

И. О. ХАЧАТРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В настоящей статье приводится интегральное представление мероморфных в полуплоскости функций с произвольно быстро растущей характеристикой. Оно является обобщением одного результата Р. Неванлинна [1] о представлении мероморфных в полуплоскости функций, характеристика которых имеет степенной рост. В представлении Р. Неванлинна в качестве ядра фигурирует видоизмененное ядро Пуассона

$$k_p(t; z) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \frac{z}{t^2} - \dots - \frac{z^n}{t^{n+1}} \right]. \quad (N)$$

В приводимом представлении в качестве ядра берется ядро $k(t; z)$, которое определяется следующим образом (см. также [2]):

$$k(t; z) = k_{p_n}(t; z) \quad \text{при} \quad n-1 < |t| < n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где числа p_n ($p_1 = 0$) выбираются для всего класса мероморфных в замкнутой верхней полуплоскости функций, характеристики которых мажорируются данной функцией $q(r)$.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ с нулями a_n и полюсами b_v . Введем следующие обозначения Р. Неванлинна:

$$A(r, f) = \frac{1}{\pi} \int_1^r (\ln^+ |f(t)| + \ln^+ |f(-t)|) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dt,$$

$$B(r, f) = \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi,$$

$$C(r, f) = 2 \sum_{1 < |b_v| < r} \left(\frac{1}{|b_v|} - \frac{|b_v|}{r^2} \right) \sin \beta_v, \quad a_n = |a_n| e^{i\alpha_n}, \quad b_v = |b_v| e^{i\beta_v}.$$

$$a(re^{i\theta}; z) = \int_1^r \ln^+ \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| \frac{dt}{t}.$$

$c(re^{i\varphi}; z) = \sum_{1 \leq r_v < r} \sin \varphi_v(z)$, где $r_v e^{i\varphi_v(z)}$ — z -точки функции $f(z)$

$$A(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_1^r \left(\ln^+ \left| \frac{1}{f(t) - z} \right| + \ln^+ \left| \frac{1}{f(-t) - z} \right| \right) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dt.$$

Аналогично определяются $B(r, z)$ и $C(r, z)$.

Функцию $S(r, f) = S(r) = A(r, f) + B(r, f) + C(r, f)$ называют фундаментальной величиной или неванлиннской характеристикой функции $f(z)$.

Характеристика $S(r, f)$ — возрастающая функция от r и

$$S(r, f) = S\left(r, \frac{zf + \beta}{\gamma f + \delta}\right) + O(1), \text{ если } \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Теорема (Р. Неванлинна). Если характеристика $S(r)$ ограничена, то имеет место следующее представление

$$\begin{aligned} \ln |f(re^{i\varphi})| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(t)| \frac{r \sin \varphi dt}{r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi} + \frac{2\eta}{\pi} r \sin \varphi - \\ &- \sum \ln \left| \frac{re^{i\varphi} - a_v}{re^{i\varphi} - a_v} \right| + \sum \ln \left| \frac{re^{i\varphi} - b_v}{re^{i\varphi} - b_v} \right|, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^{\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi.$$

Теорема (Р. Неванлинна). Если интеграл $\int_1^{\infty} S(r) r^{-q-1} dr$ сходится для некоторого целого положительного q , то

$$\begin{aligned} \ln |f(z)| &= \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |f(t)| \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{1}{\pi} \int_{|t|>1} \ln |f(t)| k_q(t; z) dt + \\ &+ \sum \ln |D_q(z; a_v)| - \sum \ln |D_q(z; b_v)| + \sum_{k=1}^q a_k r^k \sin k\varphi, \end{aligned}$$

где

$$D_q(z; a) = E\left(\frac{z}{a}; q\right) E^{-1}\left(\frac{z}{a}; q\right), \quad (2)$$

$E(u, q) = (1-u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^q}{q}\right)$ — первичный множитель Вейерштрасса, коэффициенты a_k — вещественны.

Пусть теперь $q(x)$ — произвольная монотонно возрастающая на $(0, \infty)$ функция. Рассмотрим класс A_q мероморфных в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функций $f(z)$, характеристики которых удовлетворяют условиям

$$S(r, f) \leq d_f q(r), \quad \int_0^\infty S(r, f) q^{-1}(r) dr < \infty,$$

где d_f — константа, зависящая от функции $f(z)$.

