

М. М. Манукян

Кручение составного вала переменного диаметра в условиях нелинейной ползучести

Задача о кручении вала переменного круглого сечения, составленного из различных упругих материалов, спаянных по боковым поверхностям, исследована в работе [1]. Пластическое кручение однородных стержней переменного диаметра рассмотрено Л. М. Качановым [6] и В. В. Соколовским [14].

В настоящей работе рассматривается задача о кручении вала переменного круглого сечения, составленного из различных материалов, спаянных по боковым поверхностям, в условиях неустановившейся ползучести и изменения модуля мгновенной деформации материалов. Эта задача при однородном вале изучена в работе [2], а задача кручения составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести рассмотрена в работе [3]. Решению задачи о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом нелинейной ползучести посвящена работа [4].

При решении рассматриваемой задачи будем исходить из нелинейной теории ползучести с учетом старения материала, развитой в работе [5].

В настоящей работе получены основные нелинейные интегрально-дифференциальные уравнения задачи, контурные условия и условия на линиях раздела. Для решения полученных нелинейных интегральных уравнений применяется метод, изложенный в работе [2].

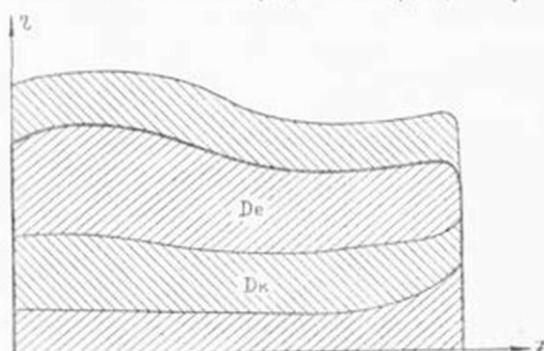
В качестве примера приводится решение задачи о кручении круглого и конического стержней.

В работе рассматривается также кручение вала переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием. Доказывается, что задача кручения вала переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием приводится к той же задаче для однородного вала с несколько измененным контурным условием.

§ 1. Постановка задачи и основные интегральные уравнения

Рассмотрим тело вращения, составленное из различных материалов, расположенных симметрично относительно оси вращения, меридиональное сечение которого показано на фиг. 1. Пусть область

осевого сечения состоит из ряда областей D_1, D_2, \dots, D_n , соответствующих различным материалам, из которых составлено данное тело. Допустим, что модули сдвига и меры ползучести этих материалов различны. Отнесем составной вал переменного сечения к цилиндрической системе координат r, φ, z , направив ось z по оси вала, а плоскость $z=0$ совместив



Фиг. 1.

нижним сечением стержня (верхнее сечение $z=l$).

Пусть нижнее сечение вала закреплено, а верхнее — испытывает действие момента $M = M(t)$, который в общем случае может зависеть от времени t . Предположим, что вектор-момент $M(t)$ параллелен оси стержня.

Положим, как и при кручении круглых однородных стержней переменного диаметра [2], что

$$\varepsilon_r^{(k)} = \varepsilon_\varphi^{(k)} = \varepsilon_z^{(k)} = \tau_{rz}^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

и что напряженное состояние определяется компонентами касательного напряжения $\tau_{r\varphi}^{(k)}$ и $\tau_{\varphi z}^{(k)}$, не зависящими от φ .

Тогда уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\varphi z}^{(k)}) = 0 \quad (1.2)$$

и будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\tau_{r\varphi}^{(k)} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}, \quad \tau_{\varphi z}^{(k)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.3)$$

Здесь через Φ_k обозначена функция Φ в области D_k .

В рассмотренном случае соотношения, связывающие компоненты деформации с соответствующими компонентами напряжений, в силу (1.1), примут следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi z}^{(k)}(t) &= \frac{\varphi_{\varphi z}^{(k)}(t)}{G_k(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{\varphi z}^{(k)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau - \\ &- 3 \int_{\tau_1}^t \tau_{\varphi z}^{(k)}(\tau) F_k[\sigma_1^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \gamma_{r\varphi}^{(k)}(t) &= \frac{\tau_{r\varphi}^{(k)}(t)}{G_k(t)} - \int_{\tau_1}^t \tau_{r\varphi}^{(k)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau - \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$-3 \int_{\tau_1}^t \gamma_{r_z}^{(k)}(\tau) F_k[\sigma_l^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Здесь t — координата времени, τ_1 — возраст материала в момент приложения нагрузки, $C_k(t, \tau)$ и $G_k(t)$ — соответственно мера ползучести и модуль мгновенной деформации сдвига материала области D_k , $F_k[\sigma_l^{(k)}(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести материала области D_k , нормированная условием $F_k(1) = 1$, $\gamma_{r_z}^{(k)}(t)$ — интенсивность касательных напряжений в области D_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

В данном случае выражение интенсивности касательных напряжений будет иметь вид

$$\gamma_{r_z}^{(k)}(t) = \frac{1}{r^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.5)$$

Условия неразрывности деформаций в силу (1.1) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \gamma_{r_z}^{(k)} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \gamma_{r_z}^{(k)} \right) = 0, \quad (1.6)$$

Подставляя выражения $\gamma_{r_z}^{(k)}(t)$ и $\gamma_{r_z}^{(k)}(t)$ из (1.4) в уравнение (1.6) и учитывая (1.3), получим

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_k(t) - G_k(t) \int_{\tau_1}^t \Delta \Phi_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau - \\ - 3G_k(t) \int_{\tau_1}^t \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[F_k(\sigma_l^{(k)}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[F_k(\sigma_l^{(k)}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right] \right] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\Delta \Phi_k = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right). \quad (1.8)$$

Таким образом, функция напряжений $\Phi_k(r, z, t)$ в области D_k удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям (1.7). Остается получить выражения контурного условия и условия на линиях раздела.

Если принять, что боковая поверхность стержня свободна от внешних воздействий, то контурное условие для функции Φ будет [7]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad \text{или} \quad \Phi = C_0(t), \quad (1.9)$$

где s — длина дуги контура меридионального сечения, а $C_0(t)$ — произвольная функция, зависящая только от времени t .

