

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. В. БАДАЛЯН

ПОЛУЧЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ

1. Ныне в электронной оптике широкое применение получили аксиально-симметричные магнитные поля, создаваемые короткими, безжелезными катушками. Такие соленоидальные катушки, однако, обладают рядом недостатков: заметная сферическая абберация, не лучшая форма аксиально-симметричного поля, большое рассеянное поле, отсутствие экранировки от посторонних полей и, наконец, значительная потребляемая мощность и вес.

Кельман, Перегуд и Скопина [1] предложили другую конструкцию магнитной линзы, не обладающую перечисленными недостатками. В этом случае поле, имеющее наперед заданное осевое распределение, создается катушкой с распределенной намоткой. Экранирование линзы осуществляется с помощью железной трубы, надеваемой поверх обмотки, причем при расчете обмотки ферромагнетик не принимается во внимание.

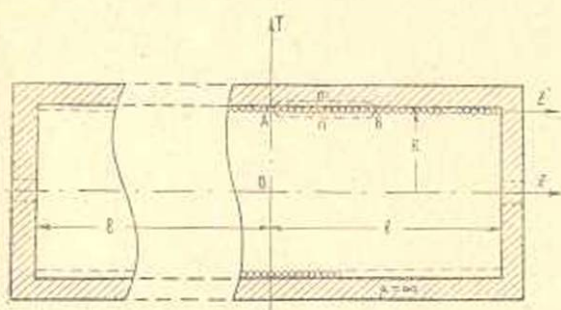
В недавно вышедшей работе Захарова [2] предлагается интересный численный метод определения распределения плотности ампер-витков по длине воздушной катушки для получения заданного осевого распределения магнитного поля.

Как в упомянутых, так и в других работах расчет поля ведется с использованием закона Био-Савара, причем решение обратной задачи проводится или с применением обратных преобразований Лапласа (см. [3]), или используя разные искусственные приемы. В настоящей работе сделана попытка подойти к решению таких задач иначе, с непосредственным учетом присутствия железа. Задача будет решаться привлечением теории скалярного магнитного потенциала для рассматриваемой электромагнитной системы при определенных граничных условиях (см. [4—6]).

2. Пусть имеется ферромагнитный цилиндр конечной длины с конечной толщиной стенок. Будем рассматривать несколько упрощенный вариант, когда торцы цилиндра также закрыты железом* (фиг. 1). Непосредственно на внутренней боковой поверхности железного ци-

* Просверление отверстий малого диаметра в торцах магнитной линзы для пропускания пучка частиц, по-видимому, не внесет заметных искажений магнитного поля.

линтра „наматываются“ круговые ампер-витки. Ток во времени постоянный. Требуется, задаваясь определенной плотностью распределения ампер-витков по длине магнита, $n(z')$, найти соответствующее



Фиг. 1. Продольный разрез магнита и система координат.

аксиальносимметричное магнитное поле в полости внутри сердечника. Выбираем цилиндрическую систему координат с началом в центре поля. Магнитное поле внутри линзы характеризуется скалярным магнитным потенциалом ψ , являющимся решением уравнения Лапласа. В цилиндрической системе координат при аксиальной симметрии

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Данное дифференциальное уравнение решается методом разделения радиальных и осевых переменных. Решение уравнения для физического реального поля (без расхождений) имеет вид [4]

$$\psi = (A \cos \lambda z + B \sin \lambda z) I_0(\lambda r), \quad (2)$$

где $I_0(\lambda r)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента,

λ — параметр разделения (собственное значение уравнения),

A, B — постоянные интегрирования.

Для определения постоянных, а также спектра значений λ , применим граничные условия:

а) при $z = 0$, $H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ из-за симметрии задачи, откуда $A = 0$,

б) при $z = l$ (см. фиг. 1) силовые линии из-за условия $r \gg 1$ входят в торцы перпендикулярно к железу (железо как эквипотенциальная поверхность), поэтому также

$$H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

В результате этого имеем

$$\sin \lambda l = 0, \quad (3)$$

откуда следует спектр возможных значений λ :

$$\lambda = \frac{k\pi}{l}, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Полное выражение для магнитного скалярного потенциала будет, очевидно, иметь вид

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi z}{l} I_0 \left(\frac{k\pi r}{l} \right). \quad (4)$$

Амплитуды B_k определяются методом отыскания коэффициентов Фурье-компонент.

