

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Э. А. АКОПЯН

СИНТЕЗ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА
 С ОГРАНИЧЕНИЕМ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ
 ДВИЖЕНИЯ ВЕДОМОГО ЗВЕНА

В практике часто встречаются задачи синтеза механизмов, в которых заданными условиями являются:

а) закон движения ведущего звена $\varphi = \varphi(t)$, где φ — входная координата механизма, t — время;

б) пределы изменения выходной координаты механизма $0 \leq \psi \leq \psi_m$;

в) время t_m перемещения ведомого звена от одного крайнего положения до другого;

г) модуль наибольшего значения скорости ведомого звена $\max \left| \frac{d\psi}{dt} \right| = V$ в интервале движения $0 \leq \psi \leq \psi_m$;

д) модуль наибольшего значения ускорения ведомого звена $\max \left| \frac{d^2\psi}{dt^2} \right| = W$ в том же интервале.

В общем случае, когда задана функция положения механизма в явном виде

$$\psi = F(\varphi, a, b, c, \dots), \quad (1)$$

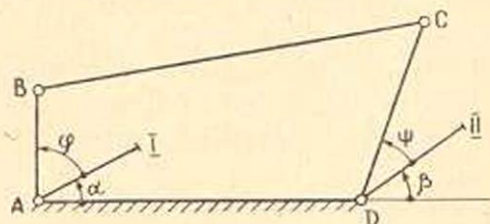
где $a, b, c, \dots$ — неизвестные параметры механизма, задача решается с помощью системы уравнений (2):

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & F[\varphi = \varphi(t=0), a, b, c, \dots] = 0, \\ (б) \quad & F[\varphi = \varphi(t=t_m), a, b, c, \dots] = \psi_m, \\ (в) \quad & \left| \frac{d}{dt} F[\varphi = \varphi(t=t_1), a, b, c, \dots] \right| = V, \\ (г) \quad & \left| \frac{d^2}{dt^2} F[\varphi = \varphi(t=t_2), a, b, c, \dots] \right| = W, \\ (д) \quad & \frac{d^2}{dt^2} F[\varphi = \varphi(t=t_1), a, b, c, \dots] = 0, \\ (е) \quad & \frac{d^3}{dt^3} F[\varphi = \varphi(t=t_2), a, b, c, \dots] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если в результате решения уравнений получится $t_1 > t_m$ или $t_2 > t_m$, то, согласно правилам определения наибольшего значения функций в заданном интервале, следует принимать $t_1 = t_m$, или $t_2 = t_m$. Аналогично, если получится $t_1 < 0$ или $t_2 < 0$, необходимо принимать $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$.

Таким образом, четыре параметра механизма можно определить по поставленным кинематическим условиям с помощью системы уравнений (2), а остальные параметры можно определить, исходя из дополнительных требований и конструктивных соображений.

Однако, данный способ решения нерационален, ибо функции положения механизмов в явном виде всегда сложны и неудобны для решения задач рассмотренным образом.



Фиг. 1.

Например, для одного из простейших механизмов—шарнирного четырехзвенника (фиг. 1), эта функция имеет следующий вид:

$$\psi + \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha) - \frac{1}{a}} \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \vartheta}{\frac{c}{b} - \sin \vartheta}, \quad (3)$$

где

$$\sin \vartheta = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 1}{2bc} + \frac{a}{bc} \cos(\varphi + \alpha), \quad a = \frac{l_{AB}}{l_{AD}}, \quad b = \frac{l_{BC}}{l_{AD}}, \quad c = \frac{l_{CD}}{l_{AD}}. \quad (3a)$$

Применять функцию положения в неявном виде, что довольно упрощает выражение взвешенной разности при приближенном синтезе механизмов с заданным законом движения ведомого звена, в данном случае нельзя, ибо в каждом уравнении, полученном таким путем, кроме неизвестных параметров и входной координаты, будет участвовать также выходная координата, закон изменения которой по условиям синтеза не задается. Следовательно, каждое уравнение, помимо неизвестных параметров, включает одно дополнительное неизвестное, и задача становится неразрешимой.