Теорема. Любая функция класса A_q представляется в виде

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln |f(t)| k(t; z) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |a_n| < n} \ln |D_{p_n}(z; a_n)| - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |b_n| < n} \ln |D_{p_n}(z; b_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (3)$$

где ядро $k(t; z)$ определяется соотношениями (1), при этом

$$p_1 = 0, \quad p_n = [\ln q(n+1)], \quad n \geq 2, \quad (4)$$

а коэффициенты a_n вещественны.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, мы приведем 3 леммы, доказательства которых не отличаются от доказательств аналогичных лемм, приведенных в работе Р. Неванлинна [1].

Лемма 1. Для произвольной функции $\psi(t) > 0$ интегралы

$$\int_0^\infty \frac{a(te^{i\theta}; z)}{\psi(t)} dt \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \ln^+ \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| \frac{\lambda(t)}{t} dt,$$

где $\lambda(x) = \int_0^x \psi^{-1}(t) dt$ сходятся или расходятся одновременно.

Лемма 2. Интеграл $\int_0^\infty \psi^{-1}(t) c(t; z) dt$ и ряд $\sum \lambda(r_n) \sin \varphi_n(z)$ сходятся или расходятся одновременно.

Лемма 3. Интегралы $\int_0^\infty \psi^{-1}(t) A(t; z) dt$ и $\int_0^\infty [a(t; z) + a(-t; z)] \times$
 $\times t^{-1} \lambda(t) dt$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогичное утверждение верно и для величин S и s .

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Из сходимости интеграла $\int_0^\infty q^{-1}(r) S(r, f) dr$ следует, что

$$\int_0^\infty q^{-1}(r) A(r, z) dr < \infty, \quad \int_0^\infty B(r, z) q^{-1}(r) dr < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} q^{-1}(r) C(r, z) dr < \infty.$$

Из леммы 3 имеем

$$\int_0^{\infty} [a(t; z) + a(-t; z)] t^{-2} H(t) dt < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} [c(t; z) + c(-t; z)] t^{-2} H(t) dt < \infty,$$

где $H(x) = \int_x^{\infty} q^{-1}(t) dt$ — монотонно убывающая функция.

Из леммы 1 следует, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \ln^+ \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| H_1(t) \frac{dt}{t} \quad \text{и ряд} \quad \sum H_1(r_n) \sin \varphi_n(z),$$

где $H_1(x) = \int_x^{\infty} H(t) t^{-2} dt$, сходятся.

Имеем

$$H_1(x) \geq \int_x^{x+1/2} t^{-2} H(t) dt \geq \frac{1}{4} x^{-2} H\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Далее

$$H\left(x + \frac{1}{2}\right) = \int_{x+1/2}^{\infty} q^{-1}(t) dt \geq \int_{x+1/2}^{x+1} q^{-1}(t) dt \geq \frac{1}{2} q^{-1}(x+1).$$

Следовательно, $H_1(x) \geq \text{const} \cdot x^{-2} q^{-1}(x+1)$, $x \geq 1$, откуда следует сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \ln^+ \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| t^{-3} q^{-1}(t+1) dt$$

и ряда

$$\sum \frac{\sin \varphi_n(z)}{r_n^2 q(r_n + 1)}.$$

Так как функция $f^{-1}(z)$ также является мероморфной функцией из класса A_q , то, полагая $z = \infty$ и $z = 0$, будем иметь

$$\int_0^{\infty} \ln |f(t)| |t^{-3} q^{-1}(t+1) dt < \infty, \quad \sum \frac{\sin \alpha_p}{|a_p|^2 q(|a_p| + 1)} < \infty,$$

$$\sum \frac{\sin \beta_n}{|b_n|^2 q(|b_n| + 1)} < \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |f(t)| k(t; z) dt,$$

где ядро $k(t; z)$ определяется соотношениями (1) и (4), и докажем, что он сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