Из условия равновесия бесконечно малого элемента поверхности раздела следует, что проекция касательного напряжения на нормаль к линии раздела L_{kl} должна быть непрерывной на L_{kl} , т. е.

$$l\tau_{rz}^{(k)} + m\tau_{rz}^{(k)} = l\tau_{rz}^{(l)} + m\tau_{rz}^{(l)}. \quad (1.10)$$

Здесь l и m — направляющие косинусы нормали ν к линии раздела L_{kl} , причем

$$l = \frac{dz}{ds}, \quad m = -\frac{dr}{ds}. \quad (1.11)$$

Внося (1.3) и (1.11) в условие (1.10), находим

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial s} = \frac{\partial\Phi_l}{\partial s} \quad \text{на } L_{kl} \quad (1.12)$$

или

$$\Phi_k - \Phi_l = C_{kl} \quad \text{на } L_{kl}, \quad (1.13)$$

где C_{kl} — произвольная функция от времени t . Если линия раздела L_{kl} пересекается с контуром L_0 , то C_{kl} будет нулем, а если линия раздела целиком лежит внутри контура L_0 , то функция Φ в области, ограниченной L_{kl} , будет определяться с точностью до C_{kl} , которая не влияет на величины напряжений. Поэтому все C_{kl} можно принять равными нулю [1].

Если обозначить через $v_k(r, z, t)$ перемещение в области D_k , то для компонентов деформаций сдвига будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_{rz}^{(k)}(t) &= r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{v_k(r, z, t)}{r} \right], \\ \gamma_{rz}^{(k)}(t) &= \frac{\partial v_k(r, z, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя выражения $\gamma_{rz}^{(k)}(t)$ и $\gamma_{rz}^{(k)}(t)$ из (1.4) в (1.14) и пользуясь (1.3), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_k} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} - \int_{\tau_1}^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau - \\ & - 3 \int_{\tau_1}^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} F_k[\tau_l^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial\tau} d\tau = \frac{\partial v_k}{\partial r} - \frac{v_k}{r}, \\ & - \frac{1}{G_k} \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial z} + \int_{\tau_1}^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial z} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau + \\ & + 3 \int_{\tau_1}^t \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Phi_k}{\partial z} F_k[\tau_l^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial\tau} d\tau = \frac{\partial v_k}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Умножая первое из соотношений (1.15) на $\frac{dr}{ds}$, а второе на $\frac{dz}{ds}$ и складывая полученные результаты, получим

$$\frac{1}{G_k(t)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} - \int_{z_1}^z \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_k(\tau)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau -$$

$$- 3 \int_{z_1}^z \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} F_k [z_i^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_k}{r} \right), \quad (1.16)$$

где ν — внешняя нормаль к линии раздела L_{kl} .

Из (1.16), на основании непрерывности перемещения v_k на линии раздела L_{kl} , следует

$$\frac{1}{G_k(t)} \frac{\partial \Phi_k(t)}{\partial \nu} - \int_{z_1}^z \frac{\partial \Phi_k(\tau)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} \right] d\tau -$$

$$- 3 \int_{z_1}^z \frac{\partial \Phi_k(\tau)}{\partial \nu} F_k [z_i^{(k)}(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{G_l(t)} \frac{\partial \Phi_l(t)}{\partial \nu} - \int_{z_1}^z \frac{\partial \Phi_l(\tau)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_l(\tau)} \right] d\tau -$$

$$- 3 \int_{z_1}^z \frac{\partial \Phi_l(\tau)}{\partial \nu} F_l [z_i^{(l)}(\tau)] \frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (k, l = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

Из симметричности данной задачи относительно оси вала следует, что функцию Φ можно определить для одной половины области осевого сечения вала, ограниченной осью z и частью контура L_v . На оси сплошного вала напряжения равны нулю. Поэтому $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ при $r = 0$, т. е. функция Φ на оси z должна зависеть только от времени t .

$$\Phi = C_1(t) \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (1.18)$$

где $C_1(t)$ — произвольная функция от времени t .

Таким образом, задача о кручении круглых валов переменного сечения, составленных из различных материалов, с учетом нелинейной ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации материалов сводится к определению непрерывной в каждой из областей D_k осевого сечения вала функции напряжений $\Phi(r, z, t)$, удовлетворяющей в соответствующих областях интегро-дифференциальным уравнениям (1.7), контурному условию (1.9), условию (1.18) на оси z и условиям (1.13), (1.17) на линиях раздела L_{kl} .

Пусть $F_k [z_i^{(k)}(t)]$ является степенной функцией следующего вида [2]:

$$F_k [z_i^{(k)}(t)] = z_k + \beta_k [z_i^{(k)}(t)]^{m-1} \quad m > 1, \quad (1.19)$$

где z_k, β_k, m — постоянные параметры, определяемые из опыта.

Как показывают экспериментальные исследования, степенным законом вида (1.19) достаточно хорошо описываются кривые ползучести в широком диапазоне изменения напряжений ($0 \leq \sigma \leq R$, где R — предел прочности материала) для таких материалов, как бетон [8], дерево [9], грунт [10], фенольная пластмасса [11] и др. Одновременно эти же опыты показывают, что для указанных материалов величина β является малой ($\beta < 1$).

Малый параметр β_k для первой области D_1 обозначим через β . Пусть β_k выражается через β следующей формулой:

$$\beta_k = \lambda_k \beta \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.20)$$

где λ — постоянное число, определяемое из опыта, причем $\lambda_1 = 1$.

Внося (1.19) в соотношения (1.7), (1.17) и пользуясь соотношением (1.5), получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_k(t) - G_k(t) \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} + 3\alpha_k C_k(t, \tau) \right] d\tau - \\ - \beta_k G_k(t) \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_k(t)} \frac{\partial \Phi_k(t)}{\partial \nu} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_k(\tau)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_k(\tau)} + 3\alpha_k C_k(t, \tau) \right] d\tau - \\ - 3\beta_k \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_k(\tau)}{\partial \nu} N_k[\Phi_k(\tau)] \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{1}{C_l(t)} \frac{\partial \Phi_l(t)}{\partial \nu} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_l(\tau)}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_l(\tau)} + 3\alpha_l C_l(t, \tau) \right] d\tau - \\ - 3\beta_l \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_l(\tau)}{\partial \nu} N_l[\Phi_l(\tau)] \frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$\begin{aligned} M_k(\Phi_k) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$N_k[\Phi_k(t)] = \frac{1}{r^{2(m-1)}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}. \quad (1.24)$$

Только для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что

$$G_k(t) = G_k = \text{const.}$$

Тогда уравнения (1.21) и (1.22) примут следующий вид:

$$\Delta\Phi_k(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k(\tau) K_k(t, \tau) d\tau - \beta_k \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau = 0, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\Phi_k(t)}{\partial\nu} - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_k(\tau)}{\partial\nu} K_k(t, \tau) d\tau - \\ & - \beta_k \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_k(\tau)}{\partial\nu} N_k[\Phi_k(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau = \\ & = \mu \left\{ \frac{\partial\Phi_l(t)}{\partial\nu} - \alpha_l \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial\nu} K_l(t, \tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \beta_l \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial\nu} N_l[\Phi_l(\tau)] K_l(t, \tau) d\tau \right\}, \quad (1.26) \end{aligned}$$

$$\text{где } K_k(t, \tau) = 3G_k \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial\tau}, \quad \mu = \frac{G_k}{G_l}. \quad (1.27)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи приводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.25).

