

В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко

О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жесткозашемленной плиты

При построении точного решения задачи теории упругости об осесимметричной деформации жесткозашемленной плиты рассматриваем ее как цилиндр конечной длины со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, h) &= f_1(r), \quad \sigma_z(r, -h) = f_2(r), \\ \tau_{rz}(r, h) &= \varphi_1(r), \quad \tau_{rz}(r, -h) = \varphi_2(r), \\ u(1, z) &= w(1, z) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Все встречающиеся в (1) и в дальнейшем изложении статьи величины отнесены к радиусу цилиндра; h — половина безразмерной высоты цилиндра.

Общая осесимметричная смешанная граничная задача для цилиндра конечной длины рассмотрена в работе [1]. В этой работе показано, что получающиеся при удовлетворении граничных условий бесконечные системы линейных алгебраических уравнений вполне регулярны (квазирегулярны), однако, при этом налагается физически необоснованное ограничение на число Пуассона материала ($m > 3$). В настоящей заметке показано, что это условие не является необходимым для регулярности бесконечных систем.

Напряженное состояние плиты по аналогии с бесконечным цилиндром [2] разбиваем на два напряженных состояния: симметричное и кососимметричное относительно срединной плоскости, совпадающей с плоскостью $z = 0$. Такое разбиение, не уменьшая общности, позволяет сделать выкладки менее громоздкими.

Остановимся подробно на анализе кососимметричного напряженного состояния. Граничные условия принимают вид

$$\sigma_z(r, \pm h) = \pm \frac{f_1(r) - f_2(r)}{2}, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{2},$$

$$u(1, z) = w(1, z) = 0.$$

Решение уравнений Ляме, которое строится по методу, изложенному в работе [3] для задачи в напряжениях, имеет в данном случае вид:

$$u = - \left[2 \frac{m-1}{m} C_0 + \frac{m-2}{2m} B_0 \right] zr + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D_n I_1(k_n r) + \frac{B_n}{2k_n} \left[r I_0(k_n r) - \frac{4(m-1)}{mk_n} I_1(k_n r) \right] \right\} \sin k_n z - \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j z + \frac{3m-4}{m} \frac{C_j}{\lambda_j} \operatorname{sh} \lambda_j z + C_j z \operatorname{ch} \lambda_j z \right] \frac{J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j}, \quad (3)$$

$$\omega = A_0 + C_0 z^2 + \frac{1}{4} B_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n I_0(k_n r) + \frac{B_n}{2k_n} r I_1(k_n r) \right] \cos k_n z + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \frac{C_j}{\lambda_j} z \operatorname{sh} \lambda_j z \right] J_0(\lambda_j r).$$

Стоящие вне знаков суммирования элементарные решения найдены предельным переходом при $\lambda_j, n \rightarrow 0$, где λ_j — корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$; $k_n = n \frac{\pi}{h}$.

Удовлетворение граничных условий (2) приводит к следующей системе равенств:

$$\begin{aligned} & \left[2 \frac{m-1}{m} C_0 - \frac{B_0}{m} \right] h + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j h + \frac{C_j}{\lambda_j} \frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \lambda_j h + \right. \\ & \quad \left. + C_j h \operatorname{ch} \lambda_j h \right] J_0(\lambda_j r) = \frac{f_1(r) - f_2(r)}{4G}, \\ & \left[\frac{B_0}{2m} - \frac{m-1}{m} C_0 \right] r + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ D_n k_n I_1(k_n r) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B_n}{2k_n} \left[k_n r I_0(k_n r) - 2 \frac{m-1}{m} I_1(k_n r) \right] \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j h + 2 \frac{m-1}{m} \frac{C_j}{\lambda_j} \operatorname{ch} \lambda_j h + C_j h \operatorname{sh} \lambda_j h \right] J_1(\lambda_j r) = \\ & = \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{4G}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & - \left[2 \frac{m-1}{m} C_0 + \frac{m-2}{2m} B_0 \right] z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D_n I_2(k_n) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B_n}{2k_n} \left[I_0(k_n) - \frac{4(m-1)}{mk_n} I_1(k_n) \right] \right\} \sin k_n z = 0, \end{aligned}$$

$$A_0 + C_0 z^2 + \frac{1}{4} B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \operatorname{ch} \lambda_j z + \frac{C_j}{\lambda_j} z \operatorname{sh} \lambda_j z \right] J_0(\lambda_j r) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n I_0(k_n) + \frac{B_n}{2k_n} I_1(k_n) \right] \cos k_n z = 0.$$

