

Т. Т. Хачатурян

К теории изгиба и сжатия толстых плит

1. В работе приводятся дополнения к исследованиям А. И. Лурье [1] и В. З. Власова [2], посвященным решению задачи о толстой плите, находящейся под действием нормальных нагрузок q_1 и q_2 , приложенных к ее торцевым плоскостям:

$$\begin{aligned} \sigma_z = q_1, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = h \\ \sigma_z = q_2, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = -h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Применяя символический способ интегрирования уравнений теории упругости, цитированные авторы приводят решение задач о сжатии и об изгибе неограниченного слоя к интегрированию следующих двух уравнений:

$$\left(1 + \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) d^2 F = \frac{q_1 + q_2}{4G} \quad (\text{для сжатия}), \quad (1.2)$$

$$\left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) d^2 \phi = \frac{q_1 - q_2}{4Gh} \quad (\text{для изгиба}), \quad (1.3)$$

где F и ϕ являются функциями координат x, y ,

$$d^2 = \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2; \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Для задачи о толстой плите с торцевыми условиями (1.1) А. И. Лурье рекомендует пользоваться частными решениями уравнений (1.2) и (1.3) и общими решениями в виде должным образом подобранных бигармонических функций, позволяющих удовлетворить краевым условиям на боковой поверхности плиты. В. З. Власов рекомендует пользоваться в качестве полного решения задач о плите суммой частного и общего решений одного и того же уравнения (1.2) (при сжатии) или (1.3) (при изгибе). В настоящей статье показывается, что при помощи одних только функций F и ϕ (рекомендацией В. З. Власова) можно решить ограниченное количество задач (например, задачи об осесимметрично деформированной круглой плите). Далее показывается, что интегралы уравнений Ляме, удовлетворяющие торцевым условиям (1.1), могут быть выражены через четыре функции $F(x, y)$.

$f(x, y)$ и $\phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ являющиеся общими решениями уравнений (1.2), (1.3) и следующих двух уравнений:

$$d \sin h d f = 0 \quad \cos h d \varphi = 0. \quad (1.5)$$

На основании (1.2), (1.3) и (1.5) в статье приводятся варианты корректных приближенных теорий изгиба и сжатия плит, в которых соответствующим выбором функций F , f , ϕ и φ удовлетворяются смягченные краевые условия на боковой поверхности плиты. Подробно рассматриваются варианты приближенных теорий изгиба плит с краевыми условиями Кирхгоффа и Пуассона и даются их сравнения с вариантами Е. Рейсснера [3], Х. М. Муштари [4], С. А. Амбарцумяна [5] и Б. Ф. Власова [6].

2. Общие интегралы уравнений Ляме

При отсутствии объемных сил уравнения Ляме можно представить так:

$$\ddot{u} + d^2 u = -\frac{1}{1-2\mu} \partial_1 \dot{\theta}, \quad \ddot{w} + d^2 w = -\frac{1}{1-2\mu} \dot{\theta}, \quad (2.1)$$

$$\ddot{v} + d^2 v = -\frac{1}{1-2\mu} \partial_2 \dot{\theta}, \quad \ddot{\theta} + d^2 \theta = 0,$$

где μ — коэффициент Пуассона, θ — относительная объемная деформация,

$$\theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \dot{w}. \quad (2.2)$$

Точки над перемещениями u , v , w и деформацией θ означают частные производные этих величин по координате z , символы ∂_1 , ∂_2 и d^2 имеют смысл (1.4).

В символическом виде интеграл последнего уравнения (2.1) можно представить так [1]

$$\theta = \cos zdA + \frac{\sin zd}{d} B, \quad (2.3)$$

где A и B — функции координат x , y .

Внеся (2.3) в остальные три уравнения системы (2.1) и интегрируя их, находим общие решения уравнений Ляме в таком виде:

$$\begin{aligned} u &= \cos zdA_1 + \frac{\sin zd}{d} B_1 + \frac{z}{2-4\mu} \partial_1 \left(\frac{\cos zd}{d^2} B - \frac{\sin zd}{d} A \right), \\ v &= \cos zdA_2 + \frac{\sin zd}{d} B_2 + \frac{z}{2-4\mu} \partial_2 \left(\frac{\cos zd}{d^2} B - \frac{\sin zd}{d} A \right), \\ w &= \cos zdA_3 + \frac{\sin zd}{d} B_3 - \frac{z}{2-4\mu} \left(\cos zdA + \frac{\sin zd}{d} B \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A_i , B_i ($i=1, 2, 3$) — новые функции координат x , y . Внеся (2.4) в (2.2) и имея ввиду (2.3), получаем:

$$A = \frac{2-4\nu}{3-4\nu} (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + B_3), \quad B = \frac{2-4\nu}{3-4\nu} (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 - d^2 A_3). \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) видно, что общие интегралы уравнений (2.1) будут содержать шесть функций координат x, y : A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 . Вычисляя напряжения $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ и пользуясь условиями (1.1), получим следующие шесть уравнений, из которых следует определить указанные функции:

$$\cos hd (B_1 + \partial_1 A_3) + \frac{1}{2-4\nu} \frac{\partial_1}{d^2} (\cos hd - 2hd \sin hd) B = 0,$$

$$\cos hd (B_2 + \partial_2 A_3) + \frac{1}{2-4\nu} \frac{\partial_2}{d^2} (\cos hd - 2hd \sin hd) B = 0, \quad (2.6)$$

$$d \sin hd A_3 + \frac{h}{2-4\nu} \left(\cos hd - \frac{1-2\nu}{hd} \sin hd \right) B = -\frac{q_1 - q_2}{4G};$$

$$\frac{\sin hd}{d} (\partial_1 B_3 - d^2 A_1) - \frac{1}{2-4\nu} \frac{\partial_1}{d} (\sin hd + 2hd \cos hd) A = 0,$$

$$\frac{\sin hd}{d} (\partial_2 B_3 - d^2 A_2) - \frac{1}{2-4\nu} \frac{\partial_2}{d} (\sin hd + 2hd \cos hd) A = 0, \quad (2.7)$$

$$\cos hd B_3 + \frac{1}{2-4\nu} [hd \sin hd - (1-2\nu) \cos hd] A = \frac{q_1 + q_2}{4G}.$$

Задача приводится к интегрированию двух систем уравнений (2.6) и (2.7), в каждую из которых входят по три искомых функции.

Система (2.6) описывает задачу изгиба слоя, система (2.7) — сжатие слоя.