Действительно, выражение потенциала на цилиндрической граничной ($r = R$) поверхности поля дает

$$\psi_{z'} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi z'}{l} I_0 \left(\frac{k\pi R}{l} \right) = -0,4\pi N(z'). \quad (5)$$

Нетрудно показать, что функция $N(z')$ есть не что иное как интегральное распределение ампер-витков на граничной цилиндрической поверхности.

В самом деле, руководствуясь соображениями, аналогичными в работе [5], для контура $AmBn$ (фиг. 1) можно написать

$$\oint_{AmBn} \vec{H} d\vec{l} = 0,4\pi \int_{AB} n(z') dz', \quad (6)$$

где коэффициент $0,4\pi$ введен из-за применения практической системы единиц.

Далее, допуская для ферромагнетика $\mu \gg 1$ и пренебрегая интегралом $\int_{AmB} \vec{H} d\vec{l}$, получим

$$\int_{BnA} \vec{H} d\vec{l} = \psi_A - \psi_B = 0,4\pi \int_{AB} n(z') dz'. \quad (7)$$

Потенциал в точке A ($z' = 0$) можно для удобства приравнять нулю, тогда окончательно

$$\psi_B = \psi_{z'} = -0,4\pi \int_0^{z'} n(z') dz' = -0,4\pi N(z'). \quad (8)$$

Умножая обе части равенства (5) на $\sin \frac{k\pi z'}{l}$ и интегрируя по z' от 0 до l , в результате ортогональности тригонометрических функций получим

$$B_k = -\frac{2 \cdot 0,4\pi}{l \cdot I_0 \left(\frac{k\pi R}{l} \right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z') dz'. \quad (9)$$

Окончательно, полный вид скалярного магнитного потенциала будет

$$\psi = -\frac{0,8\pi}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{k\pi z}{l} \frac{I_0 \left(\frac{k\pi r}{l} \right)}{I_0 \left(\frac{k\pi R}{l} \right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z') dz'. \quad (10)$$

Составляющие напряженности магнитного поля внутри линзы будут соответственно

$$H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{0,8\pi}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} \frac{I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z') dz', \quad (11)$$

$$H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{0,8\pi}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi z}{l} \frac{I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z') dz'. \quad (12)$$

Последние формулы дают возможность по заданному распределению плотности ампер-витков $n(z') = \frac{dN(z')}{dz'}$ определить поле в любой точке пространства внутри магнита.

3. На практике наиболее ценна постановка обратной задачи: найти тот закон распределения плотности ампер-витков, при котором получается заданное требуемое поле. При этом, разумеется, речь идет о получении полей, которые заведомо удовлетворяют уравнению Лапласа и граничным условиям.

Для решения обратной задачи воспользуемся граничным условием (8). Дифференцируя его по z' , получим

$$\frac{\partial \psi_{z'}}{\partial z'} = -0,4\pi n(z'), \quad (13)$$

но $\frac{\partial \psi_{z'}}{\partial z'} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{r=R} = -H_z(R, z')$, следовательно,

$$n(z') = \frac{1}{0,4\pi} H_z(R, z'). \quad (14)$$

Получается простая и наглядная связь между распределением ампер-витков и формой поля.

Отметим, что имея аналитическое выражение одной из составляющих магнитного поля, вторую составляющую мы автоматически найдем из условия $\text{rot } \vec{H} = 0$, а именно

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}. \quad (15)$$

4. В качестве примера рассмотрим получение поля типа

$$H_z(r, z) = H_0 I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right) \cos \frac{k\pi z}{l}, \quad (16)$$

где H_0 — поле в центре, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В соответствии с (15), радиальная составляющая поля

$$H_r(r, z) = H_0 I_0 \left(\frac{k\pi r}{l} \right) \sin \frac{k\pi z}{l}. \quad (17)$$

Выбранное поле удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, следовательно, для него можно применить вышевыведенные соотношения. Согласно уравнению (14), распределение ампер-витков для получения заданного поля будет

$$n(z') dz' = \frac{H_0}{0,4\pi} I_0 \left(\frac{k\pi R}{l} \right) \cos \frac{k\pi z'}{l} dz'. \quad (18)$$

При разных значениях параметра k получаем разные поля. Действительно,

а) $k=0$, $H_z = H_0$, $H_r = 0$ — однородное аксиально-симметричное поле (фиг. 2а),

а) $k=1, 2, \dots$ получаем синусоидальные периодические поля разной кратности с переменным знаком, причем поле с радиусом возрастает по Бесселю (фиг. 2б, в).