В самом деле, пусть $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > \delta > 0$. Представим этот интеграл в виде суммы $\sum v_n^{(1)}(z) + v_n^{(2)}(z)$, где

$$v_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-n}^{-n+1} \ln |f(t)| k_{p_n}(t; z) dt,$$

$$v_n^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{n-1}^{n+1} \ln |f(t)| k_{p_n}(t; z) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |v_n^{(2)}(z)| &\leq \operatorname{const}(\delta) \int_{n-1}^n |\ln |f(t)|| r^{p_n+1} \frac{dt}{t^{p_n+2}} \leq \\ &\leq \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^n |\ln |f(t)|| \left(\frac{er}{t}\right)^{p_n-1} e^{-p_n-1} \frac{dt}{t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (4) следует, что при $n-1 \leq |t| < n$ верно $e^{p_n+1} \gg q(n+1) \gg q(|t|+1)$, следовательно, из (6) имеем

$$|v_n^{(2)}(z)| \leq \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^n |\ln |f(t)|| \left(\frac{er}{n-1}\right)^{p_n-1} \frac{dt}{t^2 q(t+1)} \quad (7)$$

и для достаточно больших n будем иметь

$$|v_n^{(2)}(z)| \leq \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^n |\ln |f(t)|| \frac{dt}{t^2 q(t+1)}.$$

Аналогичное неравенство верно и для $v_n^{(1)}(z)$ при $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > \delta > 0$ и для достаточно больших n . Из этих оценок и из (5) следует наше утверждение.

Функция

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |f(t)| k(t; z) dt$$

гармонична в верхней полуплоскости и

$$\lim_{y \rightarrow +0} v(x + iy) = \ln |f(x)|. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |a_n| < n} \ln |D_{p_n}(z; a_n)| = h_1(z).$$

Докажем, что он сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части верхней полуплоскости, не содержащей точек a_n .

В самом деле, пусть $|z| < R$. Тогда для $|a_n| > 2R$ имеем

$$|\ln |D_{p_n}(z; a_n)|| < 2r^{p_n} \sin z_n |a_n|^{-p_n}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \sum_{2R < n-1 < |a_n| < n} |\ln |D_{p_n}(z; a_n)|| &\leq 2 \sum \sin a_n \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n} = \\ &= 2r^2 \sum \sin a_n \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n-2} |a_n|^{-2} \leq \\ &< 2e^3 r^2 \sum \sin z_n \left(\frac{er}{n-1} \right)^{p_n-2} e^{-p_n-1} |a_n|^{-2} < \\ &\leq 2e^3 r^2 \sum \sin a_n \left(\frac{er}{n-1} \right)^{p_n-2} \frac{1}{|a_n|^2 q(|a_n| + 1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

откуда, ввиду второго условия (5), следует наше утверждение.

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m-1 < |b_m| < m} \ln |D_{p_m}(z; b_m)| = h_2(z).$$

Функция $h_1(z)$ ($h_2(z)$) — однозначная гармоническая функция в верхней полуплоскости, за исключением точек a_n (b_n), где она имеет логарифмические полюсы и на вещественной оси имеет нулевые предельные значения. Следовательно, функция

$$u(z) = \ln |f(z)| - h_1(z) + h_2(z)$$

— однозначная гармоническая функция в верхней полуплоскости, предельные значения которой на вещественной оси совпадают с $\ln |f(x)|$.

Разность $u(z) - v(z)$ представляет однозначную гармоническую функцию с нулевыми значениями на вещественной оси. Продолжим нечетно эту функцию в нижнюю полуплоскость и полученную гармоническую функцию обозначим через $w(z)$. Тогда $w(re^{i\varphi}) = -\sum a_n r^n \sin n\varphi$, где коэффициенты a_n вещественны, откуда следует, что

$$u(z) = v(z) + \sum a_n r^n \sin n\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

или

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(t)| k(t; z) dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |a_n| < n} \ln |D_{p_n}(z; a_n)| - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m-1 < |b_m| < m} \ln |D_{p_m}(z; b_m)| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi, \quad z = re^{i\varphi}. \quad (10)$$

Умножая обе части этого равенства на $\sin m\varphi$ и интегрируя от 0 до π , получим соотношения для определения коэффициентов a_m ($m = 1, 2, \dots$):

$$a_m r^m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| \sin m\varphi d\varphi - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(t)| k(t; re^{i\varphi}) \sin m\varphi d\varphi -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |a_n| < n} \ln |D_{p_n}(re^{i\varphi}; a_n)| \sin m\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m-1 < |b_m| < m} \ln |D_{p_m}(re^{i\varphi}; b_m)| \sin m\varphi d\varphi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (11)$$

Оценим правую часть формулы (11). При этом мы будем предполагать, что функция $\frac{1}{t-1} \ln q(t+1)$ возрастающая.