Для интегрирования уравнений (2.6) и (2.7) удобно заменить функции A_i, B_i новыми функциями, относительно которых эти уравнения будут иметь более простую структуру. С этой целью вводим в рассмотрение четыре новых функции P_1, P_2, Q_1, Q_2 , которые связаны с функциями A_i, B_i соотношениями:

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 - d^2 A_3 = -(3-4\nu) d^2 Q_1, \quad A_3 = P_1 + (2-2\nu) Q_1, \quad (2.8)$$

$$\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + B_3 = -(3-4\nu) d^2 Q_2, \quad B_3 = -d^2 [P_2 + (2-2\nu) Q_2]. \quad (2.9)$$

Из этих соотношений следует, что общие интегралы для функций A_i, B_i могут быть представлены так:

$$B_1 = \partial_1 [P_1 - (1-2\nu) Q_1] + \partial_2 \phi_1,$$

$$B_2 = \partial_2 [P_1 - (1-2\nu) Q_1] - \partial_1 \phi_1, \quad (2.10)$$

$$A_3 = P_1 + (2-2\nu) Q_1;$$

$$A_1 = \partial_1 [P_2 - (1-2\nu) Q_2] + \partial_2 \phi_2,$$

$$A_2 = \partial_2 [P_2 - (1-2\nu) Q_2] - \partial_1 \phi_2, \quad (2.11)$$

$$B_3 = -d^2 [P_2 + (2-2\nu) Q_2],$$

где ψ_1, ψ_2 — новые произвольные функции координат x, y . Вместо (2.5) теперь будем иметь

$$A = -(2 - 4\alpha) d^2 Q_2, \quad B = -(2 - 4\alpha) d^2 Q_1, \quad (2.12)$$

Подставив (2.10)–(2.12) в (2.6) и (2.7), получим более удобные для интегрирования уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_2 [\cos hd\psi_1] + \partial_1 [2 \cos hdP_1 + 2hd \sin hdQ_1] &= 0, \\ -\partial_1 [\cos hd\psi_1] + \partial_2 [2 \cos hdP_1 + 2hd \sin hdQ_1] &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$d \sin h dP_1 + d [\sin hd - hd \cos hd] Q_1 = -\frac{q_1 - q_2}{4G};$$

$$\begin{aligned} \partial_2 [d \sin hd\psi_2] + \partial_1 [2d \sin hdP_2 - 2hd^2 \cos hdQ_2] &= 0, \\ -\partial_1 [d \sin hd\psi_2] + \partial_2 [2d \sin hdP_2 - 2hd^2 \cos hdQ_2] &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$d^2 \cos hdP_2 + d^2 [\cos hd + hd \sin hd] Q_2 = -\frac{q_1 + q_2}{4G}.$$

Приведем подробные выкладки, связанные с интегрированием системы (2.13). Интегрирование системы (2.14) производится аналогичным образом, поэтому ниже для последней системы ограничимся выписыванием окончательных результатов.

Из первых двух уравнений системы (2.13) следует, что члены, заключенные в квадратные скобки, будут сопряженными гармоническими функциями (α_1 и α_2).

Поэтому:

$$\cos hd\psi_1 = \alpha_1, \quad \cos hdP_1 + hd \sin hdQ_1 = \frac{1}{2} \alpha_2. \quad (2.15)$$

Для гармонической функции γ имеют место равенства

$$\cos h d\gamma = \gamma, \quad d \sin h d\gamma = 0. \quad (2.16)$$

Поэтому, введя обозначения

$$\psi_1 = \alpha_1 + \varphi, \quad P_1 = \frac{1}{2} \alpha_2 + R_1, \quad (2.17)$$

из (2.15) и последнего уравнения (2.13) находим:

$$\cos h d\varphi = 0, \quad (2.18)$$

$$\cos h dR_1 + hd \sin h dQ_1 = 0,$$

$$d^2 \left[\frac{\sin h d}{hd} R_1 + \left(\frac{\sin h d}{hd} - \cos h d \right) Q_1 \right] = -\frac{q_1 - q_2}{4Gh}. \quad (2.19)$$

(2.18) будет одним из основных уравнений и функция φ ниже войдет во все расчетные формулы.

Частные решения последних двух уравнений (2.19) можно брать в виде:

$$Q_1 = \cos h d \phi, \quad R_1 = -h d \sin h d \phi, \quad (2.20)$$

где ϕ является решением уравнения:

$$\left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) d^2 \phi = \frac{q_1 - q_2}{4Gh}. \quad (2.21)$$

Покажем, что решения (2.20) будут общими решениями уравнений (2.19), если под функцией ϕ будем подразумевать общее решение уравнения (2.21).

Для однородных уравнений (2.19) имеем:

$$\cos h d R_1 + h d \sin h d Q_1 = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\sin h d}{h d} R_1 + \left(\frac{\sin h d}{h d} - \cos h d\right) Q_1 = \gamma,$$

где γ — произвольная гармоническая функция x, y . Подвергая первое из уравнений (2.22) операции $\cosh d$, второе — операции $h d \sin h d$, и сложив их, находим:

$$R_1 = -\sin^2 h d Q_1. \quad (2.23)$$

Внеся R_1 в первое уравнений (2.22), получим:

$$\left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) h d \sin h d Q_1 = 0. \quad (2.24)$$

Введем новую функцию ϕ_0 , связанную с Q_1 формулой

$$\frac{\sin h d}{h d} Q_1 = \phi_0. \quad (2.25)$$

Тогда (2.24) приводится к виду

$$\left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) d^2 \phi_0 = 0. \quad (2.26)$$

Выражение (2.23) переписывается теперь так

$$R_1 = -h d \sin h d \phi_0. \quad (2.27)$$

Из (2.25) и второго уравнения (2.22) имеем:

$$\sin h d Q_1 = h d \phi_0. \quad (2.28)$$

$$\cos h d Q_1 = \phi_0 - \sin^2 h d \phi_0 - \gamma.$$

Подвергая первое из этих уравнений операции $\sin h d$, второе — операции $\cos h d$, после их сложения получим:

$$Q_1 = \cos h d \phi_0 - \gamma + \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) h d \sin h d \phi_0. \quad (2.29)$$

Последнее слагаемое правой части (2.29) в силу (2.26) равно нулю. Далее, включив гармоническую функцию γ в состав ϕ_0 (что имеем право делать согласно (2.27) и (2.26)), приходим к выводу, что одно-

родные решения (2.27), (2.29) и уравнения (2.26) соответственно совпадают с решениями (2.20) и уравнением (2.21). Следовательно, (2.20) будут общими решениями уравнений (2.19), где ϕ является общим решением уравнения (2.21).