§ 2. Приведение нелинейного интегрального уравнения (1.25) к рекуррентным линейным интегральным уравнениям

Ищем решение уравнения (1.25), пользуясь методом решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, развитым в работе [2].

Представим решение уравнения (1.25) по степеням малого параметра β

$$\Phi_k(r, z, t) = \Phi_k^{(0)}(r, z, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p \Phi_k^{(p)}(r, z, t). \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\Phi_k^{(0)}(r, z, t)$ есть функция напряжений при линейной ползучести, т. е. когда $\beta = 0$.

Внося значения $\Phi_k(r, z, t)$ из (2.1) в (1.25) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\Delta\Phi_k^{(0)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(0)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.2)$$

$$\Delta\Phi_k^{(1)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(1)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k^{(0)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$$\Delta\Phi_k^{(2)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(2)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = m \int_{\tau_1}^t M_k^*[\Phi_k^{(0)}(\tau), \Phi_k^{(1)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

$$\Delta\Phi_k(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k(\tau) K_k(t, \tau) d\tau - \beta_k \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau = 0, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\Phi_k(t)}{\partial\nu} - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_k(\tau)}{\partial\nu} K_k(t, \tau) d\tau - \\ & - \beta_k \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_k(\tau)}{\partial\nu} N_k[\Phi_k(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau = \\ & = \mu \left\{ \frac{\partial\Phi_l(t)}{\partial\nu} - \alpha_l \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial\nu} K_l(t, \tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \beta_l \int_{\tau_1}^t \frac{\partial\Phi_l(\tau)}{\partial\nu} N_l[\Phi_l(\tau)] K_l(t, \tau) d\tau \right\}, \quad (1.26) \end{aligned}$$

$$\text{где } K_k(t, \tau) = 3G_k \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial\tau}, \quad \mu = \frac{G_k}{G_l}. \quad (1.27)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи приводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.25).

§ 2. Приведение нелинейного интегрального уравнения (1.25) к рекуррентным линейным интегральным уравнениям

Ищем решение уравнения (1.25), пользуясь методом решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, развитым в работе [2].

Представим решение уравнения (1.25) по степеням малого параметра β

$$\Phi_k(r, z, t) = \Phi_k^{(0)}(r, z, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p \lambda_k^p \Phi_k^{(p)}(r, z, t). \quad (2.1)$$

Очевидно, что $\Phi_k^{(0)}(r, z, t)$ есть функция напряжений при линейной ползучести, т. е. когда $\beta = 0$.

Внося значения $\Phi_k(r, z, t)$ из (2.1) в (1.25) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$\Delta\Phi_k^{(0)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(0)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.2)$$

$$\Delta\Phi_k^{(1)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(1)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k^{(0)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

$$\Delta\Phi_k^{(2)}(t) - \alpha_k \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_k^{(2)}(\tau) K_k(t, \tau) d\tau = m \int_{\tau_1}^t M_k^*[\Phi_k^{(0)}(\tau), \Phi_k^{(1)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_k^*(\Phi_k^{(0)}, \Phi_k^{(1)}) = & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial r} + \right. \\
 & + \frac{m-1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}-1} \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \left. \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial z} + \frac{m-1}{r^{2m+1}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}-1} \left(\frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k^{(1)}}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial z} \right\}. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение нелинейного интегрального уравнения (1.25) сводится к решению системы рекуррентных линейных интегральных уравнений (2.2), (2.3), (2.4), ... с контурным условием (1.9), условием (1.18) на оси z и условиями (1.13), (1.26) на линии раздела L_{kl} .

§ 3. Решение рекуррентных линейных интегральных уравнений

Решения интегральных уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) соответственно будут иметь следующий вид:

$$\Delta \Phi_k^{(0)}(t) = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta \Phi_k^{(1)}(t) = \psi_{1,k}(r, z, t) + \alpha_k \int_{\tau_1}^t \psi_{1,k}(r, z, \tau) R_k(t, \tau, \alpha_k) d\tau, \quad (3.2)$$

$$\Delta \Phi_k^{(2)}(t) = \psi_{2,k}(r, z, t) + \alpha_k \int_{\tau_1}^t \psi_{2,k}(r, z, \tau) R_k(t, \tau, \alpha_k) d\tau, \quad (3.3)$$

где $R_k(t, \tau, \alpha_k)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$,

$$\psi_{1,k}(r, z, t) = \int_{\tau_1}^t M_k[\Phi_k^{(0)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau, \quad (3.4)$$

$$\psi_{2,k}(r, z, t) = \int_{\tau_1}^t M_k^*[\Phi_k^{(0)}(\tau), \Phi_k^{(1)}(\tau)] K_k(t, \tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Если принять, что мера ползучести материала области D_k определяется зависимостью [5]

$$C_k(t, \tau) = \left(\frac{A_{1,k}}{\tau} + C_{0,k} \right) \left[1 - e^{-\gamma_k(t-\tau)} \right], \quad (3.6)$$

где $A_{1,k}$, $C_{0,k}$, γ_k — некоторые параметры, определяемые из опыта, то резольвента $R_k(t, \tau, \alpha_k)$ определяется следующей формулой:

$$\alpha_k R_k(t, \tau, \alpha_k) = \gamma_k - \gamma_k'(\tau) + [\gamma_k''(\tau) + \gamma_k'''(\tau) - \gamma_k \gamma_k'(\tau)] e^{\gamma_k(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\gamma_k(x)} dx. \quad (3.7)$$