Для упрощения системы соотношений (4) используем следующие представления функций рядами:

$$r = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\lambda_j r)}{\lambda_j J_0(\lambda_j)}, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$I_1(k_n r) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_j I_1(k_n)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} J_1(\lambda_j r), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$r I_0(k_n r) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_j I_0(k_n) J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4 k_n \lambda_j I_1(k_n) J_1(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)^2}, \quad 0 \leq r < 1$$

$$z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{k_n} \sin k_n z, \quad -h < z < h,$$

$$z^2 = \frac{h^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{k_n^2} \cos k_n z, \quad -h \leq z \leq h, \quad (5)$$

$$\operatorname{ch} \lambda_j z = \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j h}{h (k_n^2 + \lambda_j^2)} \cos k_n z, \quad -h \leq z \leq h,$$

$$z \operatorname{sh} \lambda_j z = \frac{\operatorname{ch} \lambda_j h}{\lambda_j} - \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j^2 h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j h}{k_n^2 + \lambda_j^2} \cos k_n z +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n (k_n^2 - \lambda_j^2) \operatorname{sh} \lambda_j h}{h (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \cos k_n z,$$

$$\frac{f_1(r) - f_2(r)}{4G} = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j J_0(\lambda_j r), \quad \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{4G} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j J_1(\lambda_j r), \quad (6)$$

где

$$f_0 = 2 \int_0^1 \frac{f_1(r) - f_2(r)}{4G} r dr,$$

$$f_j = \frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \int_0^1 \frac{f_1(r) - f_2(r)}{4G} r J_0(\lambda_j r) dr,$$

$$\varphi_j = \frac{2}{J_0^2(\lambda_j)} \int_0^1 \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{4G} r J_1(\lambda_j r) dr.$$

Здесь предполагается, что функции, задающие напряжения на торцах цилиндра удовлетворяют необходимым условиям [4] для представления их рядами (6).

С помощью разложений (5) и (6) заменяем систему соотношений (4) эквивалентной ей (за исключением ребер плиты) системой:

$$\begin{aligned} & \left[2 \frac{m-1}{m} C_0 - \frac{1}{m} B_0 \right] h = f_0, \\ & A_j \lambda_j = - \frac{C_j}{\lambda_j} \left[\frac{m-2}{m} + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h \right] + \frac{f_j}{\operatorname{sh} \lambda_j h}, \\ & - \left[A_j \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j h + 2 \frac{m-1}{m} \frac{C_j}{\lambda_j} \operatorname{ch} \lambda_j h + C_j h \operatorname{sh} \lambda_j h \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{J_0(\lambda_j)} \left\{ - D_n \frac{2 k_n \lambda_j I_1(k_n)}{k_n^2 + \lambda_j^2} + \right. \\ & + \left. \frac{B_n}{2 k_n} \left[- \frac{2 k_n \lambda_j I_0(k_n)}{k_n^2 + \lambda_j^2} + \frac{4 k_n^2 \lambda_j I_1(k_n)}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{m-1}{m} \frac{4 \lambda_j I_1(k_n)}{k_n^2 + \lambda_j^2} \right] \right\} = \\ & = \tau_j + \frac{\frac{1}{m} B_0 - 2 \frac{m-1}{m} C_0}{\lambda_j J_0(\lambda_j)}, \\ & \left[2 \frac{m-1}{m} C_0 + \frac{m-2}{2m} B_0 \right] \frac{2(-1)^n}{k_n} + D_n I_1(k_n) + \\ & + \frac{B_n}{2 k_n} \left[I_0(k_n) - \frac{4}{k_n} \frac{m-1}{m} I_1(k_n) \right] = 0, \\ & A_0 + C_0 \frac{h^2}{3} + \frac{1}{4} B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} J_0(\lambda_j) \left[A_j \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j h} + \right. \\ & + \left. \frac{C_j}{\lambda_j} \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda_j h}{\lambda_j} - \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j^2 h} \right) \right] = 0, \\ & C_0 \frac{4(-1)^n}{k_n^2} + \sum_{j=1}^{\infty} J_0(\lambda_j) \left\{ A_j \frac{2(-1)^n \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_j h}{h(k_n^2 + \lambda_j^2)} + \frac{C_j}{\lambda_j} \left[\frac{2(-1)^n \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_j h}{k_n^2 + \lambda_j^2} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{2(-1)^n (k_n^2 - \lambda_j^2) \operatorname{sh} \lambda_j h}{h(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right] \right\} + D_n I_0(k_n) + \frac{B_n}{2 k_n} I_1(k_n) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрение системы алгебраических уравнений (7) показывает, что нет необходимости в удержании всех постоянных в элементарных решениях. Одну из них можно выбрать произвольно. В данном случае удобно положить:

$$2 \frac{m-1}{m} C_0 + \frac{m-2}{2m} B_0 = 0. \quad (8)$$

Исключая из системы (7) неизвестные A_j и D_n , с учетом равенства (8) получаем:

$$B_0 = -\frac{2}{h} f_0, \quad C_0 = \frac{m-1}{mh} f_0.$$

$$\begin{aligned} A_0 = & \sum_{j=1}^{\infty} 2 \frac{m-1}{m} \frac{C_j}{\lambda_j} \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j^2 h} - f_0 \left[\frac{m-2}{3(m-1)} h - \frac{1}{2h} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j J_0(\lambda_j)}{\lambda_j^2 h}, \\ & - \frac{C_j}{\lambda_j} \left[\operatorname{ch} \lambda_j h - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{2k_n} \frac{4\lambda_j I_1(k_n)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} \times \\ & \times \left[\frac{k_n^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} - \frac{m-1}{m} \right] = \varphi_j - 2 \frac{m-1}{m} \frac{f_0}{\lambda_j h J_0(\lambda_j)} + f_j \operatorname{cth} \lambda_j h, \quad (9) \\ & (-1)^n \frac{B_n}{2k_n} \frac{I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} \frac{m-1}{m} I_0(k_n) I_1(k_n)}{I_1(k_n)} + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j}{\lambda_j} \frac{4J_0(\lambda_j) \operatorname{sh} \lambda_j h}{h (k_n^2 + \lambda_j^2)} \left[\frac{1}{m} - \frac{\lambda_j^2}{k_n^2 + \lambda_j^2} \right] = -C_0 \frac{4}{k_n^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2f_j J_0(\lambda_j)}{h (k_n^2 + \lambda_j^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению парной бесконечной системы алгебраических уравнений, образованной двумя последними равенствами из системы (9). Вместо B_n и C_j введем новые неизвестные при помощи соотношений

$$4 \frac{B_n}{2k_n} (-1)^n I_1(k_n) = x_n, \quad 4 \frac{C_j}{\lambda_j h} J_0(\lambda_j) \operatorname{sh} \lambda_j h = y_j, \quad (10)$$

Парная бесконечная система алгебраических уравнений приобретает при этом вид:

$$y_j \delta_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_j \frac{k_n^2 - (m-1) \lambda_j^2}{m (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} - \varphi_j J_0(\lambda_j) + 2 \frac{m-1}{m} \frac{f_0}{\lambda_j h} - f_j J_0(\lambda_j) \operatorname{cth} \lambda_j h, \quad (11)$$

$$x_n \Delta_n = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{(m-1) \lambda_j^2 - k_n^2}{m (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} - C_0 \frac{4}{k_n^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2f_j J_0(\lambda_j)}{h (k_n^2 + \lambda_j^2)},$$

где

$$\delta_j = \frac{h \left[\operatorname{ch} \lambda_j h - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right]}{4 \operatorname{sh} \lambda_j h}, \quad \Delta_n = \frac{I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} \frac{m-1}{m} I_0(k_n) I_1(k_n)}{4 I_1^2(k_n)}.$$

Для анализа регулярности полученной системы необходимо оценить следующие величины:

$$\frac{\lambda_j}{\delta_j} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{k_n^2 - (m-1)\lambda_j^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right|, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\Delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(m-1)\lambda_j^2 - k_n^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right|.$$

Используя разложения из (5) $\operatorname{ch} \lambda_j z$ и $z \operatorname{sh} \lambda_j z$ в ряд по $\cos k_n z$, на основе теоремы Дирихле получаем для первой из величин

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_j}{\delta_j} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{k_n^2 - (m-1)\lambda_j^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right| &< \frac{\lambda_j}{\delta_j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 + (m-1)\lambda_j^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \\ &= \frac{\operatorname{ch} \lambda_j h - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - 2 \frac{m-1}{m} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j h} - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right)}{\operatorname{ch} \lambda_j h - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h}} < 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее неравенство является следствием очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda_j h - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - 2 \frac{m-1}{m} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j h} - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right) &> 0 \\ \frac{\operatorname{sh} \lambda_j h}{\lambda_j h} - \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh} \lambda_j h} &> 0 \end{aligned}$$

при $\lambda_j > 0$.