Имеем

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| \sin m\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \sin \varphi \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} d\varphi +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi})} \right| \sin \varphi \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} d\varphi. \quad (12)$$

Так как $|\sin m\varphi| \leq m \sin \varphi$, $0 < \varphi \leq \pi$, то из (12) следует

$$|I_1| \leq mrB(r, f) + mrB\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq mrS(r, f) +$$

$$+ mrS\left(\frac{1}{f}\right) = 2mrS(r, f) + O(1)mr \leq 2mr d, q(r) + O(1)mr. \quad (13)$$

Для оценки интеграла I_2 перепишем его в виде

$$I_2 = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \ln |f(t)| k(t; re^{i\varphi}) \sin m\varphi d\varphi dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \int_{n-1 < |t| < n} \ln |f(t)| k_{p_n}(t; re^{i\varphi}) |dt| \right) \sin m\varphi d\varphi. \quad (14)$$

Заметим, что из (N) следует, что

$$|k_{p_n}(t; re^{i\varphi})| \leq \frac{2r^{p_n+1}}{|t|^{p_n+1}}, \text{ если } |t| \geq 2r.$$

Если $|t| \leq 2r$, то

$$|\sin m\varphi k_{p_n}(t; re^{i\varphi})| = \left| \frac{r^{p_n-1}}{t^{p_n+1}} \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{t^2 + r^2 - 2rt \cos \varphi} \times \right.$$

$$\times \left. \frac{t \sin(p_n+1)\varphi - r \sin p_n \varphi}{\sin \varphi} \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \right| \leq$$

$$\leq \frac{r^{p_n-1}}{|t|^{p_n+1}} [2r(p_n+1) + rp_n] m \leq \frac{3m(p_n+1)r^{p_n}}{|t|^{p_n+1}}, \quad |t| \geq 1.$$

Следовательно, вообще

$$|\sin m\varphi k_{p_n}(t; re^{i\varphi})| \leq \frac{3m(p_n+1)r^{p_n}}{|t|^{p_n+1}}, \quad |t| \geq 1. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что

$$|I_2| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^\infty \int_{n-1 < |t| < n} |\ln |f(t)|| \frac{3m(p_n+1)}{|t|^{p_n+1}} |dt| +$$

$$+ \frac{2\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 |\ln |f(t)|| \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{6e^3 m r^2}{\pi} \sum_{n=2}^\infty (p_n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n} \int_{n-1 < |t| < n} |\ln |f(t)|| \left(\frac{3er}{2t}\right)^{p_n-2} \times$$

$$\times e^{-p_n-1} \frac{|dt|}{|t|^3} + O(1) <$$

$$\leq \frac{6e^3 m r^2}{\pi} \max_n (p_n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n} \left(\frac{3er}{2(n-1)}\right)^{p_n-2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1 < |t| < n} \frac{|dt|}{q(|t|+1)|t|^3} + O(1).$$

Но

$$\begin{aligned} \max_{n \geq 2} \left(\frac{3er}{2(n-1)} \right)^{p_n-2} &\leq \max_{t \geq 2} \left[\left(\frac{3er}{2(t-1)} \right)^{t-1} \right]^{\frac{1}{t-1}(\ln q(t+1)-2)} < \\ &\leq \max_{2 \leq t \leq 3/2er+2} \left[\left(\frac{3er}{2(t-1)} \right)^{t-1} \right]^{\frac{\ln q(t+1)}{t-1}} \leq e^{\frac{3/2er \ln q(3/2er+2)}{3/2er}} = q^{1/e} (3/2er + 2). \end{aligned}$$

Таким образом, для I_2 имеем оценку

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} 6e^3 m r^2 k_1 q^{1/e} (3/2er + 2) \int_{-\infty}^{\infty} |\ln |f(t)|| \frac{dt}{|t|^3 q(|t|+1)}, \quad (16)$$

где $k_1 = \max(p_n + 1)(2/3)^{p_n}$.