Решение таких задач можно свести к выбору закона движения ведомого звена, удовлетворяющего заданным условиям движения, а параметры механизма определить известными методами приближенного синтеза.

Такой метод широко применяется в синтезе кулачковых механизмов, и для подбора закона движения ведомого звена можно пользоваться таблицей законов, приводимой в [2].

Например, для линейного закона изменения ускорений ведомого звена имеем

$$\psi = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3, \quad (4)$$

где коэффициенты A_0 , A_1 , A_2 и A_3 определяются из системы уравнений (5)

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 t_m + A_2 t_m^2 + A_3 t_m^3 &= \psi_m, \\ A_1 + 2A_2 t_1 + 3A_3 t_1^2 &= V, \\ 2A_2 + 6A_3 t_1 &= 0, \\ 2A_2 &= W, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

из решения которой получаем

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= \frac{\psi_m}{t_m} - \frac{W}{2} t_m - 2A_3 t_m^2, \\ A_2 &= \frac{W}{2}, \\ A_3 &= \frac{1}{2t_m^2} \left[\psi_m - V t_m - \frac{W}{2} t_m^2 \pm \sqrt{\left(\psi_m - V t_m - \frac{W}{2} t_m^2 \right)^2 - \frac{W^2}{3} t_m^4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, решение задач синтеза механизмов с ограничением скоростей и ускорений ведомого звена сводится к выбору закона движения последнего, после чего можно определить параметры механизма известными методами приближенного синтеза.

Но в отдельных случаях такую задачу можно решить без подбора закона движения. Ниже приводится такое решение задачи синтеза шарнирного четырехзвенника, применяемого в приводе шлюзовых порот. В данном случае решение облегчается тем, что угол размаха коромысла $\psi_m = 90^\circ$, а крайние положения механизма совпадают с мертвыми положениями. Обеспечение последнего условия необходимо для предотвращения ударов при разгоне и остановке механизма. Такой механизм в крайних положениях приведен на фиг. 2.

Из треугольников AC_1D и AC_2D имеем

$$\cos \beta = \frac{(a+b)^2 - c^2 - 1}{2c}, \quad \sin \beta = -\cos(\psi_m + \beta) = \frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2c}, \quad (7)$$

$$\cos \alpha = \frac{(a+b)^2 - c^2 + 1}{2(a+b)}, \quad \sin \alpha = \frac{c \sin \beta}{(a+b)} = \frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2(a+b)}, \quad (8)$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{(a+b)^2 + c^2 - 1}{2c(a+b)}, \quad (9)$$

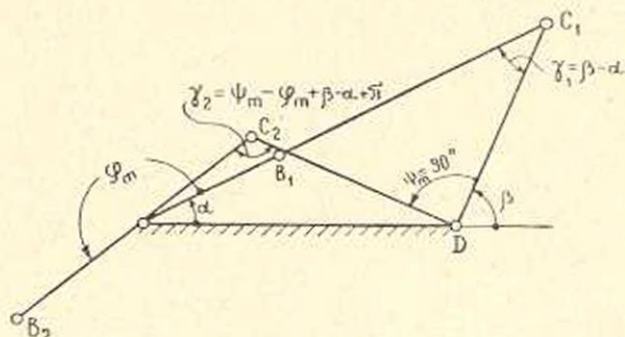
$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sin \beta}{a+b} = \frac{1+c^2-(b-a)^2}{2c(a+b)};$$

$$\cos(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha) = -\cos \gamma_2 = \frac{1-c^2-(b-a)^2}{2c(b-a)}, \quad (10)$$

$$\sin(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha) = -\sin \gamma_2 = \frac{1+c^2-(a+b)^2}{2c(b-a)};$$

$$\cos(\varphi_m + \alpha) = -\cos(\varphi_m + \alpha - \pi) = \frac{c^2 - 1 - (b-a)^2}{2(b-a)}, \quad (11)$$

$$\sin(\varphi_m + \alpha) = -\sin(\varphi_m + \alpha - \pi) = \frac{1+c^2-(a+b)^2}{2(b-a)}.$$



Фиг. 2.

