

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. Шахбазян

Вывод и решение системы интегральных уравнений
для амплитуд π^+ -и $\pi^+\pi^+$ -распадов K^+ -мезонов

1. Введение и постановка задачи

Вопрос получения интегральных уравнений на основе свойств аналитичности и унитарности для процессов с участием нестабильных частиц представляет большой интерес.

Дело в том, что при наличии распадной массы появляются так называемые аномальные особенности, из-за которых нарушаются двойные спектральные представления Мандельштама. В работах, посвященных выводу дисперсионных уравнений для амплитуд π^+ - и $\pi^+\pi^+$ -распадов [1—3], отсутствовал сколько-нибудь последовательный учет аномальных особенностей. Между тем, уже рассмотрение простейших диаграмм Фейнмана [4—6] говорит об их существенной роли.

В настоящей работе дается вывод интегральных уравнений для амплитуд трехпионных распадов K -мезонов, итерация которых восстанавливает фейнмановские диаграммы, зависящие только от одного инварианта. Приводится также итерационное решение уравнений до третьего порядка включительно. Способ рассуждений, примененный при выводе уравнений, заключается в следующем.

Выписываются уравнения для S -амплитуд упругого рассеяния стабильных бесспиновых частиц (например, π -мезонов), причем при их получении используются однократные представления Мандельштама [7].

После этого производится аналитическое продолжение условия унитарности для S -волны при увеличении массы одной из частиц до ее распадных значений. При этом оказывается, что контуры интегрирования в спектральных представлениях деформировать не нужно. Действительно, каждый интеграл в представлении Мандельштама в рассматриваемом приближении зависит только от одной переменной. Поэтому особенности абсорбционной части, которую дальше в п. 2 будем обозначать через $\alpha(s)$, являются особенностями функции (см. формулу (1) в тексте)

$$K(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \tilde{\varphi}(s', s) \alpha(s') ds'$$

на втором листе ее римановой поверхности по переменной s . Как будет показано в тексте, особенности $\alpha(s)$ не пересекают контур интегрирования, а обходят его при увеличении m до распадных значений. Следовательно, контур интегрирования деформировать не нужно, но $\alpha(s)$ уже не будет вещественно. Аналогичные рассуждения применимы к остальным интегралам в однократном представлении Мандельштама.

2. Нейтральный случай

Для простоты рассмотрим случай распада нейтральной бесспиновой частицы на три нейтральные частицы. При этом все характерные особенности случая заряженных частиц сохраняются. Так как в данном случае амплитуда рассеяния стабильных частиц одинакова во всех трех каналах, ее аналитические свойства будем постулировать следующим однократным представлением:

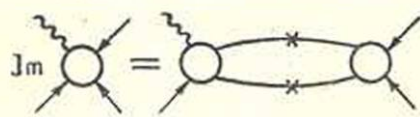
$$A(s_1, s_2, s_3) = h_0 + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} [\tilde{\varphi}(s', s_1) + \tilde{\varphi}(s', s_2) + \tilde{\varphi}(s', s_3)] \alpha(s') ds', \quad (2.1)$$

где $\tilde{\varphi}(s', s_i) = \frac{1}{s' - s_i} - \frac{1}{s' - s_i^0}$, s_i^0 — точка на плоскости Мандельштама, в которой производится вычитание.

Предположим, что две сталкивающиеся частицы имеют массы, отличающиеся на малую величину. Для определенности будем считать одну из них π -мезоном (с массой μ), а вторую назовем K^* -мезоном (с массой m) (не путать с резонансом K^* !). Будем рассматривать следующий фиктивный процесс:

$$\pi^0 + K^{*0} \rightarrow 2\pi^0. \quad (1)$$

Условие унитарности для S -волны этого процесса в двухчастичном приближении записывается в виде (см. фиг. 1):



Фиг. 1.

$$\alpha(s) = \sqrt{\frac{s - 4\mu^2}{s}} \lambda^+(s) h(s), \quad (2.2)$$

где $\lambda(s)$ — парциальная S -амплитуда рассеяния $2\pi^0 \rightarrow 2\pi^0$, а

$$h(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) A(s_1, s_2, s_3). \quad (2.3)$$