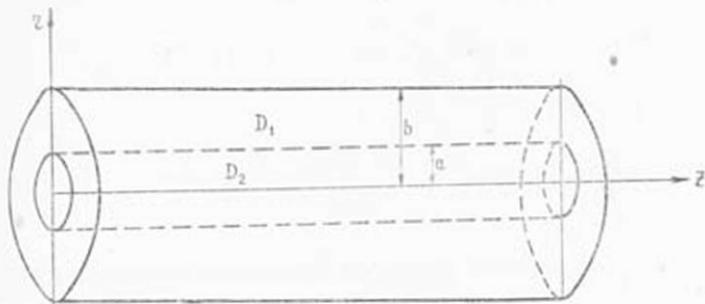
Здесь

$$\gamma_k(\tau) = \gamma_k \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + 3G_k \alpha_k \left(\frac{A_{1,k}}{\tau} + C_{0,k} \right) \right] d\tau. \quad (3.8)$$

Значения $\Phi_k^{(0)}$, $\Phi_k^{(1)}$, $\Phi_k^{(2)}$, ... будут последовательно определяться путем интегрирования дифференциальных уравнений (3.1), (3.2), (3.3), ... при этом произвольные функции интегрирования, зависящие от времени t , определяются из условий (1.9), (1.18), (1.13) и (1.26).

§ 4. Кручение круглого составного стержня

Рассмотрим цилиндрический вал, составленный из двух цилиндрических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям (фиг. 2). Предположим, что слои вала изготовлены из различных материалов с модулями сдвига G_1 и G_2 . Пусть в области D_2 ($0 < r < a$) материал обладает свойством ползучести, а в области D_1 ($a < r < b$) — материал является упругим. Размеры вала указаны на фиг. 2.



Фиг. 2.

Если в этом случае принять, что $G_1(t) = G_1 = \text{const}$, то основные уравнения будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) - \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) K(t, \tau) d\tau = \\ = \beta \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^{2m+1}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)^m \right] K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Если к уравнению (4.1) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми тремя приближениями, то решение этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, t) = & H_0(t, \tau_1) \frac{r^4}{4} + H_0^*(t) + \beta \frac{1}{m+3} r^{m+3} \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \beta^2 \frac{m}{2(m+1)} r^{2(m+1)} \left[H_2(t, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + O(\beta^3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.2) будет

$$\Phi_2(r, t) = D_0(t) \frac{r^4}{4} + D_0^*(t). \quad (4.4)$$

Здесь

$$H_0(t, \tau_1) = B(t) + \alpha \int_{\tau_1}^t B(\tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau, \quad (4.5)$$

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^m K(t, \tau) d\tau, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} H_2(t, \tau_1) = & \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau, \tau_1)]^{m-1} \left\{ H_0(\tau, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(x, \tau_1) R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а $B(t)$, $H_0^*(t)$, $D_0(t)$ и $D_0^*(t)$ являются неизвестными функциями, которые нужно определить, пользуясь данными условиями.

Удовлетворив условиям (1.18) и (1.13), найдем

$$D_0^*(t) = 0, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} H_0^*(t) = & \frac{a^4}{4} [D_0(t) - H_0(t, \tau_1)] - \beta \frac{1}{m+3} a^{m+3} \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] - \beta^2 \frac{m}{2(m+1)} a^{2(m+1)} \left[H_2(t, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + O(\beta^3). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь, на оси вала, вместо $C_1(t)$ взят нуль, что не влияет на напряженное состояние вала.

Выражение крутящего момента в данном случае примет следующий вид:

$$M(t) = 2\pi\Phi_1(b, t). \quad (4.10)$$

Подставляя выражение $\Phi_1(r, t)$ из (4.3) в (4.10) и пользуясь (4.9), получим

$$\begin{aligned} D_2(t) = & \frac{2M(t)}{\pi a^4} + \frac{a^4 - b^4}{a^4} H_0(t, \tau_1) + \\ & + \beta \frac{4}{m+3} \frac{a^{m+3} - b^{m+3}}{a^4} \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \beta^2 \frac{2m}{m+1} \times \\ & \times \frac{a^{2(m+1)} - b^{2(m+1)}}{a^4} \left[H_2(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right]. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Условие (1.9) выполняется тождественно, так как $\Phi_1(r, t)$ на контуре получает значение, зависящее только от времени t . Остается удовлетворить условию (1.26), которое в данном случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \alpha \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_1(\tau)}{\partial r} K(t, \tau) d\tau - \beta \frac{1}{a^{2(m-1)}} \int_{\tau_1}^t \left| \frac{\partial \Phi_1(\tau)}{\partial r} \right|^m K(t, \tau) d\tau = \\ = \mu \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad \text{при } r = a. \quad (4.12) \end{aligned}$$

(4.12) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно $\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}$. Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетворяться только первыми тремя приближениями, то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = & \mu a^3 X_0(t) + \beta \mu^m a^{m+2} \left[X_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t X_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \\ & + \mu a^{2m+1} \mu^{2m-1} \left[X_2(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t X_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right], \quad (4.13) \end{aligned}$$

где

$$X_0(t) = D_0(t) + \alpha \int_{\tau_1}^t D_0(\tau) R(t, \tau, \alpha) d\tau, \quad (4.14)$$

$$X_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [X_0(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau, \quad (4.15)$$

$$X_2(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [X_0(\tau)]^{m-1} \left\{ X_0(\tau) + \right. \\ \left. + \alpha \int_{\tau_1}^{\tau} X_1(x, \tau_1) R(t, x, \alpha) dx \right\} K(t, \tau) d\tau. \quad (4.16)$$

Подставляя выражение $\Phi_1(r, t)$ из (4.3) в (4.13), найдем

$$H_0(t, \tau_1) a^3 + \beta a^{m+2} \left[H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \\ + \beta^2 m a^{2m+1} \left[H_2(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] = \\ = \mu a^3 X_0(t) + \beta \mu^m a^{m+2} \left[X_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t X_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + \\ + m a^{2m+1} \mu^{2m-1} \left[X_2(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t X_2(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right]. \quad (4.17)$$

(4.17) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$. Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод, то получим выражение $H_0(t, \tau_1)$.

Если известно $H_0(t, \tau_1)$, то выражение $B(t)$ можно определить из уравнения (4.5). Действительно, решение интегрального уравнения (4.5) будет иметь следующий вид:

$$B(t) = H_0(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau, \quad (4.18)$$

так как $R(t, \tau, \alpha)$ является резольвентой ядра $K(t, \tau)$.

