

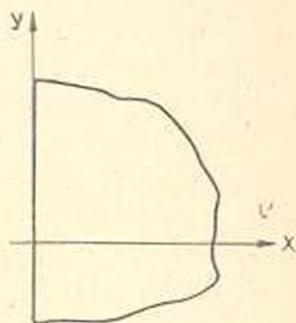
А. А. ХАЧАТРЯН

ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ  
 НАГРУЗКОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КРАЮ

Рассмотрим полубесконечную пластинку толщины  $h$  ( $x \geq 0$ ,  
 фиг. 1).

Пусть пластинка изгибается под действием изгибающего и кру-  
 тящего моментов и перерезывающей силы, приложенных по краю  
 $x=0$ .

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 \sin \frac{\pi y}{\lambda}, \\ H &= H_0 \cos \frac{\pi y}{\lambda}, \\ N_1 &= P_0 \sin \frac{\pi y}{\lambda}, \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1.

где  $M_0$ ,  $H_0$  и  $P_0$  — постоянные,  $\lambda$  — полупе-  
 риод изменения приложенных по краю пла-  
 стинки нагрузок, причем будем принимать, что  $\lambda$  достаточно больше  
 толщины пластинки  $h$ .

Предположим, что пластинка изготовлена из трансверсально изо-  
 тропного материала, плоскость изотропии которого параллельна сре-  
 динной плоскости пластинки.

Будем исходить из уравнений изгиба пластинки, учитывающих  
 влияние поперечных сдвигов [1].

В данном случае для трансверсально изотропного материала при  
 отсутствии внешней поверхностной нагрузки систему дифферен-  
 циальных уравнений задачи можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2(1-\mu)}{20 G'} \Delta \varphi + \frac{1-\mu^2}{E} \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2(1-\mu)}{20 G'} \Delta \psi + \frac{1-\mu^2}{E} \psi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются тогда через искомые функции  $w$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  следующим образом:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2(1-\mu)}{10G'} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \\ M_2 &= -D \left[ \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2(1-\mu)}{10G'} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right], \\ H &= -D \left[ (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right], \\ N_1 &= \frac{h^3}{12} \varphi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$E$ ,  $\mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии,  $G'$  — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к срединной плоскости пластинки.

Решение системы (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= W(x) \sin \frac{\pi y}{\lambda}, \\ \varphi(x, y) &= \Phi(x) \sin \frac{\pi y}{\lambda}, \\ \psi(x, y) &= \Psi(x) \cos \frac{\pi y}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $W(x)$ ,  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ :

$$\Phi' - \frac{\pi}{\lambda} \Psi = 0,$$

$$W''' - \frac{\pi^2}{\lambda^2} W' - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'} \Phi'' + \frac{1-\mu^2}{E} \left[ 1 + \frac{\pi^2 E h^2}{20(1+\mu)G'\lambda^2} \right] \Phi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{\lambda} W'' - \frac{\pi^3}{\lambda^3} W - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'} \Psi'' + \frac{1-\mu^2}{E} \left[ 1 + \frac{\pi^2 E h^2}{20(1+\mu)G'\lambda^2} \right] \Psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W(x) &= (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + (C_3 + C_4 x) e^{\frac{\pi x}{\lambda}}, \\ \Phi(x) &= -\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} \left( C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + C_4 e^{\frac{\pi x}{\lambda}} \right) + C_5 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + C_6 e^{\frac{\pi x}{\lambda}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Psi(x) = \frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} \left( C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} - C_4 e^{\frac{\pi x}{\lambda}} \right) - \omega \left( C_5 e^{-\frac{\pi \omega}{\lambda} x} - C_6 e^{\frac{\pi \omega}{\lambda} x} \right),$$

где

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{20(1+\mu)G'\lambda^2}{\pi^2 E h^2}}. \quad (8)$$

Здесь  $C_1, C_2, \dots, C_6$  — постоянные интегрирования, которые должны определяться из граничных условий задачи.

