ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 5, 1963 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. Ц. Тумаркин

Свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса и типа Коши-Лебега

Решение многих задач требует знания свойств аналитических функций, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса и типа Коши-Лебега. Среди таких свойств в первую очередь важно знать следующее:

1) Существуют ли у аналитических функций $\Phi(z)$, представимых в области G со спрямляемой границей Γ интегралами типа Коши-Стильтьеса, угловые граничные значения почти всюду на Γ?

2) Выполняется ли для нулей рассматриваемых аналитических функций, расположенных в области G, условие, подобное имеющему место для нулей ограниченных в области G аналитических функций?

Все указанные свойства явились бы немедленными следствиями вхождения аналитических функций, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса, в класс A функций с ограниченной характеристикой*. В случае круга известная теорема В. И. Смирнова (см., напр., [8]) утверждает вхождение всякой аналитической функции $\Phi(z)$, представимой интегралом типа Коши-Стильтьеса, в класс H_δ с любым $\delta < 1$. Так что в случае круга рассматриваемые функции $\Phi(z)$ заведомо входят в класс $D \subset A$, ибо $H_\delta \subset D$ при любом $\delta > 0$.

Нетрудно видеть, что доказательство, предложенное В. И. Смирновым для круга, распространяется для любой области G, ограниченной выпуклой кривой Γ. В этом случае также удается представить рассматриваемую функцию $\Phi(z)$ в виде суммы четырех функций, для каждой из которых либо действительная, либо мнимая часть ее сохраняет постоянный знак в области G. Но функции с только что указанным свойством наверняка входят в класс $H_\delta(G)$ с любым $\delta < 1$. В этом можно сразу убедиться, пересаживая при помощи конформного отображения взятые функции в круг, где соответствующий факт хорошо известен.

Заметим, что в случае произвольной области G, ограниченной жордановой спрямляемой кривой Γ, уже нельзя утверждать вхождение в класс D не только для функций, представимых интегралами типа Коши-Лебега, но даже для функций $\Phi(z)$, представимых инте-

* Определение классов аналитических функций см. [12].

гралами Коши: $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. В самом деле, для такой области G функция $\psi'(z)$, где $w=\psi(z)$ $(z=\varphi(w))$ конформно отображает G на круг $|w|<1$, входит в класс $E_1(G)$, ибо $\int\limits_{\Gamma_r}|\psi'(z)||dz|=2\pi r$ (Γ_r — прообраз $|w|=r$ при отображении $w=\psi(z)$). Поэтому $\psi'(z)$ будет представима интегралом Коши. Но в то же время, если $G\overline{\in}S$, то $\psi'(z)\overline{\in}D(G)$*. В противном случае $\psi'[\varphi(w)]=\frac{1}{\varphi'(w)}\in D$ в круге $|w|<$ <1, откуда следовала бы принадлежность области G классу S (см., напр., [8]).

Теперь естественно встают следующие, до сих пор остающиеся открытыми, вопросы:

Будет ли всегда интеграл типа Коши-Стильтьеса, взятый по замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, определять в областях с границей Γ аналитические функции с ограниченной характеристикой?

Если же это не так, то каковы те необходимые и достаточные условия для Γ, чтобы был справедлив указанный факт?

Заметим, что пока также не решена следующая ранее поставленная С. Н. Мергеляном проблема:

Пусть $\{\alpha_j\}$ — нули интеграла типа Коши-Стильтьеса $\int\limits_{P}\frac{d\mu}{\zeta-z}$, взятого по континууму P, не разбивающему плоскость. Предположим, что $\sum g(\alpha_j, z_0)=\infty$, где $g(z, z_0)$ — функция Грина дополнения к P с полюсом в $z=z_0$. Следует ли отсюда, что $\int\limits_{P}\frac{d\mu}{\zeta-z}\equiv 0$ всюду в дополнении P?

Положительное решение сформулированной проблемы позволило бы немедленно распространить известную теорему С. Н. Мергеляна о функциях, допускающих равномерное приближение многочленами на континуумах, не разбивающих плоскость, на приближение рациональными дробями с полюсами $\{\alpha_j\}$.

