$ и соответствующие перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$.

Далее поступаем следующим образом.

Полагаем в лемме 4 $\varphi(x) \equiv \psi_{i+1}(x)$, $\gamma = \gamma_{i+1}$, $\eta = \eta_{i+1}$ и $n = N_i + m_i$.

Тогда получим множества P_{i+1} , Q_{i+1} , натуральные числа N_{i+1} , m_{i+1} , перестановку $\sigma_{i+1} = (k_{1, i+1}, \dots, k_{m_{i+1}, i+1})$ чисел $(N_{i+1} + 1, \dots, N_{i+1} + m_{i+1})$, числа $a_1^{(i+1)}, \dots, a_{m_{i+1}}^{(i+1)}$ такие, что

$$P_{i+1} \subset CE_{i+1}, \quad m(CE_{i+1} - P_{i+1}) < \eta_{i+1}, \quad E_{i+1} \equiv \Delta(\psi_{i+1}(x) \neq 0), \quad (28)$$

$$mQ_{i+1} > 1 - \eta_{i+1}, \quad (29)$$

$$a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_j^{(i+1)} \varphi_{k_{j, i+1}}(x) \equiv 0 \quad x \in P_{i+1} \quad j = 1, \dots, m_{i+1}, \quad (30)$$

$$|a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_j^{(i+1)} \varphi_{k_{j, i+1}}(x)| \leq \frac{100}{\eta_{i+1}^{1/2}} \|\psi_{i+1}\|$$

$$x \in Q_{i+1} \quad j = 1, \dots, m_{i+1}, \quad (31)$$

$$|a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_{m_{i+1}}^{(i+1)} \varphi_{k_{m_{i+1}, i+1}}(x) - \psi_{i+1}(x)| < \gamma_{i+1} \quad x \in Q_{i+1}. \quad (32)$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим такие последовательности чисел $\{N_i\}$, $\{m_i\}$; $\{a_1^{(i)}, \dots, a_{m_i}^{(i)}\}$, множеств $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ и перестановок $\{\sigma_i\}$, что справедливы соотношения (28)–(32) для любого натурального i .

Мы получим искомую перестановку $\{\varphi_{k_n}(x)\}$, если положим

$$k_{N_i + m_i + j} = N_i + m_i + j \quad 1 \leq j \leq N_{i+1} - N_i - m_i \quad i = 0, 1, \dots$$

$$k_{N_i + j} = k_{j, i} \quad 1 \leq j \leq m_i \quad i = 1, 2, \dots$$

Докажем справедливость этого утверждения.

Введем обозначение

$$\Phi_{i, j}(x) \equiv a_1^{(i)} \varphi_{k_{1, i}}(x) + \dots + a_j^{(i)} \varphi_{k_{j, i}}(x) \quad x \in [0, 1]. \quad (A)$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая и почти везде на отрезке $[0, 1]$ конечная функция и числа $\varepsilon_i \downarrow 0$ таковы, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \quad (33)$$

Пусть $f_0(x) \in L^2(0, 1)$ и $B_0 \equiv \Delta(f_0(x) = f(x)) \quad mB_0 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (34)$

и m_0 настолько велико, что

$$\int_0^1 (S_{m_0}(x) - f_0(x))^2 dx < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^5,$$

откуда следует, что

$$|S_{m_0}(x) - f_0(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \quad (35)$$

на некотором множестве A_0 , для которого

$$mA_0 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8}, \quad (36)$$

где $S_{m_0}(x)$ — m_0 -ая частная сумма ряда Фурье функции $f_0(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x) - S_{m_0}(x) \quad x \in [0, 1] \\ \Gamma_1(x) &= \begin{cases} g_1(x) & x \in R_0 \equiv A_0 \cdot B_0 \\ 0 & x \notin R_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Из (35), (36) и (37) следует, что

$$|\Gamma_1(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \quad x \in [0, 1]. \quad (38)$$

Положим в лемме 3 $F(x) \equiv \Gamma_1(x)$, $E \equiv R_0$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$

и определим множество $A_1 \equiv \tilde{E}$ и ступенчатую функцию $\psi(x)$ так, что

$$|\psi(x) - \Gamma_1(x)| < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in A_1 \quad mA_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (39)$$

$$|\psi(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \text{ и, следовательно, } \|\psi\| \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2. \quad (40)$$

Выберем n_1 таким, что $\psi_{n_1}(x) \equiv \psi(x)$,

$$\eta_{n_1} = \frac{\varepsilon_0}{8}, \quad \gamma_{n_1} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad (41)$$