§ 5. Кручение составного конического вала

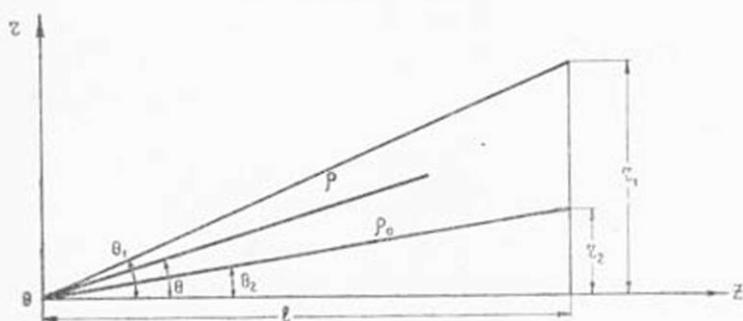
Рассмотрим сплошной конический вал, составленный из двух слоев, имеющих вид круглого конуса с углами растворов $2\theta_1$ и $2\theta_2$ (фиг. 3). Отнесем вал к цилиндрической системе координат, совместив ось z с осью вала, а центр координат поместив в вершине конуса. Пусть конический вал скручивается касательными усилиями, приложенными на боковую поверхность вала.

Предположим, что слои вала изготовлены из различных материалов с модулями сдвига $G_1(t)$ и G_2 . Допустим, что в области D_1 материал обладает ползучестью, а в D_2 — справедлив закон Гука.

Если в этом случае принять, что $G_1(t) = G_1 = \text{const}$, то основные уравнения будут

$$\Delta\Phi_1(t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_1(\tau) K(t, \tau) d\tau = \beta \int_{\tau_1}^t M_1[\Phi_1(\tau)] K(t, \tau) d\tau, \quad (5.1)$$

$$\Delta\Phi_2(t) = 0. \quad (5.2)$$



Фиг. 3.

В плоскости rz переходим к полярным координатам ρ , θ или η , ζ по следующим формулам

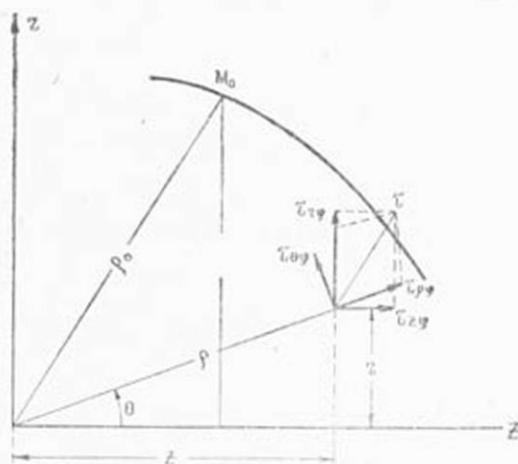
$$r = \rho \sin \theta = \rho_0 e^{\eta} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \zeta = \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (5.3)$$

$$z = \rho \cos \theta = \rho_0 e^{\eta} \zeta, \quad \eta = \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{\rho_0}.$$

Здесь ρ — радиус-вектор точки в осевом сечении вала (фиг. 4), θ — угол наклона радиуса-вектора ρ к оси z , ρ_0 — расстояние какой-нибудь произвольным образом выбранной точки M_0 на контуре осевого сечения вала.

В новых координатах (η, ζ) уравнение (5.1) примет следующий вид:

$$\Delta\Phi_1(\eta, \zeta, t) - \alpha \int_{\tau_1}^t \Delta\Phi_1(\eta, \zeta, \tau) \times \\ \times K(t, \tau) d\tau = \beta \int_{\tau_1}^t M_1[\Phi_1(\eta, \zeta, \tau)] \times \\ \times K(t, \tau) d\tau, \quad (4)$$



Фиг. 4.

где

$$\Delta\Phi_1(\eta, \zeta, t) = \frac{1}{\rho_0^3 e^{3\eta} (1 - \zeta^2)^{3/2}} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \right. \\ \left. + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} - 3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right], \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1[\Phi_1(\eta, \zeta, t)] = & \frac{1}{\rho_0^{3m+2} e^\eta} \left\{ \frac{1}{(1-\zeta^2)^{m+\frac{1}{2}}} \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{E(\Phi_1)}{e^{t(3m+1)\eta}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right] + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{e^{t(3m+1)\eta}} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{E(\Phi_1)}{(1-\zeta^2)^m} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{E(\Phi_1)}{(1-\zeta^2)^{m+\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \right] \right\}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$E(\Phi_1) = \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 + (1-\zeta^2) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}. \quad (5.7)$$

Решение уравнения (5.4) будем искать в виде

$$\Phi_1(\eta, \zeta, t) = e^{3\eta} g(\zeta, t), \quad (5.8)$$

где $g(\zeta, t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению в дальнейшем.

Внося (5.8) в (5.4), получим

$$\begin{aligned} P[g(\zeta, t)] - \alpha \int_{\tau_1}^t P[g(\zeta, \tau)] K(t, \tau) d\tau - \\ - \beta b(\zeta) \int_{\tau_1}^t Q[g(\zeta, \tau)] K(t, \tau) d\tau = 0, \quad (5.9) \end{aligned}$$

где

$$P[g(\zeta, t)] = (1-\zeta^2) \frac{d^2 g(\zeta, t)}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dg(\zeta, t)}{d\zeta}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} Q[g(\zeta, t)] = E_1(g) \left\{ \frac{dg(\zeta, t)}{d\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} [E_1(g)] + \right. \\ \left. + \frac{2m\zeta}{1-\zeta^2} \frac{dg(\zeta, t)}{d\zeta} + \frac{d^2 g(\zeta, t)}{d\zeta^2} \right\}, \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$E_1(g) = \left\{ 9[g(\zeta, t)]^2 + (1-\zeta^2) \left[\frac{dg(\zeta, t)}{d\zeta} \right]^2 \right\}^{\frac{m-1}{2}}. \quad (5.12)$$

$$b(\zeta) = \frac{1}{\rho_0^{3(m-1)} (1-\zeta^2)^{m-2}}.$$

Таким образом, решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения с частными производными свелось к решению нели-

нейного интегро-дифференциального уравнения с обыкновенными производными.