Для дальнейшего удобно перейти к переменным $v_i = \frac{s_i - 4\mu^2}{4\mu^2}$. Тогда формула (2.1) перепишется в виде:

$$A(v_1, v_2, v_3) = h_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} [\tilde{\varphi}(v', v_1) + \tilde{\varphi}(v', v_2) + \tilde{\varphi}(v', v_3)] \alpha(v') dv'. \quad (2.1a)$$

В формуле (2.1a) и ниже везде произведена замена обозначений $A(s_1, s_2, s_3) \rightarrow A(v_1, v_2, v_3)$, $h(s) \rightarrow h(v)$, $\alpha(s) \rightarrow \alpha(v)$. Из рассмотрения кинематики следует, что

$$\begin{aligned} v_2 &= \gamma - \frac{v_1}{2} - \frac{1}{2} R(v_1) \cos \theta, \\ v_3 &= \gamma - \frac{v_1}{2} + \frac{1}{2} R(v_1) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$R(v) = \sqrt{\frac{v}{v+1} (v - \xi_0^2) (v - x^2)} = \sqrt{\frac{v}{v+1} [v^2 - (4\gamma+3)v + 4\gamma(\gamma+1)]},$$

$$\gamma = \frac{m^2 - 9\mu^2}{8\mu^2}, \quad \xi_0^2 = \frac{(m - \mu)^2 - 4\mu^2}{4\mu^2}, \quad x^2 = \frac{(m + \mu)^2 - 4\mu^2}{4\mu^2},$$

θ — угол рассеяния. При $\gamma = \frac{M_k^2 - 9\mu^2}{8\mu^2}$, где M_k — масса реального K -мезона, ξ_0^2 есть верхняя граница физической области распада $\tau^+ \rightarrow 3\pi^+$.

Подставляя (2.1a) в (2.3) и производя замены переменных, получим:

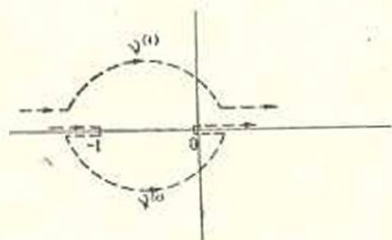
$$h(v) = h_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(v', v) \alpha(v') dv' + \frac{2}{\pi R(v)} \int_{v^{(2)}(v)}^{v^{(1)}(v)} dv' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{v}, v') \alpha(\tilde{v}) d\tilde{v}, \quad (2.5)$$

$$v^{(1)}(v) = \gamma - \frac{v}{2} + \frac{1}{2} R(v), \quad v^{(2)}(v) = \gamma - \frac{v}{2} - \frac{1}{2} R(v).$$

Нам необходимо произвести аналитическое продолжение выражения (2.5) при увеличении массы m до значений $m > 3\mu$. Заметим, что при $m = \mu$ величина $\gamma = -1$.

При $m > 3\mu$, $\gamma > 0$.

Далее, при $\gamma = -1$ $v^{(1)}(v) = -1$ и $v^{(2)}(v) = -1 - v$. Поэтому третий член в правой части (2.5) имеет при $\gamma = -1$ разрез только при $-\infty < v < -1$ (левый разрез уравнения Чу-Мандельштама). Добавляя к γ положительную мнимую добавку $i\epsilon$ и увеличивая m до распадных значений, получим поведение $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ на плоскости комплексного переменного v , изображенное на фиг. 2. Таким образом, $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ нигде не пересекают положительную вещественную полуось. Существенно отметить, что $v^{(2)}$ находится в нижней полуплоскости правее мнимой оси при $v > \gamma$, а в верхней полуплоскости — при $v < \gamma$, пересекая вещественную ось слева от нуля. При $0 \leq v \leq \xi_0^2$ и $\gamma > 0$ $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ также положительны. Поэтому в качестве контуров интегрирования от $v^{(2)}$ до $v^{(1)}$ следует брать (см. фиг. 3)



Фиг. 2.

C_1 при $\nu < \gamma$,

C_2 при $\nu > \gamma$.