Заметим в связи с этим следующее: пусть известно, что P — замкнутая область, ограниченная жордановой кривой Γ. То даже тогда интеграл типа Коши-Стильтьеса, взятый по P, может изображать аналитические функции, не являющиеся функциями ограниченного вида в дополнении P.

---

* Через S обозначается класс областей, удовлетворяющих условию В. И. Смирнова: $G\in S$, если функция $\ln|\varphi'(w)|$ представима в $|w|<1$ интегралом Пуассона-Лебега. Существование областей $G\overline{\in}S$ с жордановой спрямляемой границей установлено М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. См., напр., [8].

В самом деле, известны примеры однолистных аналитических в $|w|<1$ и непрерывных в замкнутом круге $|w|\leq 1$ функций $\varphi(w)$, производные которых не имеют на $|w|=1$ радиальных граничных значений. На существовании подобных примеров мы уже останавливались в работе [9]. Обозначим через G область, на которую $z=\varphi(w)$ отображает круг $|w|<1$. Тогда функция $\psi'(z)$ обязана входить в класс $E_1(G)$ ($w=\psi(z)$ — функция, обратная к $z=\varphi(w)$), ибо, обозначая через Γ_r — образ $|w|=r$ при отображении $z=\varphi(w)$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_r} |\psi'(z)|\,|dz| = 2\pi r, \quad 0<r<1.$$

Функцию $\psi'(z)\in E_1(G)$ можно будет представить в области G интегралом типа Коши-Стильтьеса. В самом деле,

$$\psi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\psi'(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Откуда, используя равномерную ограниченность интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_r} |\psi'(z)|\,|dz| \leq 2\pi, \quad 0<r<1,$$

и теорему Радона о возможности выбора из ограниченной последовательности аддитивных функций множеств слабо сходящейся подпоследовательности, имеем $\psi'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}$, где $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}|d\mu|\leq 2\pi$. Функция $\psi'(z)$ заведомо не является функцией ограниченного вида в G. Действительно, тогда аналогичным свойством обладала бы и функция $\psi'[\varphi(w)]=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$, что невозможно, так как $\varphi'(w)$ не имеет даже радиальных граничных значений.

В связи с приведенным сейчас примером, видимо, стоит в общем случае поставить следующий вопрос:

При каких условиях на континуум P, не разбивающий плоскость, всякая аналитическая в дополнении к P функция, представимая интегралом типа Коши-Стильтьеса $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{P}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}$, такова, что частное $\dfrac{\Phi(z)}{\psi'(z)}$ является функцией с ограниченной характеристикой в G? (Здесь $w=\psi(z)$ — конформное отображение области G — дополнения к P на $|w|<1$).

Легко видеть, что области, обладающие только что указанным свойством, будут удовлетворять условию, высказанному С. Н. Мергеляном.

Для рассматриваемого нами случая интегралов типа Коши-Стильтьеса, взятых по жордановому спрямляемому контуру, проблема, поставленная С. Н. Мергеляном, также остается открытой.

Желая выделить класс областей, для которых можно гарантировать хорошие свойства аналитических функций, изображаемых интегралами типа Коши-Стильтьеса, мы ввели специальный класс областей K, определяемый следующим образом:

Область $G \in K$, если всякая аналитическая в G функция $\Phi(z)$, представимая интегралом типа Коши-Стильтьеса

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in G, \tag{1}$$

(Γ — жорданова спрямляемая кривая, являющаяся границей области G) *после пересадки при помощи конформного отображения $z = \varphi(w)$ в круг $|w| < 1$* и умножения на $\varphi'(w)$, будет представима интегралом типа Коши-Стильтьеса в круге $|w| < 1$:*

$$\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{d\lambda(\theta)}{e^{i\theta} - w}. \tag{2}$$

Мы переходим к изложению наших результатов, касающихся областей класса K**. Заметим, что для всякой области $G \in K$ будет справедливо свойство, сформулированное в общей проблеме С. Н. Мергеляна. Оно для таких областей совсем очевидно, ибо тогда $\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w) \in H_\delta$, $0 < \delta < 1$, по теореме В. И. Смирнова. Откуда, учитывая, что $\varphi'(w) \in H_1$ (см. [8], гл. III), заключаем о вхождении функции $\Phi[\varphi(w)]$ в класс функций A с ограниченной характеристикой.

