

МАТЕМАТИКА

А. Г. ГЮЛЬМИСАРЯН

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Через $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать точку n -мерного евклидова пространства R^n , $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, Ω — ограниченную область в R^n с границей Γ , Ω_1 — подобласть Ω с границей Γ_1 , не имеющей с Γ общих точек, $\Omega_2 = \Omega / \Omega_1$ (случай двух областей рассматривается для простоты изложения, все результаты верны и в случае разбиения Ω на конечное число областей. Случай неограниченной области, когда Ω_2 совпадает с R^n / Ω_1 будет рассмотрен в п. 4). На границы Γ и Γ_1 накладывается следующее условие: Γ и Γ_1 можно покрыть конечной системой областей U_i (соответственно V_i) в R^n таких, что в каждой из U_i (V_i) определено невырожденное бесконечно гладкое преобразование координат $x \rightarrow y$ такое, что после применения этого преобразования Γ (соответственно Γ_1) становится гиперплоскостью $y_n = 0$. При таком отображении прилегающая к Γ часть области Ω_2 оказывается лежащей в полупространстве $y_n > 0$, а при отображении границы Γ_1 прилегающая к ней часть области Ω_1 лежит в полупространстве $y_n < 0$, а прилегающая к границе Γ_1 часть области Ω_2 лежит в полупространстве $y_n > 0$. При этом требуется выполнение следующего условия: если начало координат исходной системы перенести в любую точку P границы Γ , либо Γ_1 и если y — локальная координата в области покрытия, то требуется, чтобы в точке P имело бы место

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Пусть $0 < t < T \leq +\infty$. Через Ω^T , Ω_1^T , Ω_2^T будем обозначать цилиндры $\Omega^T = \Omega \times (0 < t < T)$, $\Omega_1^T = \Omega_1 \times (0 < t < T)$, $\Omega_2^T = \Omega_2 \times (0 < t < T)$, а через S_Γ и S_{Γ_1} — боковые поверхности Ω^T и Ω_1^T : $S_\Gamma = \Gamma \times (0 < t < T)$, $S_{\Gamma_1} = \Gamma_1 \times (0 < t < T)$.

Приведем несколько известных фактов относительно пространств W_2^1 и $W_{x,t,2}^1$ (см. [1], [2]), которые понадобятся нам в дальнейшем. Пространство $W_2^1(R^n)$ определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме

$$\|u\|_{l, R^n} = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi|^{2l}) |Fu|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

где Fu — преобразование Фурье функции $u(x)$. Если l — целое, то норма (1.1) эквивалентна норме

$$\left(\sum_{|a| \leq l} \int_{R^n} |D^a u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

а при l дробном — норме

$$\left(\sum_{|a| \leq l} \int_{R^n} |D^a u(x)|^2 dx + \sum_{|a|=l} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|D^a u(x) - D^a u(y)|^2}{|x - y|^{n+2l-2|a|}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Если Ω — ограниченная область, то, как обычно,

$$\|u\|_{l, \Omega} = \left(\sum_{|a| \leq l} \int_{\Omega} |D^a u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1 \quad (1.5)$$

— конечное разбиение единицы в окрестности области Ω , где $\varphi_j(x)$ — бесконечно гладкие функции. Тогда норма (1.4) эквивалентна норме

$$\left(\sum_{j=1}^N \|\varphi_j u\|_{l, R^n}^2 \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее: разбиение единицы (1.5) таково, что если носитель функции $\varphi_j(x)$ имеет с Γ либо с Γ_1 общие точки, то он целиком лежит внутри одной из областей U_j либо V_j покрытия границы. Пусть функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, \dots, r$) — те из функций разбиения (1.5), носители которых пересекают Γ . Их сужения на Γ снова обозначим через $\varphi_j(x)$. Пространство $W_2^l(\Gamma)$ определим как пополнение пространства $C^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|u\|_{l, \Gamma}^* = \left(\sum_{j=1}^r \|\varphi_j u\|_{l, R^{n-1}}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

где норма $\|\varphi_j u\|_{l, R^{n-1}}$ берется в локальных координатах. Аналогично определяется и пространство $W_2^l(\Gamma_1)$ с нормой $\|u\|_{l, \Gamma_1}^*$.

Пусть $[a, b]$ — некоторый интервал оси t , конечный или бесконечный. Пространство $W_{v, l, 2}^{l, k}(\Omega \times [a, b])$ определим как пополнение пространства $C^\infty(\Omega \times [a, b])$ по норме

$$\|u(x, t)\|_{l, k}^2 = \int_a^b \|u(x, t)\|_{l, \Omega}^2 dt + \int_{\Omega} \|u(x, t)\|_{k, [a, b]}^2 dx. \quad (1.7)$$

Норма функции $u(x', t)$ в пространстве $W_{x', t, 2}^{l, k}(\Gamma \times [a, b])$ определяется следующим образом

$$\|u\|_{l, k, \Gamma \times [a, b]}^2 = \left(\int_a^b \|u\|_{l, \Gamma}^2 dt + \sum_{i=1}^l \int_{\Gamma} \|\varphi_i u\|_{k, [a, b]}^2 dx' \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Обозначим через R_+^n полупространство в R^n , где $x_n \geq 0$, а через R_-^n — полупространство $x_n \leq 0$. Если $u \in W_2^l(R^n)$, то ее сужение на R_+^n принадлежит $W_2^l(R_+^n)$ и

$$\|u\|_{l, R_+^n} \leq C_1 \|u\|_{l, R^n} \quad (1.9)$$

и, наоборот, если $u \in W_2^l(R_+^n)$, то ее можно продолжить на все R^n так, что

$$\|Lu\|_{k, R^n} \leq C_2 \|u\|_{k, R_+^n} \quad (k=0, 1, \dots, l), \quad (1.10)$$

где L — оператор продолжения функций с R_+^n на все R^n . Если $l > 1/2$, то для $u(x) \in W_2^l(R_+^n)$ справедливо

$$\|u(x', 0)\|_{l-1/2} \leq C_3 \|u\|_{l, R_+^n}. \quad (1.11)$$

Если q — числовой параметр, то верно следующее неравенство

$$|q|^{l-k} \|u\|_k \leq C_{kl} (\|u\|_l + |q|^l \|u\|_0) \quad (0 < k < l), \quad (1.12)$$

а также неравенство

$$|q|^{1/2} \|u(x', 0)\|_0 \leq C_4 (\|u\|_1 + |q| \|u\|_0), \quad (1.12')$$

где нормы берутся по R^n либо по R_+^n . Постоянные C_{kl} и C_4 не зависят от u и q (см. [3]). В дальнейшем нам понадобятся нормы, зависящие от числового параметра q

$$\|u\|_l^2 = \|u\|_l^2 + |q|^{2l} \|u\|_0^2. \quad (1.13)$$

где нормы берутся по R^n либо по R_+^n или R_-^n .