Как известно, все расчетные величины выражаются через  $\omega, \varphi$  и  $\psi$ , и они, а следовательно и  $\omega, \varphi, \psi$ , по мере удаления от края  $x=0$  должны стремиться к нулю. Поэтому следует положить

$$C_3 = C_4 = C_6 = 0. \quad (9)$$

В силу (9), (7) и (5) окончательно будем иметь

$$w(x, y) = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda},$$

$$\varphi(x, y) = \left[ -\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + C_5 e^{-\frac{\pi \omega}{\lambda} x} \right] \sin \frac{\pi y}{\lambda}, \quad (10)$$

$$\psi(x, y) = \left[ \frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} - \omega C_5 e^{-\frac{\pi \omega}{\lambda} x} \right] \cos \frac{\pi y}{\lambda}.$$

Подставляя (10) в (3), получим значения моментов и перерезывающих сил, выраженные через неизвестные пока постоянные  $C_1, C_2$  и  $C_5$ . Эти постоянные определяются из условий (1), которые в силу (10) и (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} (1-\mu) C_1 - \left[ 2 + \frac{\pi^2 E h^2}{5(1+\mu)G'\lambda^2} \right] C_2 + \frac{h^2(1-\mu)\omega}{10G'} C_5 &= -\frac{M_0 \lambda}{\pi D}, \\ \frac{\pi}{\lambda} C_1 - \left[ 1 + \frac{\pi^2 E h^2}{5(1-\mu^2)G'\lambda^2} \right] C_2 + \left[ \frac{h^2}{10G'} + \frac{(1+\mu)\lambda^2}{\pi^2 E} \right] C_5 &= \frac{H_0 \lambda}{\pi D(1-\mu)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$-\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} C_2 + C_5 = \frac{12}{h^3} P_0.$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Поэтому отсюда можно получить вполне определенные значения для постоянных  $C_1, C_2$  и  $C_5$ , тем самым могут быть определены все необходимые расчетные величины задачи.

Для более детального изучения влияния поперечных сдвигов на деформированное состояние пластинки, рассмотрим случай, когда у края  $x=0$  действует только изгибающий момент, то есть когда

$$P_0 = H_0 = 0. \quad (12)$$

В силу (12) из системы (11) получим

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{M_0 \lambda^2}{\pi^2 D} \frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega - (1-\mu)}, \\
 C_2 &= \frac{M_0 \lambda}{\pi D} \frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega - (1-\mu)}, \\
 C_3 &= \frac{24\pi M_0}{h^3 \lambda} \frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega - (1-\mu)}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда для прогиба  $w(x, y)$  будем иметь

$$w(x, y) = w^0(x, y) \left[ 1 - \frac{4}{3+\mu} \frac{t}{t + \sqrt{1+t^2}} \right]^{-1}, \tag{14}$$

где  $w^0(x, y)$  представляет собой прогиб пластинки при решении рассмотренной задачи по классической теории пластинок

$$w^0(x, y) = - \frac{M_0 \lambda^2}{\pi^3 (3+\mu) D} \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{\pi}{\lambda} x \right) e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda},$$

$t$  — некоторая „приведенная толщина“, определяемая формулой

$$t = \frac{\pi h}{2\lambda} \sqrt{\frac{E}{5(1+\mu)G'}}. \tag{15}$$

Легко заметить, что  $t=0$  соответствует случаю классической теории пластинок.

Отметим, что при любом положительном значении  $t$  имеет место следующее неравенство

$$0 \leq \frac{t}{t + \sqrt{1+t^2}} < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

На основании этого из (16) мы приходим к следующему неравенству для отношения  $w(x, y)/w^0(x, y)$ :

$$1 \leq \frac{w(x, y)}{w^0(x, y)} < \frac{3+\mu}{1+\mu}. \tag{17}$$

Отсюда видно, что отношение  $w/w^0$  есть ограниченная функция аргумента  $t$ . Для каждого конкретного значения  $t$  можно определить это отношение и тем самым выяснить количественную сторону влияния поперечных сдвигов.

Рассматривая формулу (16), замечаем, что при

$$x = x_0 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\lambda}{\pi} \tag{18}$$

$w$  и  $w^0$  обращаются в нуль. Это значение  $x_0$  характеризует границу изменения знака прогиба. Как видно из (18), в рассматриваемой здесь частной задаче действия только изгибающего момента поперечные сдвиги не влияют на значение  $x_0$ .

Разложим теперь в ряд Маклорена правую часть выражения (14). Предполагая, что  $t$  настолько мало, что в этом разложении по сравнению с единицей можно пренебречь членами, содержащими  $t^3$  (и степени выше трех), будем иметь

$$\omega = \omega^0 \left[ 1 + \frac{4}{3+\mu} t + \frac{4(1-\mu)}{(3+\mu)^2} t^2 \right]. \quad (19)$$

Интересно отметить, что в выражении (19) содержится  $t$  в первой степени. А как известно [1], в решенных до сих пор задачах об изгибе пластинок (с учетом поперечных сдвигов) поправка к классической теории выражалась членом, содержащим  $t^2$ .