Решение уравнения (5.9) представим в виде следующего ряда:

$$g(\zeta, t) = g_0(\zeta, t) + \beta g_1(\zeta, t) + \beta^2 g_2(\zeta, t) + \dots \quad (5.13)$$

Функция $g_0(\zeta, t)$ определится из уравнения

$$(1 - \zeta^2) \frac{d^2 g_0(\zeta, t)}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dg_0(\zeta, t)}{d\zeta} = 0. \quad (5.14)$$

Решение этого уравнения будет

$$g_0(\zeta, t) = H_0(t) \left(\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + H_0^*(t), \quad (5.15)$$

где $H_0(t)$ и $H_0^*(t)$ — неизвестные функции от времени t .

Для определения функции $g_1(\zeta, t)$ будем иметь следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} (1 - \zeta^2) \frac{d^2 g_1(\zeta, t)}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dg_1(\zeta, t)}{d\zeta} - \alpha \int_{\tau_1}^t \left[(1 - \zeta^2) \frac{d^2 g_1(\zeta, \tau)}{d\zeta^2} + \right. \\ \left. + 2\zeta \frac{dg_1(\zeta, \tau)}{d\zeta} \right] K(t, \tau) d\tau = \\ = 8(m-1)b(\zeta)\zeta(1+6\zeta^2-3\zeta^4)^{\frac{m-3}{2}} H_1(t, \tau_1), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$H_1(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0(\tau)]^m K(t, \tau) d\tau. \quad (5.17)$$

Интегральное уравнение (5.16) можно свести к виду

$$\begin{aligned} (1 - \zeta^2) \frac{d^2 g_1(\zeta, t)}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dg_1(\zeta, t)}{d\zeta} = \\ = 8(m-1)b(\zeta)\zeta(1+6\zeta^2-3\zeta^4)^{\frac{m-3}{2}} \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \\ \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

(5.18) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого можно записать в следующем виде:

$$\dot{g}_1(\zeta, t) = H_0(t) \left(\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + H_0^*(t) +$$

$$+ [f_1(\zeta) + f_2(\zeta)] \left[H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right], \quad (5.19)$$

где

$$f_1(\zeta) = -\frac{8(m-1)}{3\rho_0^{3(m-1)}} \int_{\zeta}^{\zeta_0} \frac{\zeta^2 (3 - \zeta^2) (1 + 6\zeta^2 - 3\zeta^4)^{\frac{m-3}{2}}}{(1 - \zeta^2)^m} d\zeta, \quad (5.20)$$

$$f_2(\zeta) = \frac{8(m-1)}{3\rho_0^{3(m-1)}} \zeta (3 - \zeta^2) \int_{\zeta}^{\zeta_0} \frac{\zeta (1 + 6\zeta^2 - 6\zeta^4)^{\frac{m-3}{2}}}{(1 - \zeta^2)^m} d\zeta.$$

Если ограничиться только первыми двумя приближениями, то решение интегро-дифференциального уравнения (5.9) в силу (5.13), (5.15) и (5.19) можно представить в следующем виде:

$$g(\zeta, t) = (1 + \beta) \left[H_0(t) \left(\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + H_0^*(t) \right] + \\ + \beta [f_1(\zeta) + f_2(\zeta)] \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \\ \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] + O(\beta^2). \quad (5.21)$$

Подставляя значение $g(\zeta, t)$ из (5.21) в (5.8) и пользуясь (5.3), можем написать выражение функции напряжений в следующем виде:

$$\Phi_1(\rho, \zeta, t) = \frac{\rho^3}{\rho_0^3} \left\{ (1 + \beta) \left[H_0(t) \left(\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + H_0^*(t) \right] + \right. \\ \left. + \beta [f_1(\zeta) + f_2(\zeta)] \left[H_1(t, \tau_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau \right] \right\}. \quad (5.22)$$

Решение уравнения (5.2) будет

$$\Phi_2(\rho, \zeta, t) = \frac{\rho^3}{\rho_0^3} \left[D_0(t) \left(\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + D_0^*(t) \right], \quad (5.23)$$

где $D_0(t)$ и $D_0^*(t)$ — неизвестные функции от времени t .

Теперь нужно определить неизвестные функции $H_0(t)$, $H_0^*(t)$, $D_0(t)$ и $D_0^*(t)$. Для этого необходимо пользоваться условиями на оси вала, на контуре и на линии раздела.

Для компонентов касательных напряжений в сферических координатах имеем формулы

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(k)}(t) &= -\frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}, \\ \tau_{r\theta}^{(k)}(t) &= \frac{1}{\rho^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (k=1, 2) \quad (5.24)$$

Подставляя значение Φ из (5.22) и (5.23) в (5.24), получим выражения компонентов касательных напряжений в сферических координатах

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(t) &= -\frac{3}{\rho_0^3 \sin^2 \theta} \left\{ (1 + \beta) \left[H_0(t) \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H_0^*(t) \right] + \beta [f_1(\cos \theta) + f_2(\cos \theta)] H_2(t, \tau_1) \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(1)}(t) &= -\frac{1}{\rho_0^3 \sin \theta} \left\{ (1 + \beta) H_0(t) \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[\frac{df_1(\cos \theta)}{d \cos \theta} + \frac{df_2(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right] H_2(t, \tau_1) \right\}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(2)}(t) &= -\frac{3}{\rho_0^3 \sin^2 \theta} \left[D_0(t) \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) + D_0^*(t) \right], \\ \tau_{r\theta}^{(2)}(t) &= -D_0(t) \frac{\sin \theta}{\rho_0^3}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где

$$H_2(t, \tau_1) = H_1(t, \tau_1) + \alpha \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau, \alpha) d\tau.$$

Если принять

$$D_0^*(t) = -\frac{2}{3} D_0(t), \quad (5.27)$$

то напряжения обращаются в нуль на оси вала (это следует из раскрытия неопределенности в $\tau_{\theta z}^{(2)}(t)$). Тогда (5.26) примет вид

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(2)}(t) &= \frac{D_0(t)}{\rho_0^3 \sin^2 \theta} (2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta), \\ \tau_{r\theta}^{(2)}(t) &= -D_0(t) \frac{\sin \theta}{\rho_0^3}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Из (5.25) следует, что на боковой поверхности конуса, при $\theta = \theta_1$, напряжение принимает значение, зависящее только от времени t . Значит, в этом случае имеем кручение конического вала, когда нагрузка, приложенная на боковую поверхность, зависит только от времени t .

Если боковая поверхность вала не свободна от внешних сил, то проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения

должна совпадать по величине с приложенной нагрузкой. В нашем случае контурное условие будет иметь вид [13]

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = -A(t) \rho^2 \sin^2 \theta \quad \text{при } \theta = \theta_1, \quad (5.29)$$

где $A(t)$ — заданная функция от времени t .