Рассмотрим прямую сумму соболевских пространств $W_2^l = W_2^l(R^n) = W_2^l(R_-^n) + W_2^l(R_+^n)$. Всякую функцию $u(x) \in W_2^l$ можно представить в виде

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in R_-^n \\ u_2(x), & x \in R_+^n, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $u_1(x) \equiv 0$ при $x \in R_+^n$, $u_2(x) \equiv 0$ при $x \in R_-^n$.

Для функций вида (1.14) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_l^2 &= \|u_1\|_{l, R_-^n}^2 + \|u_2\|_{l, R_+^n}^2 = \|u_1\|_{l, R_-^n}^2 + \\ &+ |q|^{2l} \|u_1\|_{0, R_-^n}^2 + \|u_2\|_{0, R_+^n}^2 + |q|^{2l} \|u_2\|_{0, R_+^n}^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Неравенства (1.9)–(1.11) можно записать в виде

$$\|u\|_{l, R_+^n} \leq C_1 \|Lu\|_{l, R^n}; \quad \|Lu\|_{l, R^n} \leq C_2 \|u\|_{l, R_+^n}, \quad (1.16)$$

$$\|u(x', 0)\|_{l-1/2} \leq C_3 \|u(x)\|_{l, R_+^n}, \quad (1.17)$$

вычисляя $\|u\|$ как нормы по подпространству, можно перенести неравенство (1.12) на нормы по Ω :

$$\|u\|_l = \|u\|_{l, \Omega} = (\|u\|_{l, \Omega}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Omega}^2)^{1/2} \leq \quad (1.12'')$$

$$\leq C_{kl} \left(\sum_{k=0}^l |q|^{2k} \|u\|_{l-k}^2 \right)^{1/2} \leq C_5 \|u\|_l.$$

Положим

$$\|u\|' = \|u\|_{l, \Gamma}^* = (\|u\|_{l, \Gamma}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Gamma}^2)^{1/2}, \quad (1.18)$$

$$\|u\|'' = \|u\|_{l, \Gamma_1}^* = (\|u\|_{l, \Gamma_1}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Gamma_1}^2)^{1/2}. \quad (1.18')$$

Из (1.17) получаем, что при целом $l \geq 1$ функция из $W_{1/2}^l(\Omega)$ обладает граничными значениями и

$$\|u\|_{l-1/2}^* \leq C_5 \|u\|_{l, \Omega}. \quad (1.19)$$

В дальнейшем нам понадобятся пространства, введенные М. И. Вишиком и М. С. Аграновичем [3]. Пусть $G = \Omega \times (-\infty < t < +\infty)$, $G' = \Gamma \times (-\infty < t < +\infty)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $l+1$, $\lambda+1/2$, b — целые положительные числа. Пусть $\gamma \geq 0$ фиксировано. Под пространством $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ понимается пространство функций $u(x, t)$, определенных в G , равных нулю при $t < 0$ и таких, что $e^{-\gamma t} u(x, t) \in W_{x, l+1/2}^{l, 1/2b}(G)$. За норму функции $u(x, t)$ в $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ примем норму $\|e^{-\gamma t} u\|_{e, l/2b}$ (см. (1.7)). Аналогично определяется и пространство функций $P_{\lambda, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ на G' : это функции $u(x', t)$, заданные на G' , равные нулю при $t < 0$, и такие, что $e^{-\gamma t} u(x', t) \in W_{\lambda, 1/2b}^{l, 1/2b}(G')$. За норму в $P_{\lambda, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ принимается норма $\|e^{-\gamma t} u(x', t)\|_{\lambda, 1/2b}$ (см. (1.8)).

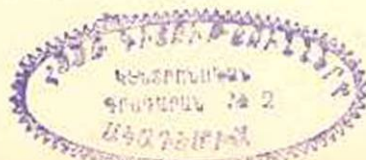
Пусть теперь l — целое неотрицательное, $\gamma > 0$. Пространство $E_{l, 1/2b}(\gamma, \Omega)$ определяется как совокупность функций $U(x, p)$, определенных при почти всех x и p , $\operatorname{Re} p > \gamma$, и обладающих свойствами:

1) при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$, и почти всех p , $\operatorname{Re} p = \gamma$,

$$U(x, p) \in W_{1/2}^l(\Omega),$$

2) при почти всех $x \in \Omega$ функция $U(x, p)$ задана и голоморфна при $\operatorname{Re} p > 0$ и

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |U(x, \sigma + i\tau)|^2 |\sigma + i\tau|^{2b} d\tau < +\infty$$



и для $D_x^\alpha U(x, p)$ при $|\alpha| < l$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |D_x^\alpha U(x, p)|^2 d\tau < +\infty,$$

3)

$$\|U(x, p)\|_{l, 1/2b}^2 = \int_{\sigma > \gamma} [\|U\|_{l, 2}^2 + |p|^{1/b} \|U\|_{0, 2}^2] d\tau < +\infty.$$

Аналогичным образом определяется пространство $E_{\lambda, \lambda/2b}(\gamma, \Gamma)$: это совокупность функций $U(x', p)$, определенных при почти всех $x' \in \Gamma$ и $\operatorname{Re} p \geq \gamma$, таких, что

1) при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p , $\operatorname{Re} p = \gamma$,

$$U(x', p) \in W_2^\lambda(\Gamma),$$

2) при почти всех $x' \in \Gamma$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |U(x', p)|^2 \sigma + i\tau^{1/b} d\tau < +\infty,$$

3)

$$\|U(x', p)\|_{\lambda, \lambda/2b}^2 = \int_{\sigma > \gamma} [\|U\|_{\lambda, \Gamma}^2 + |p|^{1/b} \|U\|_{0, \Gamma}^2] d\tau < +\infty$$

(см. (1.6)). В [3] доказана следующая теорема.

Пусть γ — положительное число. Тогда преобразование Лапласа

$$U(x, p) = Lu(x, t) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt$$

взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ на пространство $E_{l, 1/2b}(\gamma, \Omega)$ (l — целое неотрицательное), а пространство $P_{\lambda, \lambda/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ на $E_{\lambda, \lambda/2b}(\gamma, \Gamma)$ ($\lambda + 1/2$ — целое положительное).