Возвращаясь к первоначальным функциям (2.10), из (2.17) и (2.20) для них получим следующие общие решения (пользуемся также условиями сопряженности гармонических функций α_1 и α_2 : $\partial_2 \alpha_1 + \partial_1 \alpha_2 = 0$, $\partial_2 \alpha_2 - \partial_1 \alpha_1 = 0$):

$$B_1 = \partial_2 \varphi - \partial_1 [hd \sin hd + (1 - 2\mu) \cos hd] \phi - \frac{1}{2} \partial_1 \alpha_2,$$

$$B_2 = -\partial_1 \varphi - \partial_2 [hd \sin hd + (1 - 2\mu) \cos hd] \phi - \frac{1}{2} \partial_2 \alpha_2, \quad (2.30)$$

$$A_3 = [(2 - 2\mu) \cos hd - hd \sin hd] \phi + \frac{1}{2} \alpha_2,$$

$$B = -(2 - 4\mu) d^2 \cos hd \phi.$$

Покажем, что в решениях (2.30) гармоническая функция α_2 является лишней. Для этого внесем (2.30) в (2.4) и определим перемещения u , v , w , вызванные функциями B_1 , B_2 , A_3 и B . Получаем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sin zd}{d} B_1 + \frac{z}{2 - 4\mu} \partial_1 \frac{\cos zd}{d^2} B = \partial_2 \frac{\sin zd}{d} \varphi - \frac{1}{2} z \partial_1 \alpha_2 - \\ &\quad - \partial_1 \left[z \cos zd + h \sin zd \sin hd + (1 - 2\mu) \frac{\sin zd}{d} \cos hd \right] \phi, \\ v &= \frac{\sin zd}{d} B_2 + \frac{z}{2 - 4\mu} \partial_2 \frac{\cos zd}{d^2} B = -\partial_1 \frac{\sin zd}{d} \varphi - \frac{1}{2} z \partial_2 \alpha_2 - \\ &\quad - \partial_2 \left[z \cos zd + h \sin zd \sin hd + (1 - 2\mu) \frac{\sin zd}{d} \cos hd \right] \phi, \quad (2.31) \\ w &= \cos zd A_3 - \frac{z}{2 - 4\mu} \frac{\sin zd}{d} B = \frac{1}{2} \alpha_2 + [(2 - 2\mu) \cos zd \cos hd + \\ &\quad + zd \sin zd \cos hd - hd \cos zd \sin hd] \phi. \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что при замене функции ϕ через $\phi - \alpha_2/(4 - 4\mu)$ члены, содержащие гармоническую функцию α_2 , будут исключены. Следовательно, α_2 можно включить в состав ϕ , и тогда перемещения u , v , w будут определяться только через две функции ϕ и φ , являющиеся общими решениями уравнений:

$$\left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) \Delta^2 \phi = \frac{q_1 - q_2}{4Gh}, \quad \cos hd \varphi = 0. \quad (2.32)$$

Аналогичным образом доказывается, что перемещения u , v , w , вызванные функциями (2.11) (представляющими общие интегралы урав-

нений (2.7)), определяются через две другие функции F и f , которые сами являются общими решениями следующих уравнений:

$$\left(1 + \frac{\sin 2hd}{2hd}\right) d^2 F = \frac{q_1 + q_2}{4G}, \quad d \sin h d f = 0. \quad (2.33)$$

Выразив функции A_1, A_2, B_3 и A через F и f , внеся их значения в (2.4) и учитывая (2.31), окончательно будем иметь общие интегралы уравнений Ляме (2.1) в таком виде:

$$\begin{aligned} u &= \partial_2 \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right) - \partial_1 [(a_1 - \mu a_2) F + (b_3 - \mu b_1) \Phi], \\ v &= -\partial_1 \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right) - \partial_2 [(a_1 - \mu a_2) F + (b_3 - \mu b_1) \Phi], \\ w &= (a_3 - \mu a_1) F + (b_4 - \mu b_2) \Phi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В формулах (2.34) введены сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \sin zd \frac{\sin hd}{h}, \quad a_2 = -2 \cos zd \frac{\sin hd}{hd}, \\ a_3 &= d^2 \left[\frac{\sin zd}{d} \cos hd + 2 \frac{\sin zd}{hd} \cdot \frac{\sin hd}{hd} - \frac{z}{h} \cos zd \frac{\sin hd}{d} \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$a_4 = \cos zd \cos hd + \frac{z}{h} \sin zd \sin hd - \cos zd \cdot \frac{\sin hd}{hd};$$

$$b_1 = 2 \cos hd \frac{\sin zd}{d}; \quad b_2 = 2 \cos zd \cos hd,$$

$$b_3 = z \cos zd \cos hd + h \sin zd \sin hd + \cos hd \frac{\sin zd}{d}, \quad (2.36)$$

$$b_4 = 2 \cos zd \cos hd + zd \sin zd \cos hd - hd \cos zd \sin hd.$$

Индексы функциональных операторов (2.35) и (2.36) подобраны так, что четные индексы соответствуют четным операторам, нечетные индексы — нечетным операторам. Между этими операторами имеются дифференциальные зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial z} &= -d^2 a_2, & \frac{\partial b_1}{\partial z} &= b_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} &= a_1, & \frac{\partial b_2}{\partial z} &= -d^2 b_1, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} = d^2 (a_4 - a_2), \quad \frac{\partial b_3}{\partial z} = 2b_2 - b_4,$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial z} = 2a_1 - a_3, \quad \frac{\partial b_4}{\partial z} = d^2 (b_3 - b_1).$$

На основании (2.34) и (2.37) для напряжений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{2G} &= \partial_1 \partial_2 \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right) - (a_4 \partial_1^2 + \mu a_2 \partial_2^2) F - (b_2 \partial_1^2 + \mu b_1 \partial_2^2) \Phi, \\ \frac{\sigma_y}{2G} &= -\partial_1 \partial_2 \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right) - (a_4 \partial_2^2 + \mu a_2 \partial_1^2) F - (b_2 \partial_2^2 + \mu b_1 \partial_1^2) \Phi, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right) - \partial_1 \partial_2 [(a_4 - \mu a_2) F + (b_2 - \mu b_1) \Phi], \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \partial_3 (\cos zd \varphi - d \sin zd f) + \partial_1 [(a_3 - a_1) F + (b_4 - b_2) \Phi], \\ \tau_{yz} &= -\frac{1}{2} \partial_1 (\cos zd \varphi - d \sin zd f) + \partial_2 [(a_3 - a_1) F + (b_4 - b_2) \Phi], \\ \frac{\sigma_z}{2G} &= d^2 [(a_4 - a_2) F + (b_2 - b_1) \Phi].\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xz}}{2G} &= \frac{1}{2} \partial_3 (\cos zd \varphi - d \sin zd f) + \partial_1 [(a_3 - a_1) F + (b_4 - b_2) \Phi], \\ \frac{\tau_{yz}}{2G} &= -\frac{1}{2} \partial_1 (\cos zd \varphi - d \sin zd f) + \partial_2 [(a_3 - a_1) F + (b_4 - b_2) \Phi], \\ \frac{\sigma_z}{2G} &= d^2 [(a_4 - a_2) F + (b_2 - b_1) \Phi].\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = d^2 [(a_4 - a_2) F + (b_2 - b_1) \Phi].$$