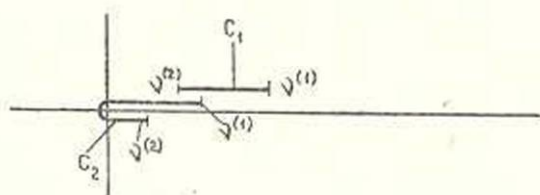
В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим следующее выражение для $h(\nu)$ при $\gamma > 0$:

$$h(\nu) = h_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\nu', \nu) \alpha(\nu') d\nu' + \frac{2}{\pi R(\nu)} \int_{\nu^{(2)}}^{\nu^{(1)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu} \quad (2.6)$$

при $\nu < \gamma$,

$$h(\nu) = h_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\nu', \nu) \alpha(\nu') d\nu' + \\ + \frac{2}{\pi R(\nu)} \left[\int_0^{\nu^{(1)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu} + \int_0^{\nu^{(2)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu} \right]$$

при $\nu > \gamma$.



Фиг. 3.

Следует указать, что после аналитического продолжения по массе m константа h_0 уже не соответствует по смыслу амплитуде распада в некоторой точке. Поэтому введем новую константу A_0 , соответствующую вычитанию в точке $\nu = 0$. Тогда $\tilde{\varphi}(\nu', \nu)$ перейдет в $\varphi(\nu', \nu) = \frac{\nu}{\nu'(\nu' - \nu)}$. Подставляя после этого (2.6) в (2.2), получим интегральное уравнение для определения $\alpha(\nu)$:

$$\alpha(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \lambda^+(\nu) \left\{ A_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\nu', \nu) \alpha(\nu') d\nu' + \right. \\ + \frac{2\gamma(\gamma-\nu)}{\pi R(\nu)} \int_{\nu^{(2)}}^{\nu^{(1)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\tilde{\nu}) d\tilde{\nu} + \\ \left. + \frac{2\theta(\nu-\gamma)}{\pi R(\nu)} \left[\int_0^{\nu^{(1)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\nu') d\nu' + \int_0^{\nu^{(2)}} d\nu' \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{\nu}, \nu') \alpha(\nu') d\nu' \right] \right\}, \quad (2.7)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Как видно из приведенного рассмотрения, линии особенностей абсорбционной части $\alpha(\nu)$ не пересекают физического разреза амплитуды процесса (I). Поэтому представление (2.1a) сохраняет свой вид, но $\alpha(\nu)$ уже не вещественна при $\nu \geq 0$. Комплексность возникает в двойных интегралах в правой части (2.7). Уравнение (2.7) можно решать итерациями, если учесть, что в физической области распада ν не превышает значения $\xi_0^2 \cong 0,64$. Для дальнейшего удобно произвести замену переменных $\frac{\nu}{\nu+1} = x$. Тогда вместо (2.7) получим:

$$\tilde{\alpha}(x) = \sqrt{x} \tilde{\lambda}^+(x) [A_0 + F_1(\tilde{\alpha}) + 2\theta(\chi^2 - x) K_1(\tilde{\alpha}) + 2\theta(x - \chi^2) K_2(\tilde{\alpha})], \quad (2.8)$$

где

$$F_1(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(x', x) \tilde{\alpha}(x') dx', \quad (2.9)$$

$$K_1(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi R(x)} \int_{\tilde{\nu}^{(2)}(x)}^{\tilde{\nu}^{(1)}(x)} \frac{d\tilde{x}}{(1-\tilde{x})^2} \int_0^1 \varphi(x', \tilde{x}) \tilde{\alpha}(x') dx', \quad (2.10)$$

$$K_2(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi R(x)} \left[\int_0^{\tilde{\nu}^{(1)}(x)} \frac{d\tilde{x}}{(1-\tilde{x})^2} \int_0^1 \varphi(x', \tilde{x}) \tilde{\alpha}(x') dx' + \right. \\ \left. + \int_0^{\tilde{\nu}^{(2)}(x)} \frac{d\tilde{x}}{(1-\tilde{x})^2} \int_0^1 \varphi(x', \tilde{x}) \tilde{\alpha}(x') dx' \right], \quad (2.11)$$

$$\varphi(x', x) = \frac{x}{x'(x' - x - i\eta)},$$

$$\tilde{\nu}^{(1,2)}(x) \equiv \nu^{(1,2)}(\nu),$$

$$\tilde{\alpha}(x) \equiv \alpha(\nu), \quad \tilde{R}(x) \equiv R(\nu), \quad \chi^2 = \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

При указанной замене вместо параметра ξ_0^2 в уравнении (2.8) фигурирует уже параметр $\xi^2 = \frac{\xi_0^2}{1+\gamma}$. В физической области переменная

x уже изменяется от нуля до $\xi^2 \cong 0,39$. Так как $\tilde{\alpha}(x) \sim \sqrt{x}$, причем $\sqrt{x} \ll 1$ в физической области распада, мы получаем возможность

итерировать уравнение (2.8) по малой величине ζ . Подобная итерационная процедура соответствует представлению абсорбционной части амплитуды в виде ряда по фейнмановским диаграммам, зависящим от одного инварианта [7].

