ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. МОВСИСЯН

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В рамках безмоментной теории изучается поведение цилиндрической оболочки при продольном ударе жесткой массой. Вопросы пластических деформаций и устойчивости здесь не затрагиваются. Случай, когда полубесконечная цилиндрическая оболочка ударяется о жесткую преграду, решен в [1].

Рассмотрим круговую ортотропную цилиндрическую оболочку длиной l и радиусом r. Главные направления упругости материала оболочки совпадают с линиями кривизны оболочки, которые выбраны в качестве координатных линий. Один из концов оболочки $(x=0)$ закреплен, а второй $(x=l)$ — свободен. Свободный конец оболочки подвергается удару в продольном направлении жесткой массой. Предполагается, что ударяющая нагрузка равномерно распределяется по свободному концу оболочки, а также, что после удара ударяющее тело все время движется вместе с оболочкой.

Принимая, что удар происходит без кручения, для уравнения движения элемента оболочки будем иметь [2] (с прибавлением инерционных членов)

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad T_1=c_{11}\frac{\partial u}{\partial x}-c_{12}\frac{w}{r},$$

$$T_2-rm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad T_2=c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}-c_{12}\frac{w}{r}, \tag{1}$$

где T_1 и T_2 — усилия в продольном и круговом направлениях, u и w — перемещения в направлении образующей и нормали к срединной поверхности соответственно, $m=\dfrac{h\gamma}{g}$ — масса оболочки единичной площади, x — координата в направлении образующей, t — время, а c_{ik} — имеют значения [2].

Уравнения движения в перемещениях будут

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{c_{11}}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{c_{22}}{rm}w-\frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{2}$$

По предположению на концах имеются следующие условия

$$u(0, t) = 0, \tag{3}$$

$$2\pi r T_1(l, t) = -\frac{P}{g}\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}, \tag{4}$$

где P — вес ударяющего тела.

Имеются также следующие начальные условия (если принять, что удар производится в момент $t = 0$)

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -v \quad \text{при} \quad x = l, \tag{6}$$

где v — скорость удара.

Систему (2) можно заменить одним уравнением, если принять

$$u = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{c_{22}}{r^2 m}\Phi,$$

$$w = \frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{7}$$

Тогда для неизвестной $\Phi(x, t)$ будем иметь

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} + a\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - b\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2} - c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{c_{22}}{r^2 m}, \qquad b = \frac{c_{11}}{m}, \qquad c = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{m^2 r^2}. \tag{9}$$

Решение (8) будем искать в виде

$$\Phi(x, t) = X(x)\,T(t), \tag{10}$$

тогда из (8) получим

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{11}$$

$$T^{\mathrm{IV}} + (a + b\lambda^2)\,T'' + c\lambda^2 T = 0, \tag{12}$$

где λ — пока неизвестная постоянная.

Краевые условия для (11) получим из (3) и (4) с учетом (10) и (12)

$$\begin{aligned} &X(0) = 0, \\ &X'(l) = Ml\lambda^2 X(l), \end{aligned} \tag{13}$$

где M — отношение веса ударяющего тела к весу оболочки.

Решение уравнения (11) после удовлетворения первому условию из (13) будет

$$X(x) = A\sin\lambda x. \tag{14}$$

Из второго условия (13) получим собственные значения λ, которые определяются из следующего уравнения

$$\varkappa_i \operatorname{tg} \varkappa_i = Q, \tag{15}$$

где $\varkappa_i = \lambda_i l$, а $Q = \frac{1}{M}$.

Решение уравнения (12) будет

$$T_i = c_1 \sin p_i t + c_2 \cos p_i t + c_3 \sin q_i t + c_4 \cos q_i t, \tag{16}$$

где

$$p_i^2 = -\frac{1}{2}\left[a + b\lambda_i^2 + \sqrt{(a + b\lambda_i^2)^2 - 4c\lambda_i^2}\right],$$

$$q_i^2 = -\frac{1}{2}\left[a + b\lambda_i^2 - \sqrt{(a + b\lambda_i^2)^2 - 4c\lambda_i^2}\right]. \tag{17}$$

То, что $T_i(t)$ действительно имеет вид (16), легко доказывается, если учесть, что $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geqslant 0$.

Начальные условия (5) с учетом (7) и (10) дадут

$$T(0) = T'(0) = T''(0) = 0. \tag{18}$$

Удовлетворяя (16) и условиям (18), получим

$$T_i(t) = c_i\left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i}\sin q_i t\right). \tag{19}$$

Из (10), (14) и (19) будем иметь

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{*}\left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i}\sin q_i t\right)\sin\frac{\varkappa_i x}{l}. \tag{20}$$

Постоянные A_i^{*} определяются из еще не использованного условия (6).

Известно [3], что если

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\varkappa_n x}{l}, \tag{21}$$

где $\varkappa_n$ — корни уравнения вида (15), то коэффициенты разложения определяются формулой

$$c_n = \frac{4}{l}\,\frac{\varkappa_n}{2\varkappa_n + \sin 2\varkappa_n}\int_0^l \omega(\zeta)\cos\frac{\varkappa_n \zeta}{l}\,d\zeta. \tag{22}$$

Чтобы получить наш случай, достаточно продифференцировать (21). Кроме того, надо иметь в виду, что $\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} = 0$ при $t = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l - \delta$ и $\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} = -v$ при $l - \delta \leqslant x \leqslant l$ (как видно из (6), (10) и (18)).

В пределе, когда δ стремится к нулю, для A_i^* получим

$$A_i^* = \frac{4v \cos \varkappa_i}{p_i (p_i^2 - q_i^2)(2\varkappa_i + \sin 2\varkappa_i)}. \tag{23}$$

Таким образом,

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4v \cos \varkappa_i}{p_i (p_i^2 - q_i^2)(2\varkappa_i + \sin 2\varkappa_i)} \left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i} \sin q_i t \right) \sin \frac{\varkappa_i x}{l}. \quad (2$$

Имея выражение для $\Phi(x, t)$, по формулам (1) и (7) можно определить усилия и перемещения оболочки, вызванные ударом.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 II 19

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է օրթոտրոպ գլանային թաղանթ, որը ենթարկվում է երկայնական հարվածի կոշտ մարմնի միջոցով։ Խնդիր դիտարկվում է առաձգականության սահմաններում անմոմենտ տեսությամբ։

Ծիգերի և տեղափոխությունների գտնելը բերվում է մի ֆունկցիայի որոշ- ման, որի համար տեղի ունի (24) արտահայտությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berkowitz H. M.* Longitudinal Impact of a Semi-Infinite Elastic Cylindrical Shel Journal of applied mechanics, **30**, (series E) number 3, 1963.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Крылов А. Н.* Собрание трудов, т. III, часть 2. Издательство АН СССР, 1949.