Оценим теперь I_2 . Вводя обозначение

$$D_0(z) = \prod_1^{\infty} \prod_{n-1 < |a_n| < n} D_{p_n}(z; a_n)$$

и переписав I_2 в виде

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |D_0(re^{i\varphi})| \sin m\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |D_0(re^{i\varphi})| \sin \varphi \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} d\varphi + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln^- |D_0^{-1}(re^{i\varphi})| \sin \varphi \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

будем иметь

$$|I_2| \leq mrB(r, D_0) + m \cdot r B(r, D_0^{-1}).$$

Так как $A(r, D_0) = C(r, D_0) = 0$, то $S(r, D_0) = B(r, D_0)$.

Далее

$$B(r, D_0^{-1}) \leq S(r, D_0^{-1}) = S(r, D_0) + O(1) = B(r, D_0) + O(1),$$

откуда следует, что

$$|I_2| \leq 2mrB(r, D_0) + O(1).$$

Для оценки $B(r, D_0)$ заметим, что [1]

$$\ln^+ |D_{p_n}(re^{i\varphi}; a_n)| \leq 2p_n \sin \alpha_n \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$B(r, D_0) \leq \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi} \sum \ln^+ |D_{p_n}(re^{i\varphi}; a_n)| \sin \varphi d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1 < |a_p| < n} 2p_n \sin \alpha_p \left(\frac{r}{|a_p|} \right)^{p_n} = 4re^2 \sum \sum p_n (2/3)^{p_n} \times$$

$$\times \left(\frac{3er}{2|a_p|} \right)^{p_n-2} e^{-p_n-1} |a_p|^{-2} \leq$$

$$\leq 4e^2 r k_1 q^{1/e} (3/2 er + 2) \sum \sin \alpha_p \frac{1}{|a_p|^2 q (|a_p| + 1)}.$$

Таким образом, для I_3 получаем оценку

$$|I_3| \leq \text{const } mr^2 q^{1/e} (3/2 er + 2). \quad (18)$$

Аналогично оценивается I_4 :

$$|I_4| \leq \text{const } mr^2 q^{1/e} (3/2 er + 2). \quad (19)$$

Из (13), (16), (18) и (19) окончательно получаем оценки для коэффициентов a_m

$$|a_m| \leq \text{const } mr^2 q (3/2 er + 2) r^{-m}.$$

Далее

$$|\omega(z)| = \left| \sum a_m r^m \right| \leq \sum |a_m| r^m \leq$$

$$\leq \text{const } \sum m \left(\frac{4}{3} r \right)^2 q (3/2 \cdot 4/3 er + 2) (4/3 r)^{-m} \cdot r^m =$$

$$= \text{const } r^2 q (2er + 2) \sum m \left(\frac{3}{4} \right)^m = \text{const } r^2 q (2er + 2),$$

то есть

$$|\omega(z)| \leq \text{const } r^2 q (2er + 2).$$

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. Я. Левину за постановку задачи и руководство.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 I 1965

Ի. Օ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԿԱՐԳԻ ՄԵՐՈՄՈՐՔ ՀՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՅՈՒՄԸ
ԿԻՍԱԼԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում բերվում է կիսահարթության մերոմորֆ և կամարագեորայ առող խարականրիատիկա առնցող ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումը: Այդ ներկայացումը հանդիսանում է աստիճանային արագությամբ առող խարականրիատիկա առնցող մերոմորֆ ֆունկցիաների ներկայացման մասին Խ. Նևանլինայի մի արդյունքի ընդհանրացումը [1]:

Նեանլինայի թեորեմում որպէս ներկայացման կորիզ մասնակցում է Պատտոնի ձևախախտում (N) կորիզը:

Հոգիածում բերված (3) ներկայացման մեջ կորիզը որոշվում է (1) անսխալուններով, որտեղ p_n թվերն ընտրվում են կիսահարթաթլանում մերմորֆ և տրված $q(r)$ ֆունկցիային չցերադանցող իտրակտերիստիկա ունեցող ֆունկցիաների ամբողջ դասի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Nevanlinna R. Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. Acta Soc. Sci. Fenn. 50, № 12, 1925.
2. Nevanlinna R. Über eine Erweiterung des Poissonschen Integrals. Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A 24, № 4, 1925, 3—15.