Формулами (2.34), (2.38) и (2.39) даются общие решения для перемещений и напряжений задачи о неограниченном слое с торцевыми условиями (1.1). Эти формулы отличаются от соответствующих формул А. И. Лурье и В. З. Власова наличием дополнительных членов, содержащих функции φ и f . Необходимость введения указанных функций становится наглядной, если мы обратим внимание на выражения объемной деформации θ и нормального вращения ω_z . Из (2.34) получаем:

$$\theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \dot{w} = -(1 - 2\mu) d^2 (a_2 F + b_1 \Phi), \quad (2.40)$$

$$2\omega_z = \partial_1 v - \partial_2 u = -d^2 \left(\cos zd f + \frac{\sin zd}{d} \varphi \right).$$

Видно, что функции f и φ определяют нормальное вращение и не вызывают объемной деформации. Отсюда следует, что, если примем $f = \varphi = 0$ (по рекомендации В. З. Власова), то в рассматриваемой задаче должно быть $\omega_z = 0$, а это имеет место, например, в задачах об осесимметрично деформированной круглой плите. В общем случае $\omega_z \neq 0$, поэтому $\varphi \neq 0$, $f \neq 0$. Можно указать такие конкретные задачи, в которых следует ожидать, что функции φ и f внесут существенные поправки к перемещениям и напряжениям.

В практических приложениях синусы и косинусы, входящие в разрешающие уравнения (2.32) и (2.33) и в решения (2.34), (2.38) и (2.39), следует разложить по степеням своих аргументов и в полученных рядах, в зависимости от степени приближения, нужно удерживать несколько первых членов. При такой приближенной постановке задачи соответствующим выбором функций Φ , φ и F , f можно удовлетворить произвольные смягченные краевые условия на боковой по-

верхности плиты. Для этого порядок приближенных разрешающих уравнений, получаемых из (2.32) и (2.33), следует выбрать в соответствии с количеством смягченных краевых условий или же, наоборот, выбрав порядок названных уравнений, нужно сформулировать необходимые краевые условия. Ниже будут рассматриваться варианты приближенных теорий изгиба плит с краевыми условиями Пуассона и Кирхгофа, в которых будут использованы выражения усилий и моментов в поперечных сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Для этих величин получаем

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{4Gh} &= \partial_1 \partial_2 \frac{\sin hd}{hd} f + 2\mu \left(\frac{\sin hd}{hd} \right)^2 \partial_2^2 F, \\ \frac{T_2}{4Gh} &= -\partial_1 \partial_2 \frac{\sin hd}{hd} f + 2\mu \left(\frac{\sin hd}{hd} \right)^2 \partial_1^2 F,\end{aligned}\quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}\frac{S}{4Gh} &= \frac{1}{2} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \frac{\sin hd}{hd} f - 2\mu \left(\frac{\sin hd}{hd} \right)^2 \partial_1 \partial_2 F; \\ \frac{N_1}{4Gh} &= \frac{1}{2} \frac{\sin hd}{hd} \partial_2^2 \varphi - \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd} \right) \partial_1 \phi,\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\frac{N_2}{4Gh} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin hd}{hd} \partial_1^2 \varphi - \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd} \right) \partial_2 \phi; \\ \frac{M_1}{4Gh} &= -\frac{\partial_1 \partial_2}{a^2} \left(\cos hd - \frac{\sin hd}{hd} \right) \varphi - \\ &- \left[\frac{\partial_1^2 + \mu \partial_2^2}{a^2} \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd} \right) + \mu \frac{\partial_2^2}{a^2} \cos 2hd \right] \phi; \\ \frac{M_2}{4Gh} &= \frac{\partial_1 \partial_2}{a^2} \left(\cos hd - \frac{\sin hd}{hd} \right) \varphi - \\ &- \left[\frac{\partial_2^2 + \mu \partial_1^2}{a^2} \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd} \right) + \mu \frac{\partial_1^2}{a^2} \cos 2hd \right] \phi,\end{aligned}\quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}\frac{H}{4Gh} &= \frac{\partial_1^2 - \partial_2^2}{2d^3} \left(\cos hd - \frac{\sin hd}{hd} \right) \varphi - \\ &- \frac{\partial_1 \partial_2}{a^2} \left[\left(1 + \mu \right) \left(1 - \frac{\sin 2hd}{2hd} \right) + \mu \cos 2hd \right] \phi.\end{aligned}$$

В качестве геометрических величин, соответствующих условиям (2.41) и (2.42) и моментам (2.43), могут быть выбраны значения перемещений в точках срединной плоскости

$$u_0 = (u)_{z=0}, \quad v_0 = (v)_{z=0}, \quad w_0 = (w)_{z=0}.$$

и значения компонентов элементарного вращения срединной плоскости

$$\omega_1 = -(\omega_y)_{z=0}, \quad \omega_2 = (\omega_x)_{z=0}.$$

Из (2.34)–(2.36) для этих величин получаем выражения:

$$u_0 = \partial_2 f - \partial_1 \left(\cos hd - \frac{\sin hd}{hd} + 2\mu \frac{\sin hd}{hd} \right) F, \quad (2.44)$$

$$v_0 = -\partial_1 f - \partial_2 \left(\cos hd - \frac{\sin hd}{hd} + 2\mu \frac{\sin hd}{hd} \right) F,$$

$$\omega_0 = [(2 - 2\mu) \cos hd - hd \sin hd] \phi;$$

$$\omega_1 = (2 - 2\mu) \partial_1 \cos hd \phi - \frac{1}{2} \partial_2 \varphi, \quad (2.45)$$

$$\omega_2 = (2 - 2\mu) \partial_2 \cos hd \phi - \frac{1}{2} \partial_1 \varphi.$$

Выражения (2.41) и (2.44) содержат только функции F и f , из них получаются смягченные краевые условия в задаче сжатия плиты. Выражения (2.42), (2.43) и (2.45) содержат только функции ϕ и φ , они дают смягченные краевые условия в задаче изгиба плиты.

3. Рассмотрим некоторые варианты приближенных теорий изгиба плит, основываясь на приведенных выше результатах.

А. *Первое приближение. Теория изгиба тонких плит.* В разрешающих уравнениях (2.32) и выражениях для перемещений (2.34), напряжений (2.38)–(2.39) и в граничных условиях (2.42), (2.43), (2.45) при разложении синусов и косинусов в ряды ограничился точностью $\cos hd = 1$; $\sin hd = hd$, т. е. полагаем $1 + h^2 a^2 \approx 1$. Это приближение приводит нас к классической теории изгиба тонких плит с единственным дополнением, относящимся к закону изменения напряжения σ_z по толщине плиты (кубическая парабола). Из основных уравнений (2.32) получаем для ϕ уравнение четвертого порядка, совпадающее с уравнением Софи-Жермен, а для функции φ в этом приближении получаем $\varphi = 0$.