Рассмотрим еще один частный случай, когда по краю  $x=0$  действует только перерезывающая сила, то есть когда

$$M_0 = H_0 = 0. \quad (20)$$

В силу (20), из системы (11) получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2P_0\lambda^2}{\pi^2(1-\mu)D} \frac{(2t^2+1)^2 - \omega t^2(4t^2+1-\mu)}{(3+\mu) - 4t^2(\omega-1)}, \\ C_2 &= -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2 D} \frac{1 - 2t^2(\omega-1)}{(3+\mu) - 4t^2(\omega-1)}, \\ C_3 &= \frac{12P_0}{h^3} \frac{1+\mu}{(3+\mu) - 4t^2(\omega-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

На основании этого из (10) для прогиба  $w(x, y)$  будем иметь

$$\begin{aligned} w = -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2 D} & \left\{ \frac{2\lambda}{\pi(1-\mu)} \left| (2t^2+1)^2 - t(4t^2+1-\mu)\sqrt{t^2+1} \right| + \right. \\ & \left. e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda} + (\sqrt{t^2+1} - t)^2 x \right\} \frac{1}{(3+\mu) - 4t(\sqrt{t^2+1} - t)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая здесь  $t=0$ , получим соответствующее выражение для прогиба  $\omega^0$ , вычисленного по классической теории пластинок

$$\omega^0 = -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2(3+\mu)D} \left[ \frac{2\lambda}{\pi(1-\mu)} + x \right] e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda}. \quad (23)$$

Нетрудно показать, что при любом действительном значении  $t$

$$(2t^2+1)^2 - t(4t^2+1-\mu)\sqrt{t^2+1} > 0.$$

Следовательно, прогиб, определяемый формулой (22), как и соответствующий прогиб, найденный по классической теории (23), в отличие от предыдущей задачи, не меняет своего знака вдоль оси  $x$ .

Здесь существенное отличие от предыдущей задачи заключается в том, что выражение (22) уже не является ограниченной функцией

аргумента  $t$ . Поэтому естественно считать, что полученные здесь формулы дадут хорошие результаты при ограниченных значениях  $t$ . В связи с этим отметим, что для реально существующих конструкций, как правило,  $t < 1$ .

Из полученных выше результатов нетрудно заметить, что по прямым линиям  $y = \pm m\lambda$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) обращаются в нуль прогиб  $w$ , изгибающий момент  $M_x$  и функция  $\varphi$ . А как известно [1], точно такие граничные условия на краю  $y = \text{const}$  налагаются при шарнирном опирании края. Отсюда следует, что если рассмотреть бесконечную полосу-пластинку, ограниченную прямыми, скажем,  $x=0$ ,  $y=0$  и  $y=b=n\lambda$  ( $n$  — натуральное число), нагруженную по краю  $x=0$  силами (1) и шарнирно опертую по длинным сторонам, то решение этой задачи получим из рассмотренной выше задачи при соответствующей замене  $\lambda = b/n$  в полученных выше формулах.

Рассмотрим теперь изгиб бесконечной полосы-пластинки шириной  $b$ , находящейся под действием равномерно распределенных по краю  $x=0$  изгибающего момента и перерезывающей силы интенсивностями  $M$  и  $P$ . Пусть пластинка шарнирно оперта по сторонам  $y=0$  и  $y=b$ . Граничные условия на краю  $x=0$  будут

$$\begin{aligned} M_1 = M &= \frac{4M}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ H &= 0, \\ N_1 = P &= \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \psi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (25)$$

удовлетворяющем условиям шарнирного опирания по краям  $y=0$  и  $y=b$ .

Подставляя (25) в (2), для каждого индекса  $n$  получим систему уравнений относительно  $W_n(x)$ ,  $\Phi_n(x)$  и  $\Psi_n(x)$ , аналогичную системе (6). Решая полученные системы и учитывая, что пластинка бесконечно длинная по направлению  $x$ , а также пользуясь (25), окончательно будем иметь

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n1} + C_{n2}x) e^{-\frac{\pi n}{b}x} \sin \frac{n\pi}{b}y,$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2\pi^2 E n^2}{(1-\mu^2)b^2} C_{n2} e^{-\frac{\pi n}{b}x} + C_{n3} e^{-\frac{\pi n \omega_n}{b}x} \right] \sin \frac{n\pi}{b}y, \quad (26)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\pi^2 E n^2}{(1-\mu^2)b^2} C_{n2} e^{-\frac{\pi n}{b}x} - \omega_n C_{n3} e^{-\frac{\pi n \omega_n}{b}x} \right] \cos \frac{n\pi}{b}y,$$