Мы будем интересоваться решением (2.8) до членов третьего порядка по ζ включительно. Тогда для $\tilde{\lambda}^+(x)$ возьмем приближенное выражение, получающееся в соответствии с приближением „эффективного радиуса“:

$$\tilde{\lambda}^+(x) \cong a - ia^2\sqrt{x} - a^2\left(\frac{r}{2} + a\right)x, \quad (2.12)$$

где a — длина рассеяния, r — „эффективный радиус“. Выражение (2.12)

легко получить из обычной формулы $\tilde{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i\tilde{\delta}_0(x)} \sin \tilde{\delta}_0(x)$ и разложения $\text{ctg } \tilde{\delta}_0(x)$ по степеням x . Беря в качестве первого приближения

$$\tilde{\lambda}_{(1)}(x) = \sqrt{x} a A_0, \quad (2.13)$$

во втором приближении получим:

$$\tilde{\lambda}_{(2)}(x) = \sqrt{x} a A_0 + \frac{i\sqrt{3} a^2 A_0 \zeta^2}{\sqrt{1 - \frac{x}{\zeta^2}}} \sqrt{\frac{x}{\zeta^2}} \left(1 - \frac{8}{9} \frac{x}{\zeta^2}\right). \quad (2.14)$$

В третьем приближении вычисления дают:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{(3)}(x) = & \sqrt{x} a A_0 + \frac{i\sqrt{3} a^2 A_0 \zeta^2}{\sqrt{1 - z^2}} z \left(1 - \frac{8}{9} z^2\right) + \\ & + x^{3/2} a^2 A_0 \left[\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \frac{4a}{9\pi} - \frac{r}{2} \right] - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} a^3 A_0 \zeta^3 \frac{z^2 \left(1 - \frac{8}{9} z^2\right)}{\sqrt{1 - z^2}} \arccos z - \\ & - \frac{4a^3 A_0 \zeta^3}{\pi} \left[\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} z^2 \left(1 - \frac{4}{3} z^2\right) \right] \frac{\arcsin z}{\sqrt{1 - z^2}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь $z = \sqrt{\frac{x}{\zeta^2}}$ — уже не малая величина.

Подставляя (2.15) в выражение для амплитуды распада

$$\tilde{A}(x_1, x_2, x_3) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\varphi(x', x_1) + \varphi(x', x_2) + \varphi(x', x_3)] \tilde{\lambda}(x') dx', \quad (2.16)$$

получим следующее выражение:

$$\tilde{A}_{(3)}(x_1, x_2, x_3) = A_0 + \sum_{k=1}^3 J(x_k), \quad (2.17)$$

где

$$J(x) = i\sqrt{x}A_0 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{a^2 A_0^2 z^2}{\sqrt{1-z^2}} z \left(1 - \frac{8}{9}\right) \arccos z - \\ - \frac{2i\sqrt{3}}{\pi} a^2 A_0^2 \frac{z^2 \left(1 - \frac{8}{9} z^2\right)}{\sqrt{1-z^2}} \arccos z + i x^{3/2} a^2 A_0 \left[\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \frac{4a}{9\pi} - \frac{r}{2} \right] - \\ - \frac{4ia^2 A_0^2}{\pi} \left[\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} z^2 \left(1 - \frac{4}{3} z^2\right) \right] \frac{\arccos z}{\sqrt{1-z^2}} + Cx, \quad (2.18)$$

где C — константа, которую нельзя вычислить [4]. Как видно из приведенного выражения, член второго порядка по τ согласуется с результатом, полученным Грибовым [4].