§ 2. Пусть в области Ω^T задан линейный $2b$ — параболический по И. Г. Петровскому [4] оператор порядка $2m$ с разрывными коэффициентами

$$A(x, D_x, \partial/\partial t) = \begin{cases} A^1(x, D_x, \partial/\partial t), & (x, t) \in \Omega_1^T \\ A^2(x, D_x, \partial/\partial t), & (x, t) \in \Omega_2^T \end{cases}$$

$D_x = D_{x_1} \cdots D_{x_n}$; $D_{x_k} = -i \partial/\partial x_k$, A^i — операторы в частных производных с коэффициентами, зависящими бесконечно гладким образом от x в Ω_1^T ($i=1, 2$). Порядки операторов A^i равны $2m$, а порядок члена $D_x^\alpha \partial^b/\partial t^b$ по определению $2b$ — параболичности равен $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + 2b$. Пусть функция $f_1(x, t)$ задана при $(x, t) \in \Omega_1^T$, а функция $f_2(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_2^T$. Положим

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in \Omega_1^T \\ u_2(x, t), & (x, t) \in \Omega_2^T \end{cases}$$

где $u_i(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \Omega^T / \bar{\Omega}_i^T$ ($i = 1, 2$). При $(x, t) \in S_{\Gamma_i}$ под $u_i(x, t)$ понимается предельное значение $u(x, t)$ со стороны $\bar{\Omega}_i^T$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим следующие уравнения

$$A^1(x, D_x, \partial/\partial t) u_1(x, t) = f_1(x, t), \quad (2.1)$$

$$A^2(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t) = f_2(x, t) \quad (2.2)$$

при следующих граничных условиях

$$B_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_1(x, t)|_{S_{\Gamma_1}} + C_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t)|_{S_{\Gamma_1}} = g_j(x'', t), \\ j = 1, \dots, 2m; \quad x'' \in \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$R_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t)|_{S_{\Gamma}} = \psi_j(x', t); \quad j = 1, \dots, m; \quad x' \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Предполагается, что коэффициенты оператора B_j бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_1^T$, коэффициенты операторов C_j и R_j бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_2^T$. Порядок B_j и C_j равен m_j , а порядок R_j равен r_j .

К граничным условиям добавляются начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \left. \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \right|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x) \quad (m = b, x). \quad (2.5)$$

Если допустить, что все $\varphi_k(x) \equiv 0$ и $T = +\infty$, то формальное преобразование Лапласа приводит задачу (2.1) — (2.5) к стационарной задаче

$$A^1(x, D_x, p) U_1(x, p) = F_1(x, p), \quad x \in \Omega_1, \quad (2.1')$$

$$A^2(x, D_x, p) U_2(x, p) = F_2(x, p), \quad x \in \Omega_2 \quad (2.2')$$

с граничными условиями

$$B_j(x, D_x, p) U_1(x, p)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, p) U_2(x, p)|_{\Gamma_1} = G_j(x'', p), \quad (2.3')$$

$$j = 1, \dots, 2m; \quad x'' \in \Gamma_1$$

$$R_j(x, D_x, p) U_2(x, p)|_{\Gamma} = \Psi_j(x', p), \quad j = 1, \dots, m; \quad x' \in \Gamma, \quad (2.4')$$

где p — комплексный параметр, пробегающий правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$. Положим $p = q^{2b}$ и вместо параметра p будем в дальнейшем рассматривать параметр q , изменяющийся в угле Q : $|\arg q| \leq \frac{\pi}{4b}$.

План наших дальнейших рассмотрений таков: сначала мы для стационарной (эллиптической) задачи (2.1') — (2.4') доказываем теорему существования и единственности в пространствах $E_{l, 1/2b}$, потом, воспользовавшись изоморфизмом пространств $E_{l, 1/2b}$ и $P_{l, 1/2b}$ получаем однозначную разрешимость параболической задачи (2.1) — (2.5) в пространствах $P_{l, 1/2b}$ (теорема 6).

Разрешимость задачи (2.1') — (2.4') доказывается в общем по тому же плану, как это обычно делается для эллиптических задач: сначала

для случая однородных операторов A^i , B_j , C_l , R_j с постоянными коэффициентами в полупространстве доказывается априорная оценка и существование, потом эти результаты переносятся на случай операторов с малоизменяющимися коэффициентами, и, наконец, с помощью разбиения единицы получается окончательный результат для операторов с переменными коэффициентами.

Граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами изучались в ряде работ, из которых мы упомянем недавно появившиеся интересные работы Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля [10] и З. Г. Шефтеля [11] (см. также цитированную там литературу). Заметим, что в рассматриваемом нами случае наличие параметра q позволяет получить априорную оценку (теорема 2), из которой сразу следует единственность решения задачи (2.1')—(2.4'), в то время как из оценки вида

$$\|U\|_l \leq K \{ \|F_1\|_{l-2m} + \|F_2\|_{l-2m} + \sum \|G_l\|_{l-m_j-1/2} + \sum \|\Psi_j\|_{l-m_j-1/2} + \|U\|_0 \},$$

с помощью которой получают основные результаты в [10], [11], единственность не следует. Кроме того, для достаточно больших по модулю q мы доказываем существование решения при любых правых частях, тогда как в [10], [11] существование решения доказывается при выполнении некоторых дополнительных условий, налагаемых на правые части.

Теорема существования и единственности для смешанных краевых задач для параболических уравнений (и систем) с бесконечно гладкими коэффициентами во всем $\mathbb{Q}^T$ с условиями вида (2.4) на Γ и условиями Коши (2.5) получена в работах М. С. Аграновича и М. И. Вишика [3], [5]. Отметим, что общей теорией разрешимости смешанных задач для параболических уравнений занимались Т. Я. Загорский [6], С. Д. Эйдельман [7], Л. Н. Слободский [8] и другие.

Используемые нами методы близки к методам, развитым в работах [3], [5], [9]. Доказательство некоторых теорем, сформулированных в настоящей работе, в частности в § 4 и § 5, схоже с доказательством аналогичных теорем из [3], поэтому мы ограничимся только формулировками этих теорем. Подробно (в § 3) мы остановимся только на случае, когда коэффициенты операторов задачи (2.1')—(2.4') постоянные, сами операторы однородны, а граничные условия задаются на гиперплоскости $x_n = 0$.

§ 3. Рассмотрим уравнения

$$A^1(D_x, q) u_1(x, q) = f_1(x, q); (x_n < 0) \quad (3.1)$$

$$A^2(D_x, q) u_2(x, q) = f_2(x, q); (x_n > 0), \quad (3.2)$$

где $A^1(D_x, q)$ и $A^2(D_x, q)$ — однородные порядка $2m$ эллиптические операторы с постоянными коэффициентами, числовой параметр q изменяется в угле Q .