где

$$\omega_n = \sqrt{1 + \frac{20(1+\mu)G'b^2}{\pi^2 E h n^2}}. \quad (27)$$

Постоянные  $C_{n1}$ ,  $C_{n2}$  и  $C_{n3}$  определяются из граничных условий (24). Нетрудно заметить, что эти постоянные при четных значениях  $n$  обращаются в нуль. А при нечетных значениях  $n$  для определения этих постоянных получаются следующие уравнения:

$$\frac{n\pi}{b}(1-\mu)C_{n1} - 2(1+2n^2t_0^2)C_{n2} + \frac{h^2(1-\mu)\omega_n}{10G'}C_{n3} = -\frac{4Mb}{\pi^2 n^2 D},$$

$$\frac{n\pi}{b}(1-\mu)C_{n1} - (1-\mu+4n^2t_0^2)C_{n2} + \frac{(1-\mu^2)b^2}{\pi^2 n^2 E}(1+2n^2t_0^2)C_{n3} = 0, \quad (28)$$

$$C_{n2} - \frac{(1-\mu^2)b^2}{2\pi^2 n^2 E} C_{n3} = -\frac{24(1-\mu^2)b^2 P}{\pi^2 n^2 h^2 E}.$$

где

$$t_0 = \frac{1}{n\sqrt{\omega_n^2-1}} = \frac{\pi h}{2b} \sqrt{\frac{E}{5(1+\mu)G'}}. \quad (29)$$

Рассмотрим действие только изгибающего момента  $M$ . Для этого, принимая  $P=0$  и решая систему (28), получим

$$C_{n1} = -\frac{4(1+\mu)Mb^2}{\pi^2(1-\mu)n^2D} \left[ 3+\mu - \frac{4nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}} \right]^{-1},$$

$$C_{n2} = \frac{4Mb}{\pi^2 n^2 D} \left[ 3+\mu - \frac{4nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}} \right]^{-1}, \quad (30)$$

$$C_{n3} = \frac{96M}{h^2 b} \left[ 3+\mu - \frac{4nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}} \right]^{-1}.$$

Тогда для прогиба  $w(x, y)$  будем иметь

$$w(x, y) = -\frac{4Mb^2}{\pi^2(3+\mu)D} \times$$

$$\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1+\mu}{(1-\mu)n^3} - \frac{\pi x}{bn^2} \right] \frac{e^{-\frac{\pi x}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}}{1 - \frac{4}{3+\mu} \frac{nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}}} \quad (31)$$

Полагая здесь  $t=0$ , получим соответствующее выражение для прогиба  $w^0(x, y)$ , вычисленное по классической теории пластинки

$$w^0(x, y) = -\frac{4Mb^2}{\pi^3(3+\mu)D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1+\mu}{(1-\mu)n^3} - \frac{\pi x}{bn^2} \right] e^{-\frac{\pi x}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (32)$$

Из физической сущности задачи очевидно, что с увеличением  $t_0$  прогиб  $w(x, y)$  монотонно будет возрастать. Учитывая это и, кроме того, принимая во внимание неравенство (16), можно установить, что в этом случае также имеет место неравенство (17).

Приведем выражение для величины максимального прогиба имеющего место при  $x=0$  и  $y=b/2$

$$w_{\max} = \frac{4(1+\mu)Mb^2}{\pi^3(1-\mu)(3+\mu)D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \left[ 1 - \frac{4}{3+\mu} \frac{nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}} \right]^{-1} \quad (33)$$

Для каждого конкретного значения  $t_0$  (29) и  $\mu$  можно с любой точностью вычислить сумму ряда, входящего в выражение (33).

Величина же максимального прогиба, соответствующая результатам классической теории ( $t_0=0$ ), будет

$$w_{\max}^0 = \frac{(1+\mu)Mb^2}{8(1-\mu)(3+\mu)D}$$

то есть в этом случае полученный ряд суммируется.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 1971

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԿՈՍՄԱՆԴԱԿԵՐՔ ԱՍԻՍ ԾՌՈՒԹՆ ԵՋՐՈՒՄ ԿԻՐԱՅՎԱԾ ՈՒԺԵՐԻ  
ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ն Ա

Հոդվածում դիտարկված է արանսվերսայ իզոտրոպ նյութից պատրաստված կիրառանվերջ սալի ծաման խնդիրը, երբ սալի եզրում կիրառված արտաքին ուժերը տրված են (1) օրենքով: Խնդիրը լուծված է Ս. Ա. Հաճախյանի կողմից:

ևամանի առաջադրած աեսութիւնն հիման վրա [1], որտեղ հաշվի է առնուած լաթական սահքերի ազդեցութիւնը: Դիտարկված են որոշ մասնավոր դեպքեր, որտեղ ստացված են բանաձևեր սալի նկվածքների համար:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.