и $N_{n_1} > m_0$; тогда, положив в (29), (31) и (32) $i+1 = n_1$, получим

$$|\Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) - \psi_{n_1}(x)| \leq \gamma_{n_1} \quad x \in Q_{n_1} \quad (42)$$

$$|\Phi_{n_1, j}(x)| \leq \frac{100}{\eta_{n_1}^{1/2}} \|\psi_{n_1}\| \quad (43)$$

$$x \in Q_{n_1} \quad j = 1, \dots, m_{n_1}$$

$$mQ_{n_1} > 1 - \eta_{n_1}. \quad (44)$$

Учитывая (39)–(44), (36), (34), (37), получим

$$|\Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) - g_1(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_1 \quad (45)$$

$$|\Phi_{n_1, j}(x)| \leq \frac{100}{\tau_{n_1}^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \leq 25 \sqrt{\varepsilon_0} \quad x \in R_1, \quad (46)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_1}$$

где

$$R_1 = Q_{n_1} \cdot A_1 \cdot R_0, \quad mR_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} > 1 - \varepsilon_0. \quad (47)$$

Рассмотрим функцию

$$g_2(x) = g_1(x) - \Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) \quad x \in [0, 1]. \quad (48)$$

Из (45) и (47) следует, что

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_1 \quad (49)$$

$$mR_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (50)$$

Введем еще в рассмотрение функцию

$$\Gamma_2(x) = \begin{cases} g_2(x) & x \in R_1 \\ 0 & x \in R_1^c \end{cases} \quad (51)$$

Пусть $F_0(x) \in L^2(0, 1)$ и

$$m\Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x)) > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8}, \quad (52)$$

причем

$$R_1 \subset \Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x)).$$

Определим по лемме 3, положив в ней $F(x) = F_0(x)$, $E = \Delta - R_1$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$, ступенчатую функцию $\psi(x)$ и множество $A_2 = \widetilde{E}$, для которых

$$|\psi(x) - F_0(x)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in A_2 \quad mA_2 > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (53)$$

$$m[\Delta(\psi(x) \neq 0) - E] < \frac{\varepsilon_1}{8} \quad m[E - \Delta(\psi(x) \neq 0)] < \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (54)$$

Возьмем n_2 таким, что

$$\tau_{n_2} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad \tau_{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{8} \quad \psi_{n_2}(x) = \psi(x), \quad N_{n_2} > N_{n_1} + m_{n_1}. \quad (55)$$

Тогда, положив в (28), (29), (30) и (32) $i+1 = n_2$ и учитывая (52), (53), (54), (50), (49), получим

$$\Phi_{n_2, j}(x) = 0 \quad x \in P_{n_2}, \quad j = 1, \dots, m_{n_2} \quad (56)$$

$$|\Phi_{n_2, m_{n_2}}(x) - g_2(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_2, \quad (57)$$

где $R_2 \equiv Q_{n_2} \cdot A_2 \cdot \Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x))$, и поэтому

$$mR_2 > 1 - \frac{3}{8} \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon_1 \quad (58)$$

$$P_{n_2} \subset R_1, \quad mP_{n_2} > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_1}{4} > 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1. \quad (59)$$

Теперь рассмотрим функции

$$g_2(x) \equiv g_2(x) - \Phi_{n_2, m_{n_2}}(x) \quad x \in [0, 1] \quad (60)$$

$$\Gamma_3(x) = \begin{cases} g_2(x) & x \in R_2 \\ 0 & x \in R_2^c \end{cases} \quad (61)$$

Из (57) и (61) следует

$$|\Gamma_3(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in [0, 1]. \quad (62)$$

Положим в лемме 3 $F(x) = \Gamma_3(x)$, $E = R_2$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$

и определим множество $A_3 \equiv \tilde{E}$ и ступенчатую функцию $\psi(x)$ так, что

$$|\psi(x) - \Gamma_3(x)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2 \quad x \in A_3, \quad mA_3 > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (63)$$

$$|\psi(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \text{ и, следовательно, } \|\psi\| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2. \quad (64)$$

Возьмем n_3 таким, что

$$\psi_{n_3}(x) \equiv \psi(x), \quad \eta_{n_3} = \frac{\varepsilon_1}{8}, \quad \gamma_{n_3} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2, \quad N_{n_3} > N_{n_2 + m_{n_2}}. \quad (65)$$

Тогда, положив в (29), (31) и (32) $l+1 = n_3$ и учитывая (63), (64), (65), (58), (61), получим

$$|\Phi_{n_3, j}(x)| \leq \frac{100}{\eta_{n_3}^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 < 25\sqrt{\varepsilon_1} \quad x \in R_2, \quad j = 1, \dots, m_{n_3} \quad (66)$$

$$|\Phi_{n_3, m_{n_3}}(x) - g_2(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2 \quad x \in R_2, \quad (67)$$

где

$$R_3 \equiv Q_{n_3} \cdot A_3 \cdot R_2, \quad mR_3 > 1 - \frac{5}{8} \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon_1. \quad (68)$$