Б. *Уточненная теория первого приближения.* В указанном варианте А основное дифференциальное уравнение получается четвертого порядка, поэтому мы вынуждены перейти от краевых условий Пуассона к условиям Кирхгофа. Однако, можно освободиться от этого вынужденного шага, если учесть следующее обстоятельство. Приближением $R = \varphi + h^2 a^2 \varphi \approx \varphi$ можно пользоваться, если $R \neq 0$. Такое положение имеет место во всех уравнениях и формулах, перечисленных в пункте А, за исключением последнего из уравнения (2.32), где $R = 0$. Для этого уравнения нужно сохранить член порядка $h^2 a^2$ сравнительно с единицей. Учитывая эту поправку и заменив функцию ϕ прогибом w , мы получим уточненную теорию первого приближения, описываемую уравнениями ($\Delta^2 = \nabla^2$):

$$\nabla^4 w = \frac{q_1 - q_2}{D}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{2}{h^2} \varphi = 0. \quad (3.1)$$

Перемещения u и v будут определяться формулами:

$$u = -z(\partial_1 w - \partial_2 \varphi), \quad v = -z(\partial_2 w + \partial_1 \varphi). \quad (3.2)$$

Напряжения будут определяться через моменты и поперечные силы формулами:

$$\sigma_x = \frac{3}{2} \frac{M_1}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{3}{2} \frac{M_2}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{H}{h^3} z, \quad (3.3)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{N_1}{h}, \quad \tau_{yz} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{N_2}{h},$$

$$\sigma_z = \frac{1}{4} \frac{z}{h} \left(3 - \frac{z^2}{h^2} \right) (q_1 - q_2). \quad (3.4)$$

Моменты и поперечные силы определяются формулами:

$$M_1 = -D [\partial_1^2 w + \mu \partial_2^2 w - (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \varphi],$$

$$M_2 = -D (\partial_2^2 w + \mu \partial_1^2 w + (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \varphi), \quad (3.5)$$

$$H = -D(1 - \mu) \left[\partial_1 \partial_2 w + \frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) \varphi \right],$$

$$N_1 = -D \left(\partial_1 \nabla^2 w - \frac{1 - \mu}{h^2} \partial_2 \varphi \right),$$

$$N_2 = -D \left(\partial_2 \nabla^2 w + \frac{1 - \mu}{h^2} \partial_1 \varphi \right).$$

Для компонентов вращения получим выражения:

$$\omega_1 = \partial_1 w - \frac{1}{2} \partial_2 \varphi, \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \partial_2 w - \frac{1}{2} \partial_1 \varphi.$$

Решение задач в этом приближении приводится к интегрированию уравнений (3.1) при статических краевых условиях Пуассона и соответствующих кинематических условиях, налагаемых на w , ω_1 и ω_2 .

Изложенная в этом пункте приближенная теория изгиба плит весьма близка к теории Е. Рейсснера [3].

В. Вариант уточненной теории изгиба плит с краевыми условиями Пуассона. В перечисленных в пункте А уравнениях ограничимся точностью $1 + h^2 \nabla^2 + h^4 \nabla^4 \approx 1 + h^2 \nabla^2$, т. е. сравнительно с единицей отбросим величины порядка $h^4 \nabla^4$. Это приведет нас к следующим дифференциальным уравнениям для ψ и φ :

$$\left(1 - \frac{1}{5} h^2 \nabla^2\right) \nabla^4 \Phi = \frac{3}{8} \frac{q_1 - q_2}{G h^2}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{2}{h^2} \varphi = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку общий порядок уравнений (3.7) равен восьми, нужно сформулировать четыре статических и четыре геометрических краевых условия. Однако, порядок уравнений можно снизить до шести и, следовательно, пользоваться краевыми условиями Пуассона, если функцию Φ мы заменим новой функцией Φ_0 по формуле:

$$\Phi = \frac{1}{2 - 2\mu} \left(1 + \frac{1}{5} h^2 \nabla^2\right) \Phi_0. \quad (3.8)$$

В соответствии с принятой точностью вместо (3.7) теперь получаем:

$$\nabla^4 \Phi_0 = \frac{q_1 - q_2}{D}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{2}{h^2} \varphi = 0. \quad (3.9)$$

Перемещения и напряжения будут определяться через Φ_0 и φ формулами:

$$u = z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \partial_2 \varphi - z \partial_1 \left[1 - \left(\frac{2-\mu}{6-6\mu} z^2 - \frac{2+3\mu}{10-10\mu} h^2\right) \nabla^2\right] \Phi_0, \\ v = -z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \partial_1 \varphi - z \partial_2 \left[1 - \left(\frac{2-\mu}{6-6\mu} z^2 - \frac{2+3\mu}{10-10\mu} h^2\right) \nabla^2\right] \Phi_0. \quad (3.10)$$

$$w = \left[1 - \left(\frac{8-3\mu}{10-10\mu} h^2 - \frac{\mu}{2-2\mu} z^2\right) \nabla^2\right] \Phi_0;$$

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left[\partial_1^2 \Phi_0 + \mu \partial_2^2 \Phi_0 - \right. \\ \left. - \left(\frac{5z^2-3h^2}{15} \partial_1^2 + \mu \frac{5z^2+9h^2}{30} \partial_2^2\right) \nabla^2 \Phi_0 - (1-\mu) \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \partial_1 \partial_2 \varphi \right], \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left[\partial_2^2 \Phi_0 + \mu \partial_1^2 \Phi_0 - \right. \\ \left. - \left(\frac{5z^2-3h^2}{15} \partial_2^2 + \mu \frac{5z^2+9h^2}{30} \partial_1^2\right) \nabla^2 \Phi_0 - (1-\mu) \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) \partial_1 \partial_2 \varphi \right], \quad (3.11)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} z \left[\partial_1 \partial_2 \Phi_0 - \left(\frac{2-\mu}{6-6\mu} z^2 - \frac{2+3\mu}{10-10\mu}\right) \partial_1 \partial_2 \nabla^2 \Phi_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right) (\partial_1^2 - \partial_2^2) \varphi \right];$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{z^2-h^2}{2} \left[\partial_1 \left(1 - \frac{5z^2-h^2}{30} \nabla^2\right) \nabla^2 \Phi_0 - \frac{1-\mu}{h^2} \partial_2 \varphi \right],$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{z^2-h^2}{2} \left[\partial_2 \left(1 - \frac{5z^2-h^2}{30} \nabla^2\right) \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1-\mu}{h^2} \partial_1 \varphi \right] \quad (3.12)$$

$$\sigma_z = \frac{z}{h} \left[\frac{3h^2 - z^2}{4h^2} + \frac{6h^4 + z^4 - 7h^2 z^2}{40h^2} \nabla^2 \right] (q_1 - q_2).$$