3. Случай τ^+ - и τ^- -распадов K^+ -мезонов

В реальном случае трехпионных распадов K^+ -мезонов мы должны исходить из системы уравнений для амплитуд следующих процессов:

для τ^+ -распада — из амплитуд процессов

$$K^{*+} + \pi^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+, \quad (II)$$

$$K^{*+} + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad (III)$$

для τ^- -распада — из амплитуд процессов

$$K^{*+} + \pi^- \rightarrow \pi^0 + \pi^-, \quad (IV)$$

$$K^{*+} + \pi^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad (V)$$

Как и в нейтральном случае, предполагается, что масса m немного больше μ — массы π -мезона, и K^* — стабильная частица. Так как амплитуды процессов (III) и (IV) представляют собой суперпозиция амплитуд с различными значениями изотопического спина, для условия унитарности в двухчастичном приближении следует воспользоваться соотношением [7]

$$i(T^+ - T) = \frac{1}{2}(TT^+ + T^+T), \quad (3.1)$$

Для парциальных S -амплитуд процессов (II), (III), (IV), (V) соответственно будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(x) &= h_0 + F_1(\tilde{\alpha}) + 2K_1(\tilde{\beta}) \\ \tilde{h}_2(x) &= h_0 + F_1(\tilde{\beta}) + K_1(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \\ \tilde{g}_1(x) &= g_0 + F_1(\tilde{\gamma}) + 2K_1(\tilde{\delta}) \\ \tilde{g}_2(x) &= g_0 + F_1(\tilde{\delta}) + K_1(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнения (3.2) справедливы до аналитического продолжения по массе m . Поэтому, из-за предполагаемой пока стабильности K^* , интегральные выражения, обозначенные буквой K_1 , вещественны при положительных x , а следовательно, и в физических областях соответствующих процессов. Абсорбционные части $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ также вещественны в физических областях и удовлетворяют, согласно (3.1), соотношениям унитарности

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} [\tilde{h}_1(x) \tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{h}_1^+(x) \tilde{\lambda}_2(x)], \\ \tilde{\beta}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left[\tilde{h}_2(x) \frac{\tilde{\lambda}_2^+(x) + 2\tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + \tilde{h}_2^+(x) \frac{\tilde{\lambda}_2(x) + 2\tilde{\lambda}_0(x)}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}_1(x) \frac{\tilde{\lambda}_2^+(x) - \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + \tilde{g}_1^+(x) \frac{\tilde{\lambda}_2(x) - \tilde{\lambda}_0(x)}{3} \right], \\ \tilde{\gamma}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left[2\tilde{h}_2(x) \frac{\tilde{\lambda}_2^+(x) - \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + 2\tilde{h}_2^+(x) \frac{\tilde{\lambda}_2(x) - \tilde{\lambda}_0(x)}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{g}_1(x) \frac{2\tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + \tilde{g}_1^+(x) \frac{2\tilde{\lambda}_2(x) + \tilde{\lambda}_0(x)}{3} \right], \\ \tilde{\delta}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} [\tilde{g}_2(x) \tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{g}_2^+(x) \tilde{\lambda}_2(x)].\end{aligned}\quad (3.3)$$

Произведем теперь аналитическое продолжение уравнений (3.2) по массе m , увеличивая ее до распадных значений. Рассуждения совершенно те же, что и в нейтральном случае. Поэтому сразу напомним уравнения, получающиеся вместо системы (3.2):

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1(x) &= A_1 + F_1(\tilde{\alpha}) + 2\theta(\chi^2 - x) K_1(\tilde{\beta}) + 2\theta(x - \chi^2) K_2(\tilde{\beta}), \\ \tilde{h}_2(x) &= A_2 + F_1(\tilde{\beta}) + \theta(\chi^2 - x) K_1(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) + \theta(x - \chi^2) K_2(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}), \\ \tilde{g}_1(x) &= A_3 + F_1(\tilde{\gamma}) + 2\theta(\chi^2 - x) K_1(\tilde{\delta}) + 2\theta(x - \chi^2) K_2(\tilde{\delta}), \\ \tilde{g}_2(x) &= A_4 + F_1(\tilde{\delta}) + \theta(\chi^2 - x) K_1(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}) + \theta(x - \chi^2) K_2(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Чтобы при аналитическом продолжении по m получить вместо (3.3) правильную систему уравнений унитарности, необходимо учесть следующее обстоятельство. При распадных значениях массы m интегральные выражения K_1 и K_2 , фигурирующие в (3.4), уже комплексны. Уравнения (3.3) написаны для стабильного случая, т. е. если имеет место система (3.2), в которой комплексны только операторы F_1 , а операторы K_1 — вещественны. Поэтому в (3.3) вместо $\tilde{h}_{1,2}^+(x)$ и $\tilde{g}_{1,2}^+(x)$ следует подставлять выражения, получающиеся после аналитического продолжения