При $x_n = 0$ зададим условия

$$B_j(D_x, q) u_1(x, q)|_{x_n=0} + C_j(D_x, q) u_2(x, q)|_{x_n=0} = g_j(x', q), \\ (j=1, \dots, 2m) \quad (3.3)$$

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; $B_j(\xi, q)$ и $C_j(\xi, q)$ — однородные полиномы по $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ порядка m_j с постоянными коэффициентами. На операторы $A^1(D_x, q)$ и $A^2(D_x, q)$ наложим следующее условие:

Условие 1. $A^i(\xi, q) \neq 0$ ($i=1, 2$) при $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$.

При $n=1$ дополнительно потребуем, чтобы уравнения $A^i(\xi', \lambda, q) = 0$ ($i=1, 2$) имели бы ровно m корней с положительной мнимой частью и m с отрицательной мнимой частью.

Из условия 1 следует, что многочлены $A^1(\xi', \lambda, q)$ и $A^2(\xi', \lambda, q)$ можно представить в виде

$$A^1(\xi', \lambda, q) = M_1^+(\xi', \lambda, q) M_1^-(\xi', \lambda, q),$$

$$A^2(\xi', \lambda, q) = M_2^+(\xi', \lambda, q) M_2^-(\xi', \lambda, q),$$

где

$$M_i^\pm(\xi', \lambda, q) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_{ik}^\pm),$$

а $\lambda_{ik}^\pm$ — корни $A^i(\xi', \lambda, q)$ с положительной (отрицательной) мнимой частью. При $q=0$ условие 1 превращается в условие эллиптичности операторов $A^1(D_x, 0)$ и $A^2(D_x, 0)$.

Положим $f_1(x, q) = f_2(x, q) = 0$. Сделаем преобразование Фурье по $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, получим

$$A^1(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q) = 0, \quad (3.1')$$

$$A^2(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (3.2')$$

$$B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} +$$

$$+ C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \tilde{g}_j(\xi', q) \quad (j=1, \dots, 2m), \quad (3.3')$$

где $\tilde{g}_j = F' g_j$.

Через $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ будем обозначать пространство устойчивых решений уравнений (3.1') и (3.2'), то есть пространство функций $v(\xi', x_n, q)$, имеющих вид

$$v(\xi', x_n, q) = \begin{cases} v_1(\xi', x_n, q), & (x_n < 0) \\ v_2(\xi', x_n, q), & (x_n > 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

и являющихся такими решениями (3.1') и (3.2'), которые стремятся к нулю, когда $x_n \rightarrow \pm \infty$. В частности, так как v_1 и v_2 суть решения

обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а именно, уравнений

$$M_1^-(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q) = 0,$$

$$M_2^+(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q) = 0,$$

то, очевидно, что базис в $\mathcal{M}_1$ могут составлять экспоненты вида $e^{i\lambda_1^- x_n}$ ($k=1, \dots, m$), а в $\mathcal{M}_2$ — экспоненты вида $e^{i\lambda_2^+ x_n}$ ($k=1, \dots, m$), в случае кратных корней эти экспоненты умножаются на некоторые многочлены от x_n .

Условие 2. Задача (3.1')—(3.3') имеет одно и только одно решение вида (3.4) для любых правых частей $\tilde{g}_j(\xi', q)$, принадлежащее $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Условие 2 может быть записано в следующей алгебраической форме: если $e_1^-, \dots, e_m^-$ — базис в $\mathcal{M}_1$, а $e_1^+, \dots, e_m^+$ — базис в $\mathcal{M}_2$, то условие 2 эквивалентно условию

$$\det \left\{ B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) e_k^- \Big|_{x_n=-0} + C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) e_k^+ \Big|_{x_n=+0} \right\} \neq 0$$

$$\operatorname{Im} \xi = 0, \quad |\xi| + |q| \neq 0, \quad q \in Q.$$

Легко проверяется, что функции

$$e_k^- = \int_{\gamma^-} \frac{e^{i\lambda x_n} \lambda^{k-1}}{M_1^-(\xi', \lambda, q)} d\lambda, \quad (x_n < 0), \quad (k=1, \dots, m),$$

$$e_k^+ = \int_{\gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} \lambda^{k-1}}{M_2^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda, \quad (x_n > 0), \quad (k=1, \dots, m),$$

где γ^- (γ^+) — контур, содержащий все корни уравнения $M_1^-(\xi', \lambda, q) = 0$ ($M_2^+(\xi', \lambda, q) = 0$), образуют базис в $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Построим теперь так называемый канонический базис в $\mathcal{M}$:

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \Omega_{1,j}^-(\xi', x_n, q), & (x_n < 0) \\ \Omega_{2,j}^+(\xi', x_n, q), & (x_n > 0), \end{cases} \quad (j=1, \dots, 2m)$$

такой, что

$$B_j(\xi', x_n, q) \Omega_{1,k}^- \Big|_{x_n=-0} + C_j(\xi', x_n, q) \Omega_{2,k}^+ \Big|_{x_n=+0} = \delta_{jk}, \quad (3.5)$$

δ_{jk} — символ Кронекера. Тогда любое решение (3.1')—(3.3') с произвольными правыми частями $\tilde{g}_j(\xi', q)$ запишется в виде

$$v(\xi', x_n, q) = \begin{cases} v_1(\xi', x_n, q) = \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{1,j}^-(\xi', x_n, q) \tilde{g}_j(\xi', q), & (x_n < 0), \\ v_2(\xi', x_n, q) = \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{2,j}^+(\xi', x_n, q) \tilde{g}_j(\xi', q), & (x_n > 0). \end{cases} \quad (3.4')$$

Действительно,

$$B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) \sum_{k=1}^{2m} \Omega_{1,k}^- \tilde{g}_k(\xi', q)|_{x_n=0} + \\ + C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) \sum_{k=1}^{2m} \Omega_{2,k}^+ \tilde{g}_k(\xi', q)|_{x_n=0} = \partial_{j,n} \tilde{g}_j(\xi', q) = \tilde{g}_j(\xi', q).$$

В дальнейшем нам понадобится интегральное представление канонического базиса. Функции Ω_j будем искать в виде

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \Omega_{1,j}^- = \sum_{k=1}^m \alpha_k^j e_k^- \\ \Omega_{2,j}^+ = \sum_{k=1}^m \beta_k^j e_k^+ \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и решая полученную систему уравнений относительно α_k^j и β_k^j ($k=1, \dots, m$) при каждом j ($j=1, \dots, 2m$) по формулам Крамера, получим

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \int_{\gamma^-} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^1(\xi', \lambda, q)}{M_1^-(\xi', \lambda, q)} d\lambda; & (x_n < 0) \\ \int_{\gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^2(\xi', \lambda, q)}{M_2^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda; & (x_n > 0), \end{cases} \quad (3.7)$$

где функции N_j^1 и N_j^2 — бесконечно гладкие однородные степени $m - m_j - 1$ по совокупности аргументов, являющиеся полиномами по λ .