Моменты и поперечные силы определяются формулами:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[\partial_1^2 \Phi_0 + \mu \partial_2^2 \Phi_0 - \frac{2}{5} \mu h^2 \partial_1^2 \nabla^2 \Phi_0 - (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \varphi \right], \\ M_2 &= -D \left[\partial_2^2 \Phi_0 + \mu \partial_1^2 \Phi_0 - \frac{2}{5} \mu h^2 \partial_2^2 \nabla^2 \Phi_0 + (1 - \mu) \partial_1 \partial_2 \varphi \right], \\ H &= -D (1 - \mu) \left[\partial_1 \partial_2 \Phi_0 + \frac{2\mu}{5 - 5\mu} h^2 \partial_1 \partial_2 \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) \varphi \right], \\ N_1 &= -D \left[\partial_1 \nabla^2 \Phi_0 - \frac{1 - \mu}{h^2} \partial_2 \varphi \right], \\ N_2 &= -D \left[\partial_2 \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1 - \mu}{h^2} \partial_1 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для прогиба и элементарных вращений при $z = 0$ получаются выражения:

$$\begin{aligned} w_0 &= \Phi_0 - \frac{8 - 3\mu}{10 - 10\mu} h^2 \nabla^2 \Phi_0, \\ w_1 &= \partial_1 \left(\Phi_0 - \frac{3}{10} h^2 \nabla^2 \Phi_0 \right) - \frac{1}{2} \partial_2 \varphi, \\ w_2 &= \partial_2 \left(\Phi_0 - \frac{3}{10} h^2 \nabla^2 \Phi_0 \right) - \frac{1}{2} \partial_1 \varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Решение задач по изложенному в этом пункте варианту теории приводится к интегрированию уравнений (3.9) при краевых условиях (3.13)–(3.15), после чего перемещения и напряжения в произвольной точке плиты будут определяться формулами (3.10)–(3.12). Сравнительно с вариантом Б здесь вносятся поправки, которые учитывают упругие явления вдали от контура плиты более точно, чем у контура плиты. Это следует из замены уравнений (3.7) уравнениями (3.9) и вызванной в связи с этим заменой четырех статических краевых условий тремя условиями Пуассона (с аналогичной заменой геометрических условий).

По своей точности изложенная в этом пункте приближенная теория весьма близка к варианту X. М. Муштари [4] и достаточно близка к варианту, предложенному С. А. Амбарцумяном [5] и Б. Ф. Власовым [6]. Последний из названных вариантов теории, основанный на последовательном учете влияния касательных напряжений в теории изгиба тонких плит, развит в ряде работ С. А. Амбарцумяна. В нашем изложении [7] этот вариант описывается уравнениями:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{q_1 - q_2}{D}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{5}{2} \frac{1}{h^2} \varphi = 0 \quad (3.15)$$

$$(3.20) \quad \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) (n-1) + \Phi_z \Delta \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) \left(\frac{z}{z^2} - \frac{\varepsilon}{z^2} \right) \frac{n-1}{1} - \right. \\ \left. - \Phi_z^1 \partial^1 \partial^1 + \Phi_z^2 \partial^1 \partial^1 \right] z \frac{n-1}{z} = \omega_z$$

$$(3.19) \quad \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) (n-1) - \Phi_z \Delta \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) \left(\frac{z}{z^2} - \frac{\varepsilon}{z^2} \right) \frac{n-1}{1} - \right. \\ \left. - \Phi_z^1 \partial^1 \partial^1 + \Phi_z^2 \partial^1 \partial^1 \right] z \frac{n-1}{z} = \omega_z$$

$$(3.18) \quad \left[\Phi_z \Delta \left(\frac{z}{z^2} - \frac{\varepsilon}{z^2} \right) \frac{n-1}{1} - \Phi \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) z - \omega \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi \left(\frac{z}{z^2} - \frac{\varepsilon}{z^2} \right) \frac{n-1}{1} - \Phi \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \left(\frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - 1 \right) z - \omega \right] \right] z = \omega$$

преобразования в области внешнего и внутреннего

$$(3.17) \quad \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \frac{z}{1} - \left[\Phi_z \Delta \frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - \frac{10-10}{3} \right] \partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \right] z = \omega$$

$$(3.16) \quad \left[\partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \frac{z}{1} - \left[\Phi_z \Delta \frac{z^4 \varepsilon}{z^2} - \frac{10-10}{3} \right] \partial_z^2 \partial^1 \partial^1 \right] z = \omega$$

матрицы

при краевых условиях, налагаемых на функции Φ и Ψ , согласно фор-

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) (\partial_1^2 \varphi - \partial_2^2 \varphi) \Big|.$$

Сравнивая (3.16)–(3.20) с соответствующими уравнениями и формулами (3.9)–(3.15), замечаем, что они достаточно близки. Отсюда заключаем, что учет влияния касательных напряжений в теории изгиба тонких плит, приводит к поправкам, которые составляют основную долю поправок вносимых вариантом В.

Г. *Вариант уточненной теории изгиба плит с краевыми условиями Кирхгоффа.* Функция φ , входящая в (3.9)–(3.15), имеет вполне определенный геометрический смысл: она пропорциональна нормальному вращению ω_z точек, расположенных на торцевых плоскостях $z = \pm h$. Это следует из (2.40) и (3.9). Имеем

$$2\omega_z = -\nabla \sin z \nabla \varphi = -z \nabla^2 \left(\varphi - \frac{z^2}{6} \nabla^2 \varphi \right) = -2 \frac{z}{h^2} \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \varphi.$$

При $z = \pm h$ получаем $\varphi = \mp 1,5 \omega_z h$. Это сравнение позволяет полагать $\varphi = 0$ в тех задачах, в которых заведомо известно, что $\omega_z = 0$ или его влияние ничтожно мало. Принимая в варианте В $\varphi = 0$, приходим к новому уточненному варианту теории изгиба плит с краевыми условиями Кирхгоффа, так как в этом случае задача будет приводиться к интегрированию одного уравнения четвертого порядка (3.9), содержащего функцию ϕ_0 .

4. В качестве иллюстрации приведем приложения перечисленных выше вариантов теории к решению некоторых задач.