Неявная функция положения механизма имеет следующий вид:

$$2ac \cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha) + 2a \cos(\varphi + \alpha) - \\ - 2c \cos(\psi + \beta) + b^2 - a^2 - c^2 - 1 = 0, \quad (12)$$

откуда

$$c [\sin(\psi + \beta) - a \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)] \frac{d\psi}{d\varphi} - a [\sin(\varphi + \alpha) - \\ - c \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)] = 0, \quad (13)$$

$$c [\sin(\psi + \beta) - a \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)] \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \\ + c [\cos(\psi + \beta) - a \cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha)] \left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 + \\ + 2ac \cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha) \frac{d\psi}{d\varphi} - a [\cos(\varphi + \alpha) + c \cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha)] = 0. \quad (14)$$

Условие обеспечения угла размаха $\psi_m = 90^\circ$ формулируется следующим образом:

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \left[\frac{(a+b)^2 - c^2 - 1}{2c} \right]^2 + \left[\frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2c} \right]^2 = 1. \quad (15)$$

Из практики проектирования механизмов известно, что максимальные ускорения ведомого звена, при колебательном движении последнего, возникают в положениях, близких к крайним. Исходя из этого, при первом приближении для рассматриваемого четырехзвенника можно принять

$$0 < \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=0} = \max \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{a}{c} \frac{\cos \alpha + c \cos (\beta - \alpha)}{\sin \beta - a \sin (\beta - \alpha)}; \quad (16)$$

$$0 > \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_m} = \min \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{a}{c} \frac{\cos (\varphi_m + \alpha) + c \cos (\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha)}{\sin (\psi_m + \beta) - a \sin (\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha)}, \quad (17)$$

что получается из (14) при $\frac{d\psi}{d\varphi} = 0$.

После подстановки значений соответствующих тригонометрических функций в (16) и (17) получим

$$\max \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{2a(a+b)^2}{b[1+c^2-(b-a)^2]} = \frac{a(a+b)}{bc \sin (\beta - \alpha)}, \quad (18)$$

$$\min \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = \frac{2a(b-a)^2}{b[1+c^2-(b+a)^2]} = \frac{-a(b-a)}{bc \sin \gamma_2}. \quad (19)$$

В качестве ограничивающей величины ускорений рассматривается выражение (18), так как явно удовлетворяется условие

$$\left| \max \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \right| > \left| \min \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} \right|, \quad (20)$$

то есть наибольшее по модулю ускорение возникает в дальнем от кривошипа мертвом положении.

На основании вышесказанного, второе уравнение для определения параметров механизма будет иметь следующий вид

$$\frac{2a(a+b)}{b[1+c^2-(b-a)^2]} = W_m = \frac{W}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}, \quad (21)$$

где W — предельно допустимое значение ускорений.

Чтобы составить третье уравнение, ограничивающее максимальную скорость коромысла при его перемещении с одного мертвого положения в другое, необходимо иметь точное или достаточно точное выражение для нее. Точное выражение максимальной скорости очень сложно и неудобно для включения в систему уравнений. Поэтому предпочитаем следующий путь решения задачи.

Рассмотрим мгновенный центр вращения P шатуна BC (см. фиг. 3).

Введем следующие обозначения

$$l_{BP} = r_1, \quad l_{CP} = r_2. \quad (22)$$

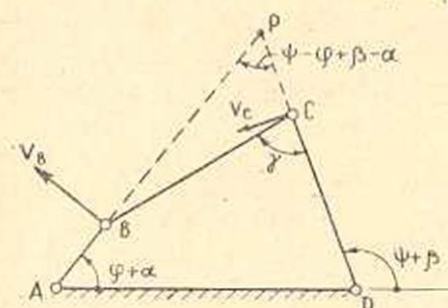
Величина угловой скорости коромысла CD определяется следующей формулой:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v_c}{c \cdot l_{AD}} = \frac{a}{c} \frac{d\varphi}{dt} \frac{r_2}{r_1}, \quad (23)$$

где t — время.

После исключения параметра t получим

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{a}{c} \frac{r_2}{r_1}. \quad (24)$$



Фиг. 3.