уравнений, эрмитово-сопряженных уравнениям (3.2). Вводя обозначения

$\lim_{m \rightarrow M_K > 2\mu} \tilde{h}_i^+(x) = \tilde{h}_i^{\times}(x)$, $\lim_{m \rightarrow M_K > 2\mu} \tilde{g}_i^+(x) = \tilde{g}_i^{\times}(x)$, мы получим после пере-

хода к распадным значениям массы m для $\tilde{h}_1^{\times}(x)$, $\tilde{h}_2^{\times}(x)$, $\tilde{g}_1^{\times}(x)$, $\tilde{g}_2^{\times}(x)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1^{\times}(x) &= A_+ + F_1^{\times}(\bar{z}) + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z}), \\ \tilde{h}_2^{\times}(x) &= A_+ + F_1^{\times}(\bar{\beta}) + \theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z} + \bar{\beta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z} + \bar{\beta}), \\ \tilde{g}_1^{\times}(x) &= A_+ + F_1^{\times}(\bar{\gamma}) + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z}), \\ \tilde{g}_2^{\times}(x) &= A_+ + F_1^{\times}(\bar{\delta}) + \theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z} + \bar{\delta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z} + \bar{\delta}).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Здесь оператор $F_1^{\times}(\bar{z})$ определяется так:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi^*(x', x) \bar{a}(x') dx' = F_1^{\times}(\bar{z}).$$

Как видно из полученных выражений, уравнения (3.5) уже не являются эрмитово-сопряженными уравнениям (3.4), так как в распадной области интегральные выражения K_1 и K_2 комплексны.

Подставляя в (3.3) выражения (3.4) и (3.5), получим:

$$\begin{aligned}\bar{a}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left\{ [A_+ + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{\beta}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{\beta})] \bar{\lambda}_2(x) + \right. \\ &\quad \left. - \bar{\lambda}_2^+(x) \right\} + [F_1^{\times}(\bar{z}) \bar{\lambda}_2^+(x) + F_1^{\times}(\bar{z}) \bar{\lambda}_2(x)], \\ \bar{\beta}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left\{ [A_+ + \theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z} + \bar{\beta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z} + \bar{\beta})] \times \right. \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad + F_1^{\times}(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) + 2\bar{\lambda}_0(x)}{3} + [A_+ + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z})] \times \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad \left. + F_1(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1^{\times}(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) - \bar{\lambda}_0(x)}{3} \right\}, \\ \bar{\gamma}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left\{ 2[A_+ + \theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z} + \bar{\beta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z} + \bar{\beta})] \times \right. \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad + F_1^{\times}(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) + 2\bar{\lambda}_0(x)}{3} + [A_+ + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z})] \times \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad \left. + F_1(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1^{\times}(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) - \bar{\lambda}_0(x)}{3} \right\}, \\ \bar{\delta}(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left\{ 2[A_+ + \theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z} + \bar{\beta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z} + \bar{\beta})] \times \right. \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) + 2\bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad + F_1^{\times}(\bar{\beta}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) + 2\bar{\lambda}_0(x)}{3} + [A_+ + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\bar{z}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\bar{z})] \times \\ &\quad \times \frac{\bar{\lambda}_2(x) + \bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\ &\quad \left. + F_1(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2^+(x) - \bar{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1^{\times}(\bar{\gamma}) \frac{\bar{\lambda}_2(x) - \bar{\lambda}_0(x)}{3} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\tilde{\lambda}_2(x) + \tilde{\lambda}_2^+(x) - \tilde{\lambda}_0(x) - \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\
& + 2F_1(\tilde{\gamma}) \frac{\tilde{\lambda}_2^+(x) - \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + 2F_1(\tilde{\gamma}) \frac{\tilde{\lambda}_2(x) - \tilde{\lambda}_0(x)}{3} + \\
& + [A_+ + 2\theta(\chi^2 - x)K_1(\tilde{\delta}) + 2\theta(x - \chi^2)K_2(\tilde{\delta})] \times \\
& \times \frac{2\tilde{\lambda}_2(x) + 2\tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{\lambda}_0(x) + \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + \\
& + F_1(\tilde{\gamma}) \frac{2\tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{\lambda}_0^+(x)}{3} + F_1(\tilde{\gamma}) \frac{2\tilde{\lambda}_2(x) + \tilde{\lambda}_0(x)}{2} \Big\}, \\
\tilde{\delta}(x) = & \frac{1}{2} \sqrt{x} \Big\{ [A_+ + \theta(\chi^2 - x)K_1(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}) + \theta(x - \chi^2)K_2(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta})] \times \\
& \times [\tilde{\lambda}_2^+(x) + \tilde{\lambda}_2(x)] + F_1(\tilde{\delta})\tilde{\lambda}_2^+(x) + F_1(\tilde{\delta})\tilde{\lambda}_2(x) \Big\}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получим систему интегральных уравнений для определения абсорбционных частей $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$. При этом существенно подчеркнуть, что эти величины уже не вещественны. Появление мнимых частей обусловлено переходом к распадным значениям массы m . Это обстоятельство было продемонстрировано в работе [5] на примере простейшей треугольной диаграммы.