А. *Задачи об осесимметрично деформированной круглой плите.* В этих задачах $\varphi = 0$, варианты А и Б совпадают с классической теорией изгиба тонких плит, поэтому остается решить задачи по варианту В при $\varphi = 0$, т. е. по Г. Обозначим прогиб, моменты и поперечную силу, даваемые классической теорией соответственно через w^* , m_1 , m_2 , n и сопоставим их с величинами ϕ_0 , M_1 , M_2 и $N = N_1$. Из статических соображений следует, что в любом сечении $N = n$. Это нам дает

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \phi_0 = \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w^* = -\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m_1 + m_2}{1 + \nu} \right),$$

$$\text{т. е.} \quad \nabla^2 \phi_0 = -\frac{m_1 + m_2}{D(1 + \nu)} + C = C - \frac{m}{D}, \quad (4.1)$$

где C —постоянная интегрирования, m —приведенный момент. Внося (4.1) в (3.13) и (3.15), получаем:

$$M_1 = -D \left[\nabla^2 \phi_0 + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right] - \frac{2}{5} \nu h^2 \frac{n}{r},$$

$$w_0 = \phi_0 - \frac{8 - 3\nu}{10 - 10\nu} h^2 \left(C - \frac{m}{D} \right) = \phi_0 + \lambda h^2 \left(\frac{m}{D} - C \right), \quad (4.2)$$

$$\omega_1 = \partial \phi_0 + \frac{3}{10} h^2 \frac{n}{D}.$$

где
$$\partial = \frac{\partial}{\partial r}; \quad \lambda = \frac{8 - 3\mu}{10 - 10\mu}. \quad (4.3)$$

Для свободно опертых плит из краевых условий $w_0 = 0$ и $M_1 = 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= -\lambda h^2 \left(\frac{m^0}{D} - C \right), \\ -D \left(\partial^2 \phi_0 + \mu \frac{1}{r} \partial \phi_0 \right) &= \frac{2}{5} \mu h^2 \frac{n^0}{R} \end{aligned} \right\} \text{ при } r = R, \quad (4.4)$$

где m^0 и n^0 — значения m и n на опоре.

Для защемленных по контуру плит из краевых условий $w_0 = 0$, $\omega_1 = 0$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= -\lambda h^2 \left(\frac{m^0}{D} - C \right), \\ \partial \phi_0 &= -\frac{3}{10} h^2 \frac{n^0}{D} \end{aligned} \right\} \text{ при } r = R. \quad (4.5)$$

Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^4 \phi_0 = \frac{q_1 - q_2}{D} \quad (4.6)$$

при краевых условиях (4.4) для свободно опертых плит и (4.5) для защемленных плит. Поскольку на контуре плиты m^0 и n^0 — постоянные величины, можем принимать $C = m^0/D$, тогда (4.4) и (4.5) могут быть приняты за краевые условия для плит с равномерно распределенными радиальными опорными моментами $0,4\mu h^2 n^0/R$ и с опорными углами поворота $-0,3h^2 n^0/D$ соответственно. Это позволит нам использовать результаты классической теории изгиба плит и написать интегралы для ϕ_0 в виде:

для свободно опертых плит

$$\phi_0 = w^* + \frac{h^2}{D} \left[-\lambda m^0 + \frac{1}{5} \frac{\mu}{1+\mu} R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - 4\lambda \frac{h^2}{R^2} \right) n^0 \right], \quad (4.7)$$

для защемленных по контуру плит

$$\phi_0 = w^* + \frac{h^2}{D} \left[-\lambda m^0 + \frac{3}{20} R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} - 4\lambda \frac{h^2}{R^2} \right) n^0 \right]. \quad (4.8)$$

Основные расчетные величины: прогиб w и изпряжение σ_r будут определяться формулами:

для свободно опертых плит

$$w = w^0 + \frac{h^2}{D} \left[\lambda (m - m^0) + \frac{1}{5} \frac{\mu}{1 + \mu} R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) n^0 - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2 - 2\mu} \frac{z^2}{h^2} \left(m + \frac{4}{5} \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{h^2}{R^2} n^0 \right) \right], \quad (4.9)$$

$$\sigma_r = \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left[\frac{m_1}{h^2} + \frac{2}{5} \mu \frac{n^0}{R} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{dn}{dr} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{n}{r} \right];$$

для защемленных плит

$$w = w^0 + \frac{h^2}{D} \left[\lambda (m - m^0) + \frac{3}{20} R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) n^0 - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2 - 2\mu} \left(m + \frac{3}{20} \frac{h^2}{R^2} n^0 \right) \frac{z^2}{h^2} \right], \quad (4.10)$$

$$\sigma_r = \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left[\frac{m_1}{h^2} + \frac{3}{20} \frac{1 + \mu}{R} n^0 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{dn}{dr} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \mu \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{n}{r} \right].$$

Располагая решениями задач по классической теории изгиба плит, формулами (4.9) и (4.10), получаем решения тех же задач по уточненной теории. Например, для свободно опертой плиты, нагруженной по верхней плоскости $z = -h$ равномерной нагрузкой $q_z = -q$, имеем:

$$m_1 = \frac{3 + \mu}{16} (R^2 - r^2) q, \quad n = -\frac{1}{2} q r, \quad n^0 = -\frac{1}{2} q R. \quad (4.11)$$

Из (4.9) получим решение для σ_z в таком виде:

$$\sigma_z = \frac{3}{2} \frac{z}{h} \left[\frac{3 + \mu}{16} \frac{R^2 - r^2}{h^2} + \frac{2 + \mu}{12} \frac{z^2}{h^2} - \frac{2 + \mu}{20} \right] q, \quad (4.12)$$

которое совпадает с решением С. П. Тимошенко [8].

Б. Прямоугольная плита, свободно опертая по трем краям и свободная по четвертой кромке при действии равномерно распределенной нагрузки. Для прямоугольных плит частные и общие решения первого из уравнений (3.9) можно брать в виде, принятом в классической теории. К этим интегралам следует присоединить общее решение второго из уравнений (3.9). Для рассматриваемого примера, полагая кромки $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ свободно опертыми, а кромку $y = b$ свободной, имеем следующие краевые условия:

$$w_0 = M_1 = w_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a; \quad (4.13)$$

$$w_0 = M_2 = w_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (4.14)$$

$$M_2 = H = N_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решения уравнений (3.9), удовлетворяющие условиям (4.13), можно брать в таком виде:

$$\begin{aligned} \phi_0 = & \frac{q_1 - q_2}{D} a^4 \sum \left[\frac{4}{\pi^3 m^3} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ & \left. + \frac{m\pi y}{a} \left(C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\varphi = \sum \left[E_m \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi y}{a} - t_m \right) + G_m \operatorname{sh} \left(\frac{m\pi y}{a} - t_m \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (4.16)$$

$$t_m = 1 + \frac{2}{\pi^2 m^2} \frac{a^2}{h^2}.$$

Произвольные постоянные $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, G_m$, определяются из шести условий (4.14) на краях $y = 0, y = b$, причем здесь должны быть использованы соотношения (3.13)–(3.15). При решении той же задачи по варианту Б в (4.15) вместо ϕ_0 нужно подставить прогиб w , а для краевых условий должны быть использованы (3.5)–(3.6). Результаты числовых расчетов прогиба в центре свободной кромки $\left(x = \frac{a}{2}, y = b, z = 0 \right)$ для $\mu = 0,3$ и $a : h = 8$ приведены в табл. 1, где даны значения коэффициентов β в формуле

$$w = \beta \frac{q_1 - q_2}{E(2h^3)} \cdot a^4,$$

вычисленные по всем вариантам А, Б, В, Г, а также

Таблица 1

Вариант b/a	А	Г	Б	В	(3.16)–(3.20)
1:2	0,0775	0,08548	0,09902	0,10464	0,10229
1	0,1404	0,15531	0,15946	0,17393	0,17120
2	0,1646	0,18217	0,18086	0,19892	0,19638

по варианту (3.16)–(3.20). Коэффициенты β к варианту А заимствованы из классической теории. Видно, что эти коэффициенты малы сравнительно с коэффициентами, вычисленными по остальным вариантам теории. Далее видно, что последовательный учет влияния кас-

тельных напряжений в теории изгиба тонких плит (3.16) - (3.20) приводит для прогиба к значениям, весьма близким к результатам уточненного варианта В.