Продолжим этот процесс до бесконечности, тогда получим последовательности $\{n_s\}$, $\{g_s(x)\}$ множеств $\{R_s\}$ такие, что

$$g_{s+1}(x) \equiv g_s(x) - \Phi_{n_s, m_{n_s}}(x), \quad (69)$$

$$\Phi_{n_{2s}, j}(x) \equiv 0 \quad x \in P_{n_{2s}}, \quad (70)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_{2s}} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$|\Phi_{n_{2s}, m_{n_{2s}}}(x) - g_{2s}(x)| < \left(\frac{\varepsilon_s}{8}\right)^2, \quad (71)$$

$$x \in R_{2s} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$mR_{2s} > 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_s > 1 - \varepsilon_s \quad mP_{n_{2s}} > 1 - \frac{\varepsilon_s - 1}{2} - \frac{\varepsilon_s}{8} > 1 - \varepsilon_s - 1 - \varepsilon_s, \quad (72)$$

$$s = 1, 2, \dots$$

$$|\Phi_{2s+1, j}(x)| < 25\sqrt{\varepsilon_s} \quad x \in R_{2s+1}, \quad (73)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_{2s+1}} \quad s = 0, 1, \dots$$

$$|\Phi_{2s+1, m_{n_{2s+1}}}(x) - g_{2s+1}(x)| < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{s+1}}{8}\right)^2 \quad x \in R_{2s+1} \quad (74)$$

$$s = 0, 1, \dots$$

$$mR_{2s+1} > 1 - \frac{5}{8}\varepsilon_s > 1 - \varepsilon_s \quad (75)$$

$$s = 0, 1, \dots$$

А теперь докажем, что ряд

$$s_m(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{l, m_{n_l}}(x), \quad (76)$$

который следует понимать в раскрытом виде по формуле (А), сходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и для него выберем настолько большое натуральное число i_0 , что

$$2 \sum_{j=i_0}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon, \quad (77)$$

и рассмотрим множество

$$R = \prod_{s=i_0+1}^{\infty} (P_{n_{2s}} R_{2s+1} R_{2s}), \quad (78)$$

Учитывая (72), (75), (77), находим, что

$$mR > 1 - \varepsilon, \quad (79)$$

Из (70), (71) и (78) следует, что

$$\Phi_{2i, j}(x) \equiv 0 \quad x \in R \quad i > i_0 + 1, \quad (80)$$

$$j = 1, 2, \dots, m_{n_{2i}}$$

$$|\Phi_{2i+1, m_{n_{2i+1}}}(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_i}{8}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{8}\right)^2 \quad x \in R \quad i \geq i_0 = 1, \quad (81)$$

т. е. ряд $\sum_{p=2(i_0+1)}^{\infty} |\Phi_{p, m_{n_p}}(x)|$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2 \left[\left(\frac{\varepsilon_i}{8}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{8}\right)^2 \right] \quad \text{для } x \in R.$$

Но из (73) следует

$$|\Phi_{2s+1, j}(x)| \leq 25\sqrt{\varepsilon_s} \quad x \in R, \quad (82)$$

$$j = 1, 2, \dots, m_{n_{2s+1}} \quad s = i_0 + 1, \dots$$

а из (80) и (82) следует

$$\left| S_{m_i}(x) + \sum_{l=1}^{v-1} \Phi_{l, m_{n_l}}(x) + \Phi_{v, j}(x) \right| \leq \begin{cases} \left| S_{m_i}(x) + \sum_{p=1}^{v-1} \Phi_{p, m_{n_p}}(x) \right| & v - \text{четное} \\ \left| S_{m_i}(x) + \sum_{p=1}^{v-1} \Phi_{p, m_{n_p}}(x) \right| + 25\sqrt{\frac{\varepsilon_{i+1}}{2}} & v - \text{нечетное} \end{cases}$$

Учитывая, что $\varepsilon_i \rightarrow 0$, получаем сходимость ряда (76) на множестве R , но из произвольности ε и (79) следует сходимость почти всюду на отрезке $[0, 1]$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и советы при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13.11.1959

Ռ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՉԱՓԵԼԻ ՀԱՆՐԱՅԻՆՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՅՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք $|\varphi_n(x)| \in L^2(0, 1)$ -ում լրիվ և օրթոնորմավորված ֆունկցիաների սիստեմ է, և

$$\varphi_n(x) = 0, \text{ երբ } x \notin \Delta_n$$

$$m\Delta_n \rightarrow 0,$$

որտեղ $\Delta_n \subset [0, 1]$ -ին պատկանող ինտերվալ է:

Այդ դեպքում տեղի ունի անպիսի $\varphi_{k_n}(x)$ տեղափոխություն, որ կամ

թիւն չափելի է $[0, 1]$ -ում համարյա ամենուրեք վերջավոր $f(x)$ ֆունկցիայի համար կարելի է նշել

$$\sum a_n \tilde{\varphi}_{k_n}(x) \text{ շարքը}$$

որը համարյա ամենուրեք $[0, 1]$ -ում դուրսագրւում է $f(x)$ -ին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Талалян А. А. Представление измеримых функций рядами. Успехи мат. наук, 15, № 5, 1960, 77—141.
2. Adriano M. Garsia, Existence of almost everywhere convergent rearrangements for Fourier series of L_2 functions, Annals of mathematics, vol 79, № 3, 1964, p. 623.