В дальнейшем в этом § будем считать, что функция $v(\xi', x_n, q)$ имеет вид (3.4), и что нормы $\|u_1\|$ и $\|u_1\|$ берутся по полупространству R_-^n , а нормы $\|u_2\|$ и $\|u_2\|$ по полупространству R_+^n . Положим

$$l \geq \max(2m, m_j + 1). \quad (3.8)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2 и пусть целое l удовлетворяет (3.8). Тогда, при ненулевых $q \in Q$ и любых $f_1(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_-^n)$, $f_2(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$ существует одно и только одно решение

$$u(x, q) = \begin{cases} u_1(x, q), & (x_n < 0) \\ u_2(x, q), & (x_n > 0) \end{cases}$$

задачи (3.1), (3.2), принадлежащее $W_2^1(R^n)$. При этом при $|q| \geq q_0$ (q_0 — произвольное положительное число) имеет место двусторонняя априорная оценка

$$\|u\|_t \leq C \left\{ \|f_1\|_{t-2m, R_-^n} + \|f_2\|_{t-2m, R_+^n} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{t-m_j-1/2} \right\} \leq C' \|u\|_t$$

или (см. (1.13))

$$\begin{aligned} \|u\|_t + |q|^t \|u\|_0 &\leq C (\|f_1\|_{t-2m} + \|f_2\|_{t-2m} + |q|^{t-2m} (\|f_1\|_0 + \\ &+ \|f_2\|_0) + \sum_{j=1}^{2m} (\|g_j\|_{t-m_j-1/2} + |q|^{t-m_j-1/2} \|g_j\|_0)) \leq C' (\|u\|_t + |q|^t \|u\|_0). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\|A^1(D_x, q) u_1\|_{t-2m} \leq C_6 \sum_{k=0}^{2m} |q|^k \|u_1\|_{t-k},$$

откуда в силу (1.12') сразу следует

$$\|f_1\|_{t-2m} \leq C_7 \|u_1\|_t, \quad (3.10)$$

аналогично и

$$\|f_2\|_{t-2m} \leq C_8 \|u_2\|_t. \quad (3.11)$$

Точно так же легко заметить, что

$$\|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j} + \|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j} \leq C_9 (\|u_1\|_t + \|u_2\|_t), \quad (3.12)$$

но в силу (1.17)

$$\|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j-1/2} \leq C_3 \|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j} \quad (3.13)$$

$$\|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j-1/2} \leq C_3 \|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j}. \quad (3.14)$$

Из (3.10)–(3.14) сразу следует второе из неравенств (3.9). Для доказательства первого из неравенств (3.9) сведем задачу (3.1)–(3.3) к случаю, когда $f_1 = f_2 = 0$.

Пусть L_1 — оператор продолжения f_1 с R_-^n на R^n и L_2 — оператор продолжения f_2 с R_+^n на все R^n . Рассмотрим уравнения

$$A^1(D_x, q) u_1(x, q) = L_1 f_1(x, q),$$

$$A^2(D_x, q) u_2(x, q) = L_2 f_2(x, q).$$

При ненулевых $q \in Q$ частными решениями этих уравнений будут функции

$$u_1^0 = F^{-1} (A^1(\xi, q))^{-1} F L_1 f_1, \quad (3.15)$$

$$u_2^0 = F^{-1} (A^2(\xi, q))^{-1} F L_2 f_2. \quad (3.16)$$

Так как операторы $A^i(D_x, q)$ — однородные, степени $2m$, то мы имеем

$$|F u_1^0| \leq C_{10} (|\xi| + |q|)^{-2m} |F L_1 f_1|$$

$$|F u_2^0| \leq C_{10} (|\xi| + |q|)^{-2m} |F L_2 f_2|$$

или

$$(1 + |\xi|^{2l} + |q|^{2l}) \|F u_1^0\| \leq C_{11} (1 + |\xi|^{2l-2m} + |q|^{2l-2m}) \|F L_1 f_1\|^2, \\ (1 + |\xi|^{2l} + |q|^{2l}) \|F u_2^0\| \leq C_{11} (1 + |\xi|^{2l-2m} + |q|^{2l-2m}) \|F L_2 f_2\|^2.$$

Проинтегрировав по ξ по всему R^n , получим

$$\|u_1^0\|_{L, R^n} \leq C_{12} \|L_1 f_1\|_{L, R^n}$$

$$\|u_2^0\|_{L, R^n} \leq C_{12} \|L_2 f_2\|_{L, R^n}.$$

Так как u_1^0 и u_2^0 принадлежат $W_2^l(R^n)$, то их сужения на R^n (соответственно на R_+^n) принадлежат $W_2^l(R^n)$ ($W_2^l(R_+^n)$), так что согласно (1.16)

$$\|u_1^0\|_{L, R_+^n} \leq C_{12} \|f_1\|_{L-2m, R_+^n}, \quad (3.17)$$

$$\|u_2^0\|_{L, R_+^n} \leq C_{12} \|f_2\|_{L-2m, R_+^n}. \quad (3.18)$$

Положим

$$u^0(x, q) = \begin{cases} u_1^0(x, q), & (x_n < 0) \\ u_2^0(x, q), & (x_n > 0). \end{cases}$$

и

$$u(x, q) = u^0(x, q) + w(x, q); \quad w(x, q) = \begin{cases} w_1(x, q), & (x_n < 0) \\ w_2(x, q), & (x_n > 0). \end{cases}$$

Тогда функция $w(x, q)$ будет удовлетворять уравнениям

$$A^1(D_x, q) w_1(x, q) = 0,$$

$$A^2(D_x, q) w_2(x, q) = 0,$$

а при $x_n = 0$ — граничным условиям

$$B_j(D_x, q) w_1(x, q)|_{x_n \rightarrow -0} + C_j(D_x, q) w_2(x, q)|_{x_n \rightarrow +0} = g_j(x', q) - \\ - g_j^0(x', q), \quad (j = 1, \dots, 2m)$$

где

$$g_j^0(x', q) = B_j(D_x, q) u_1^0(x, q)|_{x_n \rightarrow -0} + C_j(D_x, q) u_2^0(x, q)|_{x_n \rightarrow +0}.$$

Теперь достаточно получить оценку

$$\|w\|_l \leq C_{13} \sum_{j=1}^{2m} \|g_j - g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^*, \quad (3.19)$$

так как отсюда и из (3.17), (3.18) будет следовать

$$\|u\|_l \leq \|u^0\|_l + \|w\|_l \leq \|u_1^0\|_l + \|u_2^0\|_l + \|w\|_l \leq \\ \leq C_{13} (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2}^* + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^*),$$