Можно рассматривать более сложный случай, когда выбранное поле представлено в виде суммы нескольких членов:

$$H_z(r, z) = \sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0 \left(\frac{k\pi r}{l} \right) \cos \frac{k\pi z}{l}. \quad (19)$$

Соответственно

$$H_r(r, z) = \sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0' \left(\frac{k\pi r}{l} \right) \sin \frac{k\pi z}{l}. \quad (20)$$

Согласно уравнению (14), требуемое распределение ампер-витков

$$n(z') dz' = \frac{1}{0,4\pi} \sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0' \left(\frac{k\pi R}{l} \right) \cos \frac{k\pi z'}{l} dz'. \quad (21)$$

Например, при $m=0$, $n=1$ имеем

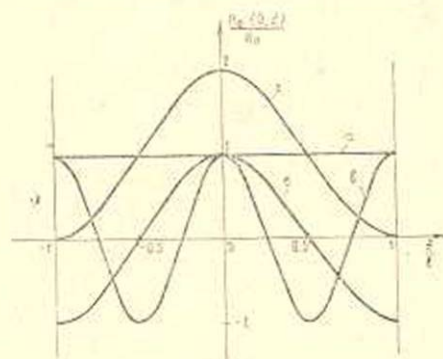
$$H_z(r, z) = H_0 \left[1 + I_0 \left(\frac{\pi r}{l} \right) \cos \frac{\pi z}{l} \right]. \quad (22)$$

Отсюда, распределение поля на оси ($r=0$) будет

$$H_z(0, z) = H_0 \left(1 + \cos \frac{\pi z}{l} \right), \quad H_r(0, z) = 0, \quad (23)$$

то есть плавное „колоколообразное“ распределение по оси без перехода через нуль (фиг. 2г).

Возможны также другие виды полей, которые мы здесь не будем рассматривать.



Фиг. 2. Различные формы распределения z -компоненты поля на оси магнита (обозначения — в тексте).

5. Резюмируя, можно сказать, что для рассмотренной замкнутой линзы точно можно рассчитать магнитное поле при заданном распределении ампер-витков, или наоборот, создавать определенный класс аксиальносимметричных магнитных полей с помощью соответствующего распределения ампер-витков.

Рассмотренные пространственно-модулированные поля находят и могут найти применение во многих областях электронной оптики: разного рода фокусировки, пространственная модуляция электронного пучка [7] и т. д.

Решение задачи для магнитной линзы с открытыми (не железными) торцами требует специального рассмотрения.

Автор приносит свою благодарность А. Ц. Амадуни, В. А. Джрбашяну, М. А. Задояну, Ю. Ф. Орлову и В. А. Шахбазяну за интерес к работе, ее обсуждение и помощь.

Физический институт ГКАЭ

г. Ереван

Получила 21 II 1964

2. Վ. ՔԱՐԱՅԱՆ

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՔՍԻԱԼ-ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՍՏԱՅՈՒՄԸ ՖԵՐՐՈՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աքսիալային մեջ օգտագործելով սկալար մագնիսական պոտենցիալի ապարատը որոշակի սահմանային պարամետրերի դեպքում, դիտարկված է հաստատուն տքիալ-սիմետրիկ մագնիսական դաշտերի ստացումը փակ ֆերրոմագնիսական սիստեմում:

Ստացված են դաշտի կոմպոնենտների և երկաթի ներքին սահմանային դիսկային մակերևույթի վրա ամպեր-դաշտերի բաշխման օրենքի միջև առնչություններ: Ասվածը ցուցադրված է մի շարք գործնական օրինակների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кельман В. М., Перегуд Б. П., Скопина В. И. Короткая магнитная линза с распределенной намоткой. ЖТФ, **29**, 1959, 1219.
2. Zacharov B. A method for the design of axially symmetric magnetic fields for image tube systems. Nucl. instrum. and meth., **17**, 1962, 132.
3. Глазер В. Основы электронной оптики, § 36, М., 1957.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., 1948.
5. Бадалян Г. В. Получение постоянных магнитных полей заданной формы с помощью неявнополюсной магнитной системы. ЖТФ, **33**, 1963, 345.
6. Азатян А. А., Бадалян Г. В., Ерицян Г. Н. Получение постоянных магнитных полей заданной формы. ИТЭ, № 3, 1963.
7. Маринин В. Г. Движение электронов в магнитном поле с пространственной модуляцией. ЖТФ, **33**, 1963, 518.