Пронтерируем систему уравнений (3.6) три раза. При первой итерации получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{(1)}(x) &= \sqrt{x} a_2 A_+, \\
\tilde{\beta}_{(1)}(x) &= \sqrt{x} \left(\frac{a_2 + 2a_0}{3} A_+ + \frac{a_2 - a_0}{3} A_- \right), \\
\tilde{\gamma}_{(1)}(x) &= \sqrt{x} \left(2 \frac{a_2 - a_0}{3} A_- + \frac{2a_2 + a_0}{3} A_+ \right), \\
\tilde{\delta}_{(1)}(x) &= \sqrt{x} A_+ a_2. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в правые части уравнений (3.6), получим после вычислений, пренебрегая членами $\sim \zeta^3$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{(2)}(x) &= \sqrt{x} A_+ a_2 + \frac{i\sqrt{3}\sqrt{x} \left(\zeta^2 - \frac{8}{9}x \right)}{\sqrt{\zeta^2 - x}} \left(\frac{a_2 + 2a_0}{3} a_2 A_+ + \frac{a_2 - a_0}{3} a_2 A_- \right), \\
\tilde{\beta}_{(2)}(x) &= \sqrt{x} A_+ \frac{a_2 + 2a_0}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{x} \left(\zeta^2 - \frac{8}{9}x \right)}{\sqrt{\zeta^2 - x}} \frac{a_2 + 2a_0}{3} \left(A_+ a_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2 + 2a_0}{3} A_+ + \frac{a_2 - a_0}{3} A_{-'} \Big) + \sqrt{x} A_{-'} \frac{a_2 - a_0}{3} + \\
& + \frac{i\sqrt{3}\sqrt{x}\left(\zeta^2 - \frac{8}{9}x\right)}{\sqrt{\zeta^2 - x}} \frac{a_2 - a_0}{3} a_2 A_{-'}, \quad (3.8) \\
\tilde{\gamma}_{(2)}(x) = & \sqrt{x} \left(2 \frac{a_2 - a_0}{3} A_{-'} + \frac{2a_2 + a_0}{3} A_{-'} \right) + \\
& + \frac{i\sqrt{3}\sqrt{x}\left(\zeta^2 - \frac{8}{9}x\right)}{\sqrt{\zeta^2 - x}} \left[\left(a_2 A_{-'} + \frac{a_2 + 2a_0}{3} A_{-'} + \frac{a_2 - a_0}{3} A_{-'} \right) \frac{a_2 - a_0}{3} + \right. \\
& \left. + \frac{2a_2 + a_0}{3} a_2 A_{-'} \right], \\
\tilde{\delta}_{(2)}(x) = & \sqrt{x} a_2 A_{-'} + \frac{i\sqrt{3}\sqrt{x}\left(\zeta^2 - \frac{8}{9}x\right)}{2\sqrt{\zeta^2 - x}} \left(2 \frac{a_2 - a_0}{3} a_2 A_{-'} + \right. \\
& \left. + \frac{2a_2 + a_0}{3} a_2 A_{-'} \right).
\end{aligned}$$