но так же, как и при доказательстве второго из неравенств (3.9),

$$\|g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^* \leq C_{16} \|u^0\|_l \leq C_{17} (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m}).$$

Отсюда сразу следует первое из неравенств (3.9) и для завершения доказательства нам остается доказать оценку (3.19). Функция $v(\xi', x_n, q)$ из (3.4') является, по крайней мере, при почти всех ξ' и q устойчивым решением задачи (3.1') — (3.3'). Используя представление (3.4'), нетрудно найти вид функции

$$w(x, q) = \begin{cases} w_1(x, q) = (F')^{-1} \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{1,j}^-(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0), & (x_n < 0) \\ w_2(x, q) = (F')^{-1} \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0), & (x_n > 0). \end{cases} \quad (3.20)$$

Оценим сейчас выражение $\Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0)$. Для этого воспользуемся интегральным представлением канонического базиса (3.7):

$$\Omega_{2,j}^+ = \int_{\Gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^2(\xi', \lambda, q)}{M_{2,j}^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda.$$

Дифференцируя по x_n под интегралом α раз и делая замену переменных $\lambda = \lambda_1 \sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2}$, получим

$$\left| \frac{\partial^\alpha \Omega_{2,j}^+}{\partial x_n^\alpha} \right| \leq C_{18} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{\alpha - m_j} e^{-C_{18} x_n \sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2}}.$$

Интегрируя по x_n , имеем

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial^\alpha \Omega_{2,j}^+}{\partial x_n^\alpha} \right|^2 dx_n \leq C_{20} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{\alpha - m_j - 1/2}.$$

Теперь, если только $|q| \geq q_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha + \beta \leq l} |\xi'|^{2\beta} \int_0^\infty |D_{x_n}^\alpha \Omega_{2,j}^+|^2 dx_n + |q|^{2l} \int_0^\infty |\Omega_{2,j}^+|^2 dx_n &\leq \\ &\leq C_{21} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{l - m_j - 1/2} \leq C_{22} (1 + |\xi'|^{2l - 2m_j - 1} + |q|^{2l - 2m_j - 1}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Умножая обе части (3.21) на $\bar{g}_j(\xi', q) - \bar{g}_j^0(\xi', q)$ и интегрируя по ξ' , по определению нормы получим

$$\|(F')^{-1} \{ \Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0) \} \|_{l, R_+^n}^2 \leq C_{23} (\|g_j\|_{l-m_j-v_2}^2 + \|g_j^0\|_{l-m_j-v_2}^2).$$

Аналогично оценивается и выражение $\Omega_{1,j}^-(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0)$. Отсюда непосредственно следует оценка (3.19). Легко видеть, что функции

$$u_1(x, q) = \begin{cases} F^{-1} u_1^0 + \sum_{l=1}^{2m} (F')^{-1} |\mathfrak{Q}_{1,l}(\tilde{g}_l - \tilde{g}_l^0)|, & (x_n < 0) \\ 0, & (x_n > 0) \end{cases}$$

$$u_2(x, q) = \begin{cases} 0, & (x_n < 0) \\ F^{-1} u_2^0 + \sum_{l=1}^{2m} (F')^{-1} |\mathfrak{Q}_{2,l}^+(\tilde{g}_l - \tilde{g}_l^0)|, & (x_n > 0) \end{cases}$$

определяют решение задачи (3.1)–(3.3) при $f_1(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$, $f_2(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_-^n)$, $g_j(x', q) \in W_2^{l-m, l-1/2}(R^{n-1})$ и $q \in Q$, принадлежащее $W_2^l(R^n)$. Теорема доказана.

В случае одного уравнения

$$A(D_x, q)u(x, q) = f(x, q), \quad (3.22)$$

рассматриваемого в полупространстве $x_n > 0$ с граничными условиями при $x_n = 0$

$$R_j(D_x, q)u(x, q)|_{x_n=0} = \psi_j(x', q); \quad (j = 1, \dots, m), \quad (3.23)$$

где A и R_j , как и в теореме 1, — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами (порядок A равен $2m$, порядок R_j равен r_j) при следующих условиях:

Условие 1'. $A(\xi, q) \neq 0$ при $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$, $q \in Q$. При $n = 1$ дополнительно предполагается, что половина корней уравнения $A(\xi', \lambda, q) = 0$ лежит в верхней полуплоскости, а половина — в нижней.

Условие 2'. Задача

$$A(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v(\xi', x_n, q) = 0$$

$$R_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \psi_j(\xi', q) \\ (j = 1, \dots, m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений, верна

Теорема (М. С. Агранович, М. И. Вишик [9]). При ненулевых $q \in Q$ для любых $f \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$, $\psi_j \in W_2^{l-r_j, l-1/2}(R^{n-1})$ существует одно и только одно решение $u(x, q)$ задачи (3.22), (3.23), принадлежащее $W_2^l(R_+^n)$. При этом имеет место оценка

$$\|u\|_l \leq C \|f\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|_{l-r_j-1/2} \leq C' \|u\|_l,$$

где нормы берутся по полупространству R_+^n .

§ 4. Рассмотрения предыдущего параграфа позволяют получить некоторые результаты для задачи (2.1') — (2.4') в областях Ω_1 и Ω_2 (обозначения и условия на Γ и Γ_1 см. § 1).

Рассмотрим уравнения

$$A^1(x, D_x, q)u_1(x, q) = f_1(x, q); \quad x \in \Omega_1 \quad (4.1)$$

$$A^2(x, D_x, q)u_2(x, q) = f_2(x, q); \quad x \in \Omega_2 \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$B_j(x, D_x, q)u_1(x, q)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, q)u_2(x, q)|_{\Gamma_1} = g_j(x'', q) \quad (4.3)$$

$$(j = 1, \dots, 2m), \quad x'' \in \Gamma_1$$

$$R_j(x, D_x, q)u_2(x, q)|_{\Gamma} = \psi_j(x', q), \quad (4.4)$$

$$(j = 1, \dots, m), \quad x' \in \Gamma$$

Предполагается, что коэффициенты операторов A^1 и B_j бесконечно гладки в $\bar{\Omega}_1$, а коэффициенты операторов A^2 , C_j , R_j в $\bar{\Omega}_2$. Порядки A^1 и A^2 равны $2m$, порядки B_j и C_j равны m_j , а порядок R_j равен r_j . Через A_0^1 , A_0^2 , B_{j0} , C_{j0} , R_{j0} будем обозначать главные части операторов A^1 , A^2 , B_j , C_j , R_j , параметр $q \in Q$. Потребуем выполнения следующих условий.