Из формулы (24) видно, что $\frac{d\psi}{d\varphi}$ возрастает пропорционально $\frac{r_2}{r_1}$. Это отношение равняется нулю в крайних положениях механизма, когда точка P совпадает с точкой C , а где-то в середине интервала движения достигает своего максимального значения. Разумеется, при этом же соотношении $\left(\max \frac{r_2}{r_1}\right)$ скорость $\frac{d\psi}{dt}$ (или $\frac{d\psi}{d\varphi}$) достигает своего максимума. Из (13) и (24) получаем

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin(\varphi + \alpha) - c \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)}{\sin(\psi + \beta) - a \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)}. \quad (25)$$

Для приближенного определения величины $\max \frac{r_2}{r_1}$ можно пользоваться формулой Лагранжа, которая для функции $f(x)$ имеет следующий вид

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (26)$$

Принимая во внимание, что существует предел

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2} \quad (27)$$

или же

$$\lim_{b \rightarrow a} \xi = \frac{a + b}{2}, \quad (28)$$

для небольших интервалов $b - a$ можно написать

$$f'\left(\frac{a + b}{2}\right) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (29)$$

Точность вычислений по формуле (29) повышается с уменьшением разности $b - a$.

В частности, когда значения функции на концах интервала совпадают, то есть когда существует равенство

$$f(b) = f(a), \quad (30)$$

получим следующее уравнение

$$f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \approx 0. \quad (31)$$

Если в качестве функции $f(x)$ рассмотреть соотношение $\frac{r_2}{r_1}$, а в качестве аргумента x — независимую переменную φ , с учетом того, что угол ψ зависит от φ , при $f(\varphi_1) = f(\varphi_2)$ получим

$$f' \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \approx 0, \quad (32)$$

то есть величина угла φ , при которой функция $f(\varphi) = \frac{r_2}{r_1}$ достигает своего экстремального значения, определяется по формуле

$$\varphi_{\text{extr}} \approx \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad (33)$$

если обеспечивается дополнительное условие (30).

При самом грубом приближении можно принять

$$\varphi_{\text{extr}} = \frac{0 + \varphi_m}{2} = \frac{\varphi_m}{2}, \quad (34)$$

так как в мертвых положениях имеем следующее равенство

$$f(\varphi_1 = 0) = f(\varphi_2 = \varphi_m) = 0. \quad (35)$$

Но обычно интервал $0 \div \varphi_m$ бывает достаточно широкий. Для повышения точности синтеза необходимо подобрать возможно узкий интервал. Для этой цели рассмотрим положения механизма, при которых $\frac{r_2}{r_1} = 1$.

Из фиг. 3 видно, что при перемещении с одного мертвого положения в другое такое равенство осуществляется дважды, а именно в следующих положениях:

$$1) \quad \psi_1 + \beta = \varphi_1 + \alpha, \quad r_2 = r_1 = \infty, \quad \frac{r_2}{r_1} = 1,$$

$$2) \quad \psi_2 + \beta = \varphi_2 + \alpha + 2\gamma_0 - \pi, \quad r_2 = r_1 = \frac{b}{2|\cos \gamma_0|}, \quad \frac{r_2}{r_1} = 1.$$

О ширине интервала можно судить, исходя из следующих уравнений:

$$2ac + 2a \cos(\varphi_1 + \alpha) - 2c \cos(\varphi_1 + \alpha) + b^2 - a^2 - c^2 - 1 = 0, \quad (36)$$

$$-2ac \cos 2\gamma_0 + 2a \cos(\varphi_2 + \alpha) + 2c \cos(\varphi_2 + \alpha + 2\gamma_0) + b^2 - a^2 - c^2 - 1 = 0, \quad (3)$$

которые получаются после подстановки значений углов ψ_1 и ψ_2 в (1). Из этих уравнений получается следующее:

$$a [\cos(\varphi_2 + \alpha) - \cos(\varphi_1 + \alpha)] + c [\cos(\varphi_2 + \alpha + 2\gamma_0) + \cos(\varphi_1 + \alpha)] = 2ac \cos^2 \gamma_0. \quad (3)$$