Из (5.1) и (5.29) получим

$$\begin{aligned} H_0^*(t) = & -\frac{\rho_0^3 \sin^2 \theta_1}{3(1+\beta)} A(t) - H_0(t) \left(\cos \theta_1 - \frac{1}{3} \cos^3 \theta_1 \right) - \\ & - \frac{\beta}{1+\beta} [f_1(\cos \theta_1) + f_2(\cos \theta_1)] H_2(t, \tau_1). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Тогда выражение $\Phi_1(\rho, \theta, t)$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\rho, \theta, t) = & \frac{\rho^3}{\rho_0^3} \left\{ (1+\beta) H_0(t) \left[(\cos \theta - \cos \theta_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} (\cos^3 \theta - \cos^3 \theta_1) \right] + \beta [f_1(\cos \theta) - f_1(\cos \theta_1) + \right. \\ & \left. + f_2(\cos \theta) - f_2(\cos \theta_1)] H_2(t, \tau_1) - \frac{\rho_0^3 \sin^2 \theta_1}{3} A(t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Из условия на линии раздела

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \quad \text{при } \theta = \theta_2 \quad (5.32)$$

получим

$$\begin{aligned} D_0(t) = & (1+\beta) \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1 - \frac{1}{3} (\cos^3 \theta_2 - \cos^3 \theta_1)}{\cos \theta_2 - \frac{1}{3} \cos^3 \theta_2 - \frac{2}{3}} H_0(t) - \\ & - \beta \frac{f_1(\cos \theta_1) + f_2(\cos \theta_1)}{\cos \theta_2 - \frac{1}{3} \cos^3 \theta_2 - \frac{2}{3}} H_2(t, \tau_1) - \frac{\rho_0^3 \sin^2 \theta_1}{3 \left(\cos \theta_2 - \frac{1}{3} \cos^3 \theta_2 - \frac{2}{3} \right)} A(t). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Остается определить неизвестную функцию $H_0(t)$. Для этого воспользуемся условием (1.26), которое в данном случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \theta} = & \alpha \int_{\tau_1}^t \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_1(\tau)}{\partial \theta} K(t, \tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{\sin^{2(m-1)} \theta_1} \int_{\tau_1}^t \frac{1}{\rho^{2m-1}} \frac{\partial \Phi_1(\tau)}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)^2 \Bigg|_0^{m-1} K(t, \tau) d\tau = 2 \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \theta} \quad \text{при } \theta = \theta_2. \quad (5.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= - \frac{\sqrt{1 - \zeta_2^2}}{\rho_0^3} \left\{ H_0(t) (1 - \zeta_2^2) + \beta [f_1(\zeta) + f_2(\zeta)] \zeta \right\} H_2(t, \tau_1), \\ \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} &= - \frac{(1 - \zeta_2^2)^{3/2}}{3\zeta_2 - \zeta_2^3 - 2} \left\{ (1 + \beta) [3(\zeta_2 - \zeta_1) - (\zeta_2^3 - \zeta_1^3)] H_0(t) - \right. \\ &\quad \left. - 3\beta [f_1(\zeta_1) + f_2(\zeta_1)] H_2(t, \tau_1) - \rho_0^3 (1 - \zeta_1^2) A(t) \right\}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^{2m+1}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{m-1} &= \\ = \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \left[\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{m-1}, \\ \zeta_1 = \cos \theta_1, \quad \zeta_2 = \cos \theta_2, \quad \rho_0 = \sqrt{l^2 + r_2^2}. \end{aligned}$$

Из (5.35) следует, что (5.34) не содержит координаты ρ . Поэтому (5.34) представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $H_0(t)$. Применяя к этому уравнению вышеизложенный метод, получим выражение $H_0(t)$.

Выражение крутящего момента будет

$$M(t) = M_1(t) + M_2(t) = 2\pi \int_0^{r_2} r^2 \tau_{\varphi_2} dr + 2\pi \int_{r_2}^{r_1} r^2 \tau_{\varphi_2} dr. \quad (5.36)$$

После интегрирования соотношению (5.36) можно дать следующий вид:

$$M(t) = - \frac{2\pi}{3} \frac{\rho_0^3 \sin^2 \theta_1}{\cos^3 \theta_1} A(t). \quad (5.37)$$

В частном случае, когда боковая поверхность свободна от внешней нагрузки, т. е. $A(t) = 0$, из (5.35) получим

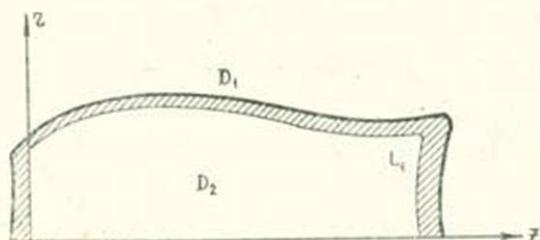
$$M_1(t) = - M_2(t). \quad (5.38)$$

В этом случае будем иметь кручение вала, когда основание области D_1 закручивается крутящим моментом $M_1(t)$, а основание другой области D_2 — крутящим моментом $M_2(t)$.

Аналогичным образом можно решить задачу кручения полого конического вала, скручиваемого силами, приложенными на боковой поверхности вала.

§ 6. Круглый вал переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием

Рассмотрим теперь задачу о кручении вала переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием. Области осевого сечения вала, соответствующие покрытию и основному материалу, обозначим соответственно через D_1 и D_2 , их линию раздела—через L_1 (фиг. 5). Постоянную толщину покрытия обозначим через δ . Допустим, что толщина покрытия пренебрежимо мала по сравнению с поперечными размерами вала.



Фиг. 5.

Для криволинейной области D_1 введем местную координатную систему s и n , где s —длина дуги линии раздела L_1 , отсчитываемой от ее левого конца, n —расстояние точки до линии раздела L_1 по ее нормали. Эту координатную систему можно считать прямолинейной и ортогональной.

Допустим, что материал в области D_2 обладает свойством ползучести, а в области D_1 материал является упругим.

Для области D_2 введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , направив ось z по оси вала.