Условие 1. $A_0^i(x, \xi, q) \neq 0$ ($i = 1, 2$) при $x \in \Omega_i$, $q \in Q$, $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$. При $n = 1$ дополнительно предполагается, что корни многочленов $A_0^i(x, \lambda, q)$ ($i = 1, 2$) поровну распределяются между верхней и нижней полуплоскостью.

Условие 2.

а) Задача

$$A_0^1(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_1(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n < 0)$$

$$A_0^2(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n > 0)$$

с граничными условиями

$$B_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_1(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} +$$

$$+ C_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \tilde{g}_j(\xi', q); \quad (j = 1, \dots, 2m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ (см. § 3) для любых $\tilde{g}_j(\xi', q)$.

б) Задача

$$A_0^2(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n > 0)$$

$$R_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \bar{\psi}_j(\xi', q) \\ (j = 1, \dots, m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений для любых $\bar{\psi}_j(\xi', q)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда существует такое $q_0 > 0$, что при $|q| > q_0$ решение (4.1)–(4.4) существует при любых $f_1 \in W_2^{l-2m}(\Omega_1)$, $f_2 \in W_2^{l-2m}(\Omega_2)$, $g_j \in W_2^{l-m_j-1/2}(\Gamma_1)$, $\psi_j \in W_2^{l-r_j-1/2}(\Gamma)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_l \leq C (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2} + \\ + \sum_{j=1}^{2m} \|\psi_j\|_{l-r_j-1/2}) \leq C' \|u\|_l \quad (4.5)$$

(см. (1.18), (1.18')).

Теорема 3. Пусть $\Omega_2 = R^n / \bar{\Omega}_1$ и коэффициенты оператора $A^2(x, D_x, q)$ имеют конечный предел при $|x| \rightarrow \infty$, а именно, для любого коэффициента $\alpha(x)$ оператора A^2 выполнено

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha \quad (4.6)$$

и пусть выполнены условия 1 и 2а). Тогда задача

$$A^1(x, D_x, q) u_1(x, q) = f_1(x, q), \quad x \in \Omega_1$$

$$A^2(x, D_x, q) u_2(x, q) = f_2(x, q), \quad x \in \Omega_2 = R^n / \bar{\Omega}_1$$

$$B_j(x, D_x, q) u_1(x, q)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, q) u_2(x, q)|_{\Gamma_1} = g_j(x'', q) \\ (j = 1, \dots, 2m), \quad x'' \in \Gamma_1$$

имеет решение $u = u_1 + u_2 \in W_2^l(R^n)$ для любых $f_1 \in W_2^{l-2m}(\Omega_1)$, $f_2 \in W_2^{l-2m}(\Omega_2)$, $g_j \in W_2^{l-m_j-1/2}(\Gamma_1)$ и имеет место априорная оценка

$$\|u\|_l \leq C (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2}) \leq C' \|u\|_l. \quad (4.7)$$

Доказательство оценок (4.5) и (4.7) проводится с помощью известного метода локализации: берется конечное достаточно малое разбиение единицы области $\Omega_1 + \Omega_2$ (в случае теоремы 3 всего R^n)

$$\sum \varphi_j(x) \equiv 1$$

такое, что коэффициенты граничных операторов и операторов A^1 и A^2 в окрестности носителя каждой из $\varphi_j(x)$ близки к постоянным. После этого оценки (4.5) и (4.7) доказываются для функций $\varphi_j u$ и без труда

переносятся на функцию $u(x)$. Отметим, что в случае теоремы 3 в силу (4.6) во всем R^n можно построить требуемое конечное разбиение единицы, ибо можно выбрать достаточно большой шар S с центром в начале координат, такой, что вне этого шара коэффициенты оператора A^2 как угодно близки к постоянным. Если $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \dots, N$ — конечное разбиение единицы шара S , то полагаем

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in UV_j \\ 1 - \sum_{j=1}^N \varphi_j(x), & x \in UV_j \end{cases}$$

где V_j — носитель φ_j , получим требуемое конечное разбиение единицы всего R^n .

Для доказательства существования решения строится „почти обратный“ оператор (см. [3], [9]), который в локальных координатах выражается формулами вида (3.15), (3.16), если носитель φ_j не пересекает Γ (соответственно Γ_1), и вида (3.20), если носитель φ_j имеет общие точки с границей.

§ 5. Перейдем теперь к изучению задачи (2.1) — (2.5). Сначала рассмотрим случай однородных начальных условий: все $\varphi_k(x) = 0$.

Задачу (2.1) — (2.5) будем называть *параболической*, если задача (2.1') — (2.4'), где p заменено на q^{2m} , удовлетворяет условиям 1 и 2

§ 4. Условие 1 есть условие параболичности каждого из операторов A^1 и A^2 , а условие 2 эквивалентно условию Т. Я. Загорского [6].

Наша цель — получение теорем существования и единственности параболической смешанной задачи (2.1) — (2.5) в пространствах $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$. Для этого, воспользовавшись теоремами предыдущего параграфа, перенесем результаты теорем 2 и 3 на пространства $E_{l, 1/2b}(\gamma, Q)$. Потом, используя изоморфизм пространств $P_{l, 1/2b}$, $P_{\lambda, 1/2b}$ и $E_{l, 1/2b}$, $E_{\lambda, 1/2b}$ (см. § 1), получим теорему о разрешимости параболической смешанной задачи в пространствах $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$.

Теорема 4. Пусть задача (2.1') — (2.4'), где P заменено на q^{2b} удовлетворяет условиям 1 и 2 § 4. Пусть $l \geq \max(2m, m_1 + 1, r_1 + 1)$. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что решение задачи (2.1) — (2.4) существует при любых

$$F_1(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, Q_1), F_2(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, Q_2)$$

$$G_j(x'', p) \in E_{l-m_j-1/2, \frac{l-m_j-1/2}{2b}}(\gamma, \Gamma_1), \Psi_j(x', p) \in E_{l-r_j-1/2, \frac{l-r_j-1/2}{2b}}(\gamma, \Gamma)$$

и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|U\|_{l, 1/2b} &= \|U_1\|_{l, 1/2b} + \|U\|_{l, 1/2b} \leq C \left(\|F_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|F_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2m} \|G_j\|_{\mu, \frac{\mu}{2b}} + \sum_{j=1}^m \|\Psi_j\|_{\nu, \frac{\nu}{2b}} \right) \leq C' \|U\|_{l, 1/2b}. \\ (l-m_j-1/2 &= \mu, \quad l-r_j-1/2 = \nu). \end{aligned}$$

Функция $U(x, p)$ удовлетворяет (2.1') — (2.4') при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p с $\operatorname{Re} p = \gamma$.