Теорема 1. *Чтобы область G входила в класс K необходимо и достаточно выполнение условия:*

Существует такая константа A, что для всякой рациональной дроби $R(w)$, все полюсы которой лежат в $|w| < 1$, из условия

$$|R(e^{i\theta})| \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{3}$$

вытекает неравенство

$$|r(\zeta)| \leq A, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{4}$$

Здесь $r(z)$ — рациональная дробь, получающаяся суммированием главных частей разложений функции $R[\psi(z)]$ в окрестности ее полюсов (последнее равносильно тому, что

$$r(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{R[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \in \bar{G}. \tag{5}$$

* Мы предполагаем здесь, что $\infty \bar{\in} G$. Если же $\infty \in G$, то $z = \varphi(w)$ конформно отображает $|w| > 1$ на G так, что $\varphi(\infty) = \infty$.

** Основные результаты были доложены нами на V Всесоюзной конференции по теории функций в Ереване в 1960 г., см. [10].

Замечание. *Вместо того, чтобы перебирать все рациональные дроби с полюсами в $|w|<1$, достаточно для вхождения G в класс K установить выполнение указанного в теореме 1 условия для всевозможных произведений Бляшке с полюсами в $|w|<1$.*

Доказательство. Установим вначале необходимость.

Обозначим через L — какой-либо контур, содержащийся в $|w|<1$ и охватывающий все полюсы $R(w)$, а через l — образ L при отображении $z=\varphi(w)$.

Тогда, если функции $\Phi(z)$ и $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ представимы соответственно в G и $|w|<1$ формулами (1) и (2), то имеет место равенство

$$\int_\Gamma r(\zeta)\,d\mu(\zeta)=\int_l r(z)\,\Phi(z)\,dz=\int_L r[\varphi(w)]\,\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw=$$

$$=\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta). \qquad (6)$$

Крайние равенства слева и справа устанавливаются, используя (1) и (2) и меняя порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле:

$$\int_l r(z)\,\Phi(z)\,dz=\int_l r(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\right\}dz=$$

$$=\int_\Gamma\left[\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{r(z)\,dz}{\zeta-z}\right]d\mu(\zeta)=\int_\Gamma r(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Здесь мы приняли во внимание равенство $-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_l\frac{r(z)\,dz}{z-\zeta}=r(\zeta)$, ибо функция $r(z)$ аналитична всюду вне и на кривой l, причем $r(z)=0$ при $z=\infty$. Остальные равенства в (6) очевидны.

Пусть теперь $G\in K$. Возьмем какую-либо последовательность $\{R_n(w)\}$ рациональных дробей, все полюса которых лежат в $|w|<1$ таких, что $|R_n(e^{i\theta})|\leq 1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, $n=1,2,\cdots$. В силу (6) заключаем, что последовательность соответствующих дробей $\{r_n(z)\}$ будет удовлетворять условию

$$\left|\int_\Gamma r_n(\zeta)\,d\mu(\zeta)\right|=\left|\int_0^{2\pi}R_n(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta)\right|\leq\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}|R_n(e^{i\theta})|\int_0^{2\pi}|d\lambda(\theta)|. \qquad (7)$$

При этом в качестве $\mu(\zeta)$ может фигурировать любая функция ограниченной вариации на Γ. Ибо по всякой такой $\mu(\zeta)$ можно построить аналитическую функцию $\Phi(z)$, определяемую интегралом типа Коши-Стильтьеса. Причем ввиду условия $G\in K$ функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ будет представляться в $|w|<1$ формулой (2).