Решение рассматриваемой задачи приводится к определению непрерывной в области осевого сечения вала функции напряжений $\Phi(r, z, t)$, удовлетворяющей в области D_2 нелинейному интегро-дифференциальному уравнению (1.25), контурному условию (1.9) и условиям (1.13) и (1.17) на линии раздела L_1 . В данном случае контурное условие и условия на линии раздела примут следующий вид:

$$\Phi_1(s, \delta, t) = C_1(t). \quad (6.1)$$

$$\Phi_1(s, 0, t) = \Phi_2(s, 0, t), \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \frac{1}{G_2(t)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G_2(\tau)} \right] d\tau - \\ &- 3 \int_{\tau_1}^t F_2[\sigma_i^{(2)}(\tau)] \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{на } L_1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $C_1(t)$ —произвольная функция, зависящая только от времени t .

На основании малости δ можно положить, что функция напряжений $\Phi_1(s, n, t)$ в области D_1 зависит от координаты n линейно, т. е.

$$\Phi_1(s, n, t) = A(s, t)n + B(s, t), \quad (6.4)$$

где $A(s, t)$ и $B(s, t)$ — неизвестные функции.

Тогда условия (6.1) и (6.2) можно представить в виде

$$A(s, t)\delta + B(s, t) = C_1(t) \quad \text{на } L_1, \quad (6.5)$$

$$B(s, t) = \Phi_2(r, z, t) \quad \text{на } L_1. \quad (6.6)$$

Если принять, что $G_2(t) = G_2 = \text{const}$ и функция $F_2(z_i)$ определяется формулой (1.19), то, пользуясь (6.4), условию (6.3) можно придать следующий вид:

$$A(s, t) = \mu \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \alpha G_2 \int_0^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} K(t, \tau) d\tau - \right. \\ \left. - \beta G_2 \int_0^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} N_2[\Phi_2(\tau)] K(t, \tau) d\tau \right\}, \quad (6.7)$$

где

$$N_2(\Phi_2) = \frac{1}{r^{2(m-1)}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}. \quad (6.8)$$

Подставляя выражения $A(s, t)$ и $B(s, t)$ из (6.6) и (6.7) в (6.5), получим

$$\Phi_2 + \mu \delta \left\{ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \alpha G_2 \int_0^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} K(t, \tau) d\tau - \right. \\ \left. - \beta G_2 \int_0^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial n} N_2[\Phi_2(\tau)] K(t, \tau) d\tau \right\} = C_1(t) \quad \text{на } L_1. \quad (6.9)$$

Таким образом, задача кручения круглого вала переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием приводится к той же задаче для однородного вала с несколько измененным контурным условием (6.9).

В качестве приложения вышеизложенных результатов рассмотрено кручение круглого вала с усиливающим покрытием. Область осевого сечения, соответствующую усиливающему материалу вала, обозначим через D_1 , а область, соответствующую основному материалу, — через D_2 . Модули мгновенной деформации сдвига материалов областей D_1 и D_2 соответственно обозначим через G_1 и G_2 . Пусть материал области D_2 обладает свойством ползучести, а в области D_1 материал является упругим.

В этом случае основное интегро-дифференциальное уравнение (1.25) и контурное условие (6.9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \alpha \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) K(t, \tau) d\tau - \\ & - \beta \int_{\tau_1}^t \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^{2m+1}} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^m \right] K(t, \tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_2 + \mu \delta \left\{ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial r} - \alpha G_2 \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_2(\tau)}{\partial r} K(t, \tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \beta G_2 \int_{\tau_1}^t \left[\frac{1}{r^{2(m-1)}} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)^m \right] K(t, \tau) d\tau \right\} = 0 \quad \text{на } L_1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Если удовлетвориться только первыми тремя приближениями, то решение нелинейного интегрального уравнения (6.10) можно представить в виде (4.3).

Удовлетворив условию (1.8), получим

$$H_0^*(t) = 0. \quad (6.12)$$

Подставляя выражение $\Phi_2(r, t)$ из (4.3) в (6.10) и пользуясь (6.12), получим нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$. Если к этому уравнению применить вышележащий метод, то получим выражение $H_0(t, \tau_1)$.

Выражение $\Phi_1(r, t)$ определяется из соотношений (6.4), (6.6) и (6.7).

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный

университет

Поступила 14 VI 1963

Մ. Մ. Մանուկյան

**ՓՈՓՈՒԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԳԻԾ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ԼԻՍԵՆԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ
ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ**

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունն մեզ քննարկվում է տարբեր նյութերից կազմված լիսենոի ոլորման խնդիրը, երբ հաշվի են առնվում նյութերի ոչ գծային հատկությունները և ակնթարթային դիֆուզիայի մոդուլի փոփոխականությունը:

Քննարկվող խնդրի լուծման ժամանակ որպես հիմնական ֆիզիկական հիպոթեզ ընդունված է Ն. Խ. Հարությունյանի կողմից առաջադրված ոչ գծային սողի տեսությունը՝ նյութի ծերացման հաշվառումով [5]:

Աշխատության մեջ ցույց է տրվում, որ խնդրի լուծումը բերվում է ոչ գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Ստացված հավասարումները լուծելու համար օգտագործվում է փոքր պարամետրի մեթոդը, որը զարգացված է [2] աշխատության մեջ:

Որպես օրինակ լուծված են շրջանային և կոնական լինանների ոլորման խնդիրները:

Աշխատության մեջ քննարկվում է նաև ուժեղացնող բարակ ծածկույթ ունեցող փոփոխական տրամագծով բաղադրյալ լինտի ոլորման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чобанян К. С. Кручение составного вала переменного диаметра. ДАН АрмССР, 27, № 3, 1958, 139—144.
2. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение круглых стержней переменного диаметра в условиях неустановившейся ползучести. Проблемы механики сплошной среды. М., 1961, 10—28.
3. Манукян М. М. Кручение составных валов переменного сечения в условиях установившейся ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961, 115—121.
4. Манукян М. М., Саркисян В. С. Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом нелинейной ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 3, 1963.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
6. Качанов Л. М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра. ПММ, 12, вып. 4, 1948.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
8. Карапетян К. С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 4, 1959, 57—88.
9. Согоян А. С. О некоторых закономерностях ползучести древесины. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 2, 1958, 59—63.
10. Месчян С. Р. Экспериментальное изучение закономерностей деформаций ползучести глинистого грунта. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 1, 1963, 63—85.
11. Ross A. D. The effects of creep on instability and indeterminacy investigated by plastic models. London, 1946.
12. Абрамян Б. Л. О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, 24, вып. 6, 1960.
13. Соляник-Красса К. В. Кручение вала переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
14. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.