Изгиб консольной балки прямоугольного поперечного сечения

Пользуясь основными уравнениями варианта Б определим перемещения и напряжения в произвольной точке консольной балки толщиной $2h$, шириной $2a$ и длиной l , когда к ее свободному концу $x=l$ приложена сила Q , направленная по оси z .

Из (3.1) имеем

$$\nabla^4 w = 0, \quad \nabla^2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0, \quad \lambda^2 = \frac{2}{h^2}. \quad (4.17)$$

По Сен-Венану

$$\sigma_y = \tau_{yz} = 0, \quad \tau_x = z \frac{Q(l-x)}{J}, \quad J = \frac{2a \cdot 2h^3}{3}. \quad (4.18)$$

Из (3.3), (3.4) и (4.18) имеем

$$\begin{aligned} \partial_1^2 w + \mu \partial_2^2 w - (1-\mu) \partial_1 \partial_2 \varphi &= \frac{Q}{EJ} (1-\mu^2) (l-x), \\ \partial_2^2 w + \mu \partial_1^2 w + (1-\mu) \partial_1 \partial_2 \varphi &= 0, \\ \partial_2 \nabla^2 w + \frac{1-\mu}{h^2} \partial_1 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Уравнения (4.19) и (4.17) позволяют найти общие интегралы для w и φ в таком виде:

$$\begin{aligned} w &= \frac{Q}{EJ} \left[\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{6} + \mu y^2 \frac{x-l}{2} + C_1 x y + C_2 x + C_3 y + C_4 \right], \\ \varphi &= C_5 \operatorname{ch} \lambda y + C_6 \operatorname{sh} \lambda y. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Постоянные C_i определяются из краевых условий на концах балки и на ее боковой поверхности:

$$\begin{aligned} w = w_1 = w_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = y = 0, \\ \int_{-a}^a H dy = M_{кр}, \quad \int_{-a}^a N_1 dy = Q \quad \text{при} \quad x = l, \\ H = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm a, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $M_{кр}$ есть момент силы Q относительно оси x . Остальные краевые условия удовлетворены согласно (4.18). Определив постоянные C_i для случая, когда $M_{кр} = 0$, получим следующие решения:

$$\varphi = \mu a h^2 \frac{Q}{EJ} \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda a},$$

$$w = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{6} + \mu y^2 \frac{x-l}{2} + \mu \frac{a}{\lambda} \frac{x}{\operatorname{sh} \lambda a} \right],$$

$$u = -z \frac{Q}{EJ} \left[x l - \frac{x^2}{2} + \mu \frac{a}{\lambda} \frac{1 - 2 \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda a} \right], \quad (4.22)$$

$$v = -z \frac{Q}{EJ} \mu y (x-l)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q}{4ah} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{1}{1+\mu} \left(1 + \mu a \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda y} \right),$$

$$\tau_{xy} = -z \frac{3Q}{4h^3} \cdot \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{y}{a} - \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda a} \right).$$

В табл. 2 помещены значения коэффициента k_1 к формуле τ_{xz}

$$k_1 = \frac{1}{1+\mu} \left(1 + \mu a \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda a} \right) \quad (4.23)$$

для некоторых отношений размеров поперечного сечения при $y=0$, $y=a$. Для сравнения приведены точные значения этого же коэффициента, вычисленные С. П. Тимошенко [8] ($\mu=0,25$).

Таблица 2

Точки	h/a	2	1	0,5	0,25
$y=a$	Формула (4.23)	1,016	1,110	1,368	1,922
	Тимошенко	1,033	1,1260	1,396	1,988
$y=0$	Формула (4.23)	0,984	0,946	0,869	0,868
	Тимошенко	0,983	0,940	0,856	0,808

Результаты (4.17)–(4.23) позволяют утверждать, что поправки, вносимые вариантом Б теории первого приближения в классическую теорию изгиба плит, приблизительно соответствуют поправкам, вносимым теорией Сен-Венана в сопротивление материалов для задачи об изгибе балок.

В заключение статьи отметим, что пользуясь способами изложенными в пункте 3, можно составить соответствующие уравнения, описывающие приближенные варианты теории сжатия плит. Здесь ограничимся приведением формул для w и σ_z в первом приближении. Независимо от краевых условий на боковой поверхности плиты получаем:

$$w = \frac{1-\mu^2}{E} \frac{q_1 + q_2}{2} z, \quad \sigma_z = \frac{q_1 + q_2}{2} z.$$

Թ. Թ. ԽԱՎԱՏՐՅԱՆ

ՀԱՍՏ ՍԱԼԵՐԻ ԾՈՒՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ՏԵՍՈՒՅՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Հոդվածում տրվում են լրացումներ Ա. Ի. Լուրյեի և Վ. Զ. Վլասովի հետազոտություններին՝ նվիրված Սալի ծոման և սեղմման խնդիրներին, որոնք տեղի են ունենում սալի մակերևույթների կիրառված ճորձալ ուժերի ազդեցությունից, Տեղափոխումների և լարումների համար ստացվել են ընդհանուր լուծումներ՝ 2.34, 2.38 և 2.39, որոնք վերահիշյալ հեղինակների տված լուծումներից տարբերվում են f և φ ֆունկցիաներ պարունակող անդամներով: Օգտվելով այդ լուծումներից ու ֆունկցիաները սրտչող 2.32 և 2.33 հավասարումներից, հոդվածում քերվում են մոտավոր տեսությունների մի քանի տարբերակներ և վերջինները համեմատվում են ուրիշ հեղինակների կողմից առաջարկված մոտավոր տեսությունների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955, гл. 3 и 4.
2. Власов В. З. и Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. ГИФМЛ, М., 1960, гл. VII.
3. Reissner E. On Bending of Elastic Plates. Quart. Appl. Math., v. 5, 1947.
4. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Известия АН СССР, ОН, механ. и машиностроение, № 2, 1959.
5. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОН, № 5, 1958.
6. Власов В. Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок. Известия АН СССР, ОН, № 12, 1957.
7. Хачатурян Т. Г. Об учете влияния касательных напряжений в теории изгиба плит. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961.
8. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1934, стр. 347, 325.