Аналогично, из разложений

$$\begin{aligned} I_0(k_n r) &= 2 \frac{I_1(k_n)}{k_n} + 2k_n I_1(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)}, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ k_n r I_1(k_n r) &= 2 \left[I_0(k_n) - \frac{2}{k_n} I_1(k_n) \right] + 2k_n^2 I_0(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} - \\ &- 4k_n^3 I_1(k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)^2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

на основе теоремы Гобсона [4], получаем для второй из величин в (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(m-1)\lambda_j^2 - k_n^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right| &< \frac{1}{\Delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(m-1)\lambda_j^2 + k_n^2}{m(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \\ &= \frac{mI_1^2(k_n) - mI_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} (m-1) I_0(k_n) I_1(k_n)}{mI_1^2(k_n) - mI_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} (m-1) I_0(k_n) I_1(k_n)} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \left[I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{m-1}{k_n} I_0(k_n) I_1(k_n) + \frac{2}{k_n^2} I_1^2(k_n) \right]}{m I_1^2(k_n) - m I_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} (m-1) I_0(k_n) I_1(k_n)} \quad (15)$$

Полученное отношение с учетом очевидной положительности числителя будет меньше единицы, если выполняется следующее неравенство

$$I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{m-1}{k_n} I_0(k_n) I_1(k_n) + \frac{2}{k_n^2} I_1^2(k_n) > 0. \quad (16)$$

Сравнение его левой части с суммой ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \frac{I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{2}{k_n} I_0(k_n) I_1(k_n)}{4 I_1^2(k_n)}$$

показывает, что при $m \geq 3$ это неравенство справедливо. Доказательство того, что второе отношение в (12) меньше единицы на некоторую величину θ_1 , не зависящую от n , вытекает из однопорядкового характера поведения при $k_n \rightarrow \infty$ левой части неравенства (16) и знаменателя в мажорирующем отношении (15). В качестве ее численного значения необходимо выбрать наименьшее из чисел, даваемых расчетом при малых k_n и асимптотическим выражением при k_n больших.

Рассмотрим случай, когда $m = 2 + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$). Неравенство (16) переходит в следующее

$$I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{1+\varepsilon}{k_n} I_0(k_n) I_1(k_n) + \frac{2}{k_n^2} I_1^2(k_n) > 0.$$

Численный подсчет при малых k_n и использование асимптотических представлений для функций Бесселя при больших k_n показывает, что это неравенство выполняется при любом k_n . При любом $\varepsilon > 0$ сохраняется тот же порядок убывания на бесконечности отношения

$$\frac{I_1^2(k_n) - I_0^2(k_n) + \frac{1+\varepsilon}{k_n} I_0(k_n) I_1(k_n) + \frac{2}{k_n^2} I_1^2(k_n)}{(2+\varepsilon) I_1^2(k_n) - (2+\varepsilon) I_0^2(k_n) + \frac{4}{k_n} (1+\varepsilon) I_0(k_n) I_1(k_n)}, \quad \text{что и при}$$

$m \geq 3$, и, следовательно, здесь также можно найти величину θ_1 такую, что

$$\frac{1}{\Delta_n} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(m-1) \lambda_j^2 - k_n^2}{m (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \right| < 1 - \theta_1.$$

Все вышеизложенное позволяет утверждать, что бесконечная система алгебраических уравнений, получаемая из (11) путем исключения одной из неизвестных, является вполне регулярной [5] при любом $m \geq 2$.

Ограниченность правых частей в системе (11) при предположении о кусочной непрерывности функций, задающих внешние воздействия по торцам цилиндра, очевидна. Это обеспечивает единственность ограниченного решения системы.

При рассмотрении симметричного относительно плоскости напряженного состояния плиты получаем аналогичные бесконечные системы, однако, в основном решении для компонент вектора смещений необходимо взять в качестве λ_i корни $J_0(\lambda) = 0$. При этом следует отметить, что при $m = 2 + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) получаемая система будет вполне квазирегулярной.

Институт механики
АН Украинской ССР

Поступила 5 I 1963

Վ. Տ. Գրիգորյան, Ա. Ֆ. Ուլիտկո

ԿՈՇՏ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առանցքային-սիմետրիկ կերպով զեֆորմացիայի ենթարկված կոշտ ամրակցված կլոր սալի լարված վիճակի խնդիրը: Խնդրի լուծումը կառուցելու համար օգտագործվում է եզրում տրված լարումների զեֆորմված վերջավոր երկարության պլանի հավասարակշռության խնդրի համար [3]-ում ցույց տրված մեթոդը:

Եզրային պայմանների բավարարման հետևանքով ստացված են հանրահաշվական հավասարումների (11) անվերջ սիստեմներ: Ցույց է տրված, թե տարբերությունն [1]-ի, որ տվյալ սիստեմները լիովին ռեզոնանս (քվադրենդոլյար) են $m > 2$ Պուանսոնի ցանկացած թվի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вало́в Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. ПММ, 28, в. 4, 1962.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
3. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН АрмССР, 19, № 1, 1954.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
5. Канторович А. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.