С учетом дополнительных требований, предъявляемых к синтезу механизмов, согласно которым угол передачи γ в течение рабочего промежутка, а в частности в области высоких скоростей, не должен сильно отличаться от $\frac{\pi}{2}$, можно принять

$$\cos(\varphi_2 + \alpha + 2\gamma_0) \approx -\cos(\varphi_2 + \alpha), \quad (3)$$

после чего из (38) получим

$$\cos(\varphi_2 + \alpha) - \cos(\varphi_1 + \alpha) \approx \frac{2ac \cos^2 \gamma_0}{a - c}. \quad (4)$$

При обеспечении больших углов передач полученная разность косинусов незначительна, следовательно, разность углов $\varphi_2 - \varphi_1$ малая и ею можно пренебречь при первом приближении. С учетом вышесказанного из (33) получим

$$\varphi_{\text{extr}} \approx \varphi_1. \quad (4)$$

Следовательно, после подстановки в формулу (25) значений $\psi = \varphi = \varphi_1$ находим

$$\max \frac{r_2}{r_1} = 1. \quad (4)$$

С учетом только что полученного выражения можно написать

$$\frac{V}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} = V_m = \frac{a}{c}, \quad (4)$$

где V_m — заданная величина максимального передаточного отношения

$$\max \frac{d\psi}{d\varphi} = \max \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega \right)^{-1}.$$

Таким образом, на основе формул (15), (21) и (43) получаем систему из трех уравнений (44) с неизвестными a , b и c :

$$\left. \begin{aligned} b^4 - 2(1 + c^2 - 3a^2)b^2 + (c^2 - a^2)^2 - 2a^2 + 1 &= 0, \\ b^3 + 2 \frac{1 - W_m}{W_m} ab^2 + \left[\frac{4a^2}{W_m} + a^2 - c^2 - 1 \right] b + \frac{2a^3}{W_m} &= 0, \\ a - V_m c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Необходимо отметить, что для такого большого угла размаха, как $\psi_m = 90^\circ$, целесообразно иметь центральный механизм, где $\varphi_m = \pi$, так как только в таком случае обеспечивается условие (45)

$$\tau_1 = \tau_2 = 45^\circ, \quad (45)$$

в остальных случаях один из этих углов получается меньше 45° , что крайне нежелательно, ибо максимальные нагрузки, связанные с силами инерции, возникают именно в крайних положениях. Но для центральных механизмов существует следующее соотношение:

$$\sin \frac{\psi_m}{2} = \frac{a}{c}, \quad (46)$$

с учетом которого можно сказать, что наивыгоднейшее значение для V_m при $\psi_m = 90^\circ$ должно быть

$$V_m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (47)$$

После подстановки этого значения в систему (44) и исключения неизвестных a и b получаем следующее уравнение:

$$(W_m^2 - 2W_m + 2)c^4 - (3W_m^2 - 6W_m + 4)c^2 + 2(W_m^2 - 2W_m + 1) = 0, \quad (48)$$

решая которое находим

$$c = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{(W_m - 1)^2}}}. \quad (49)$$

После определения параметра c остальные параметры определяются по формулам (50)

$$b = \sqrt{1 - 0,5c^2}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad (50)$$

которые получаются из системы (44).

Итак, единственным свободным параметром остается величина W_m . Варьируя этой величиной в рекомендуемых пределах можно получить разные механизмы.

Следует отметить, что величина W_m должна находиться в пределах $1 < W_m < 2$, что следует из формулы (21). При подстановке в эту формулу $c = 1$, $a = b = c \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть когда шарнир A совпадает с точкой C_2 , получаем $W_m = 2$, а при подстановке $b = 1$, $a = 0$, $c = 0$, то есть когда шарнир A находится на продолжении прямой C_1C_2 в бесконечности, получаем $W_m = 1$.