Производя третью итерацию и пренебрегая членами порядка ζ^4 , мы получим выражения для $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ в третьем приближении по ζ . Подставляя получающиеся таким образом величины в выражения для амплитуд τ^+ - и τ'^+ -распадов

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\tau^-}(x_1, x_2, x_3) = & A_{-} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(x', x_1) \tilde{\alpha}(x') dx' + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\varphi(x', x_2) + \varphi(x', x_3)] \tilde{\beta}(x') dx', \\
\tilde{A}_{\tau'^+}(x_1, x_2, x_3) = & A_{-'} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(x', x_1) \tilde{\gamma}(x') dx' + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\varphi(x', x_2) + \varphi(x', x_3)] \tilde{\delta}(x') dx'.
\end{aligned}$$

мы получим выражения для амплитуд τ^- - и τ'^+ -распадов в третьем приближении, которые приводить не будем из-за их чрезвычайной громоздкости. Отметим только, что вещественные члены третьего порядка по ζ оказываются просто $\sim x_1'^2$, что полностью согласуется с результатами работы [6], причем они пропорциональны разности $a_2 - a_0$ и в нейтральном случае (см. пункт 2) исчезают.

4. Заключение

Как видно из проведенного рассмотрения, возможно в принципе вывести систему интегральных уравнений для спектральных функций однократных представлений Мандельштама для трехчастичных распадов нестабильных частиц. Итерации этих уравнений дают абсорбционные части фейнмановских диаграмм, зависящих только от одного инварианта в каждом канале соответственно. В изложенном методе решения уравнений удастся избавиться от расходимостей, возникающих при исследовании отдельных диаграмм Фейнмана [5]. Вместе с тем, все же не удастся полностью добиться самосогласованной итерационной процедуры, так как порядок малости не всех членов определяется числовым параметром ζ . Члены типа $\sqrt{x}$, $x^{3/2}$ и т. д. обладают малостью порядка ζ , ζ^2 и т. д. только в физической области распада. При подстановке же их в интегральные операторы F_i они могут давать регулярные вклады, не малые по ζ .

В заключение автор считает своим приятным долгом принести глубокую благодарность проф. К. А. Тер-Мартirosяну за весьма полезные дискуссии, имевшие место в процессе выполнения данной работы.

Поступила 7 I 1963

Վ. Ս. Շահբազյան

K^+ -ՄԵԶՈՆՆԵՐԻ τ^+ - ԵՎ τ^+ -ՏՐՈՂՈՒՄՆԵՐԻ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՐՏԱԾՈՒՄԸ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված է ինտեգրալ հավասարումների սխեմով K^+ -մեզոնների τ^+ - և τ^+ -տրոհումների պարզիալ S -ամպլիտուդների արտաքին մասերի համար և քիզված է նրանց լուծումը խեղաքիանների մեթոդով մինչև երրորդ կարգը ներդրել:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Khuri N. N. and Treiman S. B. Pion-pion scattering and $K^+ \rightarrow 3\pi$ decay, Phys. Rev., **119**, № 3, 1960.
2. Sawyer R. F. and Wall, Pion-pion interactions in τ and τ^+ decays. Phys. Rev., **119**, № 4, 1960.
3. Вольф Ю., Целлер В. τ -распад и $\pi\pi$ -взаимодействие. ЖЭТФ, **41**, вып. 3, 1961.
4. Грибов В. Н. Теория реакций с образованием трех частиц вблизи порога. τ -распад. ЖЭТФ, **41**, вып. 4, 1961.
5. Анисович В. В., Ансельм А. А., Грибов В. Н. К теории реакций $\pi+N \rightarrow N+\pi+\pi$ и $\gamma+N \rightarrow N+\pi+\pi$ вблизи порога. ЖЭТФ, **42**, вып. 1, 1962.
6. Anisovich V. V., Anselm A. A., Gribov V. N. On the theory of a production of the three low energy particles reactions. Nuclear Physics, **38**, 1962, p. 132.
7. Тер-Мартirosян К. А. Уравнения для спектральных функций представления Мандельштама. ЖЭТФ, **39**, вып. 3, 1960.