Аналогичную теорему можно сформулировать и в случае, когда $\Omega_2 = R^n / \overline{\Omega}_1$.

Пусть теперь $u(x, t) \in P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ и γ произвольно. Легко проверить, что если $u(x, t)$ удовлетворяет (2.1) — (2.4), то

$$f_1(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_1), \quad f_2(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_2),$$

$$g_j(x'', t) \in P_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G'_1), \quad \psi_j(x', t) \in P_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G').$$

После преобразования Лапласа по t получаем задачу (2.1') — (2.4'), где в правых частях $F_1(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, \Omega_1)$, $F_2(x, p) \in$

$$\begin{aligned} &\in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, \Omega_2), \quad G_j(x'', p) \in E_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(\gamma, \Gamma_1), \quad \Psi_j(x', p) \in \\ &\in E_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(\gamma, \Gamma). \end{aligned}$$

Так как задача (2.1) — (2.5) — параболическая, то из теоремы 4, используя изоморфизм пространств $P_{l, 1/2b}$, $P_{\mu, \frac{\mu}{2b}}$ и $E_{l, 1/2b}$, $E_{\mu, \frac{\mu}{2b}}$, получаем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть (2.1) — (2.5) — параболическая задача и пусть $l \geq \max(2m, m_1 + 1, r_1 + 1)$. Тогда существует такое $\gamma > 0$,

что задача (2.1) — (2.5) имеет одно и только одно решение

$$u(x, t) \in P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G) \text{ при любых правых частях } f_1(x, t) \in$$

$$\in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_1), \quad f_2(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_2), \quad g_j(x'', t) \in$$

$$\in P_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G'_1), \quad \psi_j(x', t) \in P_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G'),$$

при этом справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{l, 1/2b} &\leq C \left(\|e^{-\gamma t} f_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|e^{-\gamma t} f_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|_{\mu, \frac{\mu}{2b}} + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|_{\nu, \frac{\nu}{2b}} \right) \leq C' \|e^{-\gamma t} u\|_{l, 1/2b}. \end{aligned}$$

В случае неоднородных начальных условий сформулируем условия согласованности правых частей $f_1, f_2, g_j, \psi_j, \varphi_k$: в области $\Omega \times (0, +\infty)$ существует такая функция $u_0(x, t)$, что

$$e^{-\gamma t} u_0(x, t) \in W_{x, l, \frac{l}{2}}^l(\Omega \times (0, +\infty)).$$

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad (k=0, \dots, \kappa-1)$$

и если $A^1 u_0 = f_1^0$ в Ω_1 , $A^2 u_0 = f_2^0$ в Ω_2 и

$$B_j u_0|_{S_{\Gamma_1}} + C_j u_0|_{S_{\Gamma_2}} = g_j^0, \quad R_l u_0|_{S_{\Gamma}} = \psi_j^0,$$

то после продолжения функций $f_1 - f_1^0$, $f_2 - f_2^0$, $g_j - g_j^0$, $\psi_j - \psi_j^0$ нулем при $t < 0$ имеет место

$$e^{-\gamma t} [f_1 - f_1^0] \in W_{x, t, 2}^{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\Omega_1 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [f_2 - f_2^0] \in W_{x, t, 2}^{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\Omega_2 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [g_j - g_j^0] \in W_{x, t, 2}^{p, \mu/2b}(\Gamma_1 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [\psi_j - \psi_j^0] \in W_{x, t, 2}^{r, \nu/2b}(\Gamma \times (0, +\infty)).$$

Теорема 6. Пусть (2.1)–(2.5) – параболическая задача, $l/2b$ – целое, $l > \max(2m, m_j + 1, r_j + 1)$ – целое. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что при любых $f_1, f_2, g_j, \psi_j, \varphi_k$, удовлетворяющих условию согласованности, существует одно и только одно решение задачи (2.1)–(2.5), причем $e^{-\gamma t} u(x, t) \in W_{x, t, 2}^{l, l/2b}(G)$ и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{l, l/2b} &\leq C \left(\|e^{-\gamma t} f_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|e^{-\gamma t} f_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|_{p, \mu/2b} + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|_{r, \nu/2b} + \sum_{k=0}^{\kappa-1} \|\varphi_k\|_{l-2b, k-b} \Big) \leq \\ &\leq C' \|e^{-\gamma t} u\|_{l, l/2b}. \end{aligned}$$

Аналогичную теорему существования и единственности параболической задачи в соответствующих пространствах можно сформулировать и для области Ω^T , T – конечное.

В заключение выражаю благодарность проф. М. И. Вишику за постановку задачи и ценные указания.

Московский энергетический институт

Поступила 24 IV 1964

Ա. Գ. ԳՅՈՒԼՄԻՍԱՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԽԶՎՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ՊԱՐԱՖՈՒԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ լ

Գլանալին տիրույթում գիտվում է ըստ Պետրովսկու գծալին 2b – պարաբոլիկ 2m կարգի խզվող գործակիցներով հավասարումը:

Այն մակերևույթների վրա, որտեղ խզվում են հավասարման գործակիցները և դրանի կոդմային մակերևույթի վրա տրվում են եզրային պայմանները: Փամանակի սկզբնական մոմենտին տրվում են Կոշու պայմանները:

Ենթադրելով խնդիրը «պարարդիկուլյան» պայմանին և պահանջելով համաձայնեցվածություն հավասարման ու եզրային պայմանների աջ մասերի և Կոշու տվյալների միջև, ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, Л., 1950.
2. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их применение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. ЛГПИ им. А. И. Герцена. Уч. зап. физ.-мат. фак., 197, 1958, 54—112.
3. Агранович М. С., Вишик М. И. Краевые задачи для параболических уравнений. УМН, 19, вып. 4, 1964, 53—161.
4. Петровский И. Г. О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. МГУ, секция А I, вып. 7, 1938, 1—72.
5. Агранович М. С., Вишик М. И. Параболические граничные задачи. УМН, 18, вып. 1, 1963, 206—207.
6. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений параболического типа. Львов, 1961.
7. Эйдельман С. Д. О краевых задачах для параболических систем в полупространстве. ДАН, 142, № 4, 1962, 812—814.
8. Слободецкий Л. Н. Оценки решений эллиптических и параболических систем. ДАН, 120, № 3, 1958, 468—471.
9. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические граничные задачи, зависящие от параметра. ДАН, 149, № 2, 1963, 223—226.
10. Ройтберг Я. А., Шифтель З. Г. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. ДАН, 148, № 5, 1963, 1034—1037.
11. Шифтель З. Г. Разрешимость в L_p и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. УМН, 19, вып. 4, 1964, 230—232.