Из вышеизложенного следует, что в пределах возможностей можно подобрать такие механизмы, в которых обеспечивается наибольшее расстояние между шарнирами A и D при одинаковой длине

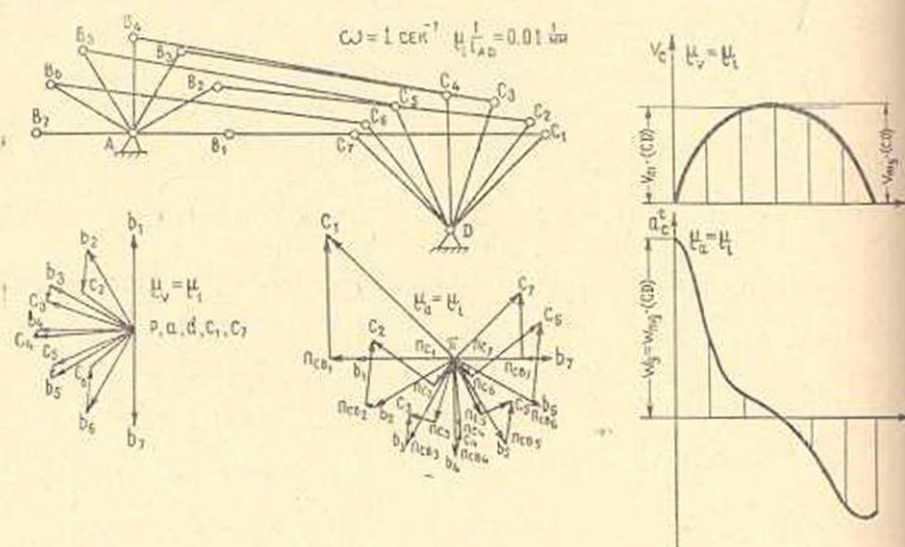
коромысла CD , чем гарантируется возможно малая величина максимального ускорения ведомого звена.

На примере проверим правильность наших предложений и полученных формул.

Пусть задано $W_m = 1, 3$. Соответствующий этому значению механизм будет иметь следующие параметры:

$$a = 0,2882, \quad b = 0,9578, \quad c = 0,4064.$$

На фиг. 4 приведены такой механизм, планы и графики скоростей и ускорений.



Фиг. 4.

В пределах точности графических построений получается $V_{m\lambda} = 1,028 V_m$, $W_{m\lambda} = W_m$, где $V_{m\lambda}$ и $W_{m\lambda}$ — соответственно действительные значения максимальной скорости и ускорения. Отклонения от заданных величин в процентах получаются

$$\delta_V = \frac{V_{m\lambda} - V_m}{V_m} \cdot 100\% = 2,8\%, \quad \delta_W = \frac{W_{m\lambda} - W_m}{W_m} \cdot 100\% = 0.$$

Московский научно-исследовательский институт машиноведения

Поступила 15.X.1964

Է. Ա. ՀԱԿՈՅԱՆ

ՀԱՅԿԱՊԱՅԻՆ ՔԱՌՈՂԱԿԻ ՄԻՆԹԵԶԸ ՏԱՐՎՈՂ ՕՂԱԿԻ ՇԱՐՖՄԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՅՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՈՎ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում դիտարկվում է հոդակապակին քառոդակի սինթեզի խնդիրը՝ նման խնդիրների լուծումը մեխանիզմի շարժման բացահայտ ֆունկցիայի միջոցով անհնար է, քանի որ վերահիշյալ բացահայտ ֆունկցիան ի-

հում է բարդ և ստացվող համապատասխանը լուծել հնարավոր է: Խնդրի լուծումը մեխանիզմի շարժման անբացահայտ ֆունկցիայի միջոցով հանգում է համապատասխան շարժման օրենքի ընտրության: Բայց որոշ դեպքերում խնդիրը հնարավոր է լուծել առանց շարժման օրենքի ընտրության: Հոդվածում տրվում է նման խնդրի մոտավոր լուծում: Դուրս են բերված բանաձևեր, որոնց միջոցով կարելի է հաշվել սահանաղանների շարժարների մեջ կիրառվող քառահոդակապ մեխանիզմի պարամետրերը: Ելնելով մեծագույն արագության և արագացման բացարձակ արժեքներից: Լուծված է թվային օրինակ: Պահանջվող մեծագույն արագության և արագացման շեղումները տրված մեծությունների նկատմամբ համապատասխանաբար կլինեն

$$\delta_v = 2,8\%; \quad \delta_a = 0\%;$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. Левитский Н. И. Кулачковые механизмы. Издательство „Машиностроение“, М., 1964.