Будем теперь $\{r_n(\zeta)\}$ рассматривать как последовательность элементов пространства C_Γ — непрерывных на кривой Γ функций. Согласно (7) последовательность $\{y(r_n)\}$ значений функционала $y(f)$ на элементах $\{r_n\}$ будет ограничена для каждого функционала $y(f) = \int\limits_\Gamma f(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ пространства. Хорошо известно, что отсюда выводится равномерная ограниченность норм $\{\|r_n\|\}$ (см., напр., [3], гл. VII, а также [5], стр. 34), т. е. что $\max\limits_{\zeta\in\Gamma}|r_n(\zeta)| \leqslant A < \infty$, $n = 1, 2, \cdots$. Так как с самого начала мы брали произвольную последовательность $\{R_n(e^{i\theta})\}$, то из доказанного сразу следует необходимость.

Предположим теперь, что условия теоремы 1 выполнены, докажем тогда включение $G \in K$. Возьмем какую-либо функцию $\Phi(z)$, представимую интегралом типа Коши-Стильтьеса (1). Воспользуемся опять цепочкой равенств (6), в которой пока еще не установлена справедливость равенства крайнего справа, но на него нам не придется опираться.

Мы имеем

$$\left|\int\limits_L R(w)\,\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw\right| = \left|\int\limits_\Gamma r(\zeta)\,d\mu(\zeta)\right| \leqslant A\int\limits_\Gamma |d\mu(\zeta)|$$

для любой рациональной дроби $R(w)$, $|R(e^{i\theta})| \leqslant 1$, с полюсами в $|w| < 1$. Но отсюда согласно критерию В. П. Хавина [13] вытекает возможность представить в $|w| < 1$ функцию $\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)$ интегралом типа Коши-Стильтьеса (2). При этом можно подобрать функцию $\lambda(\theta)$ так, что $\int\limits_0^{2\pi}|d\lambda(\theta)| \leqslant A\int\limits_\Gamma |d\mu(\zeta)|$. Итак, теорема 1 полностью доказана.

Как мы уже отмечали в конце доказательства теоремы 1, из неравенства (4) следует вывод о возможности для областей $G \in K$ представить функции $\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)$ интегралом типа Коши-Стильтьеса (2) с $\int\limits_0^{2\pi}|d\lambda(\theta)| \leqslant A\int\limits_\Gamma |d\mu(\zeta)|$. Причем константа A будет одной и той же для всех функций $\Phi(z)$, представимых в области G интегралом типа Коши-Стильтьеса (1). Ввиду того, что мы будем впоследствии ссылаться на этот факт, сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 2. *Если область $G \in K$, то для всякой функции $\Phi(z)$, представимой в области G интегралом типа Коши-Стильтьеса $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$, функция $\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)$ будет представима в круге $|w| < 1$ интегралом типа Коши-Стильтьеса*

$$\Phi[\varphi(w)]\,\varphi'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda(\theta)}{e^{i\theta}-w},$$

где

$$\int_0^{2\pi}|d\lambda(\theta)|\leqslant A\int_\Gamma|d\mu(\zeta)|. \tag{8}$$

Причем константу A можно считать одной и той же для всех функций $\Phi(z)$, представимых в области G интегралом типа Коши-Стильтьеса.

Замечание I. Справедливость неравенства (8) с одной и той же константой для всех рассматриваемых функций $\Phi(z)$ можно установить непосредственно, опираясь только на определение класса K. Соответствующие рассуждения, использующие одну теорему функционального анализа, приведены дальше в ходе доказательства теоремы 6.

II. Константа A в (8) зависит, вообще говоря, от взятой области $G\in K$, а не является абсолютной константой даже для областей, с равномерно ограниченными длинами границ Γ. Действительно, пусть в качестве константы A в неравенстве (8) можно было брать для всех таких областей $G\in K$ одно и то же число. Тогда простые рассуждения позволили бы убедиться в том, что всякая область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, входит в класс K. Это на самом деле не так, если $G\in S^*$.

Справедливость приведенного после формулировки теоремы 1 замечания вытекает из следующих соображений.

Если нам удастся установить справедливость неравенства (4) для всевозможных произведений Бляшке с полюсами в $|w|<1$, то можно доказать затем неравенство (4) для всякой рассматриваемой рациональной дроби $R(w)$.

Для этого воспользуемся тем, что для взятой дроби $R(w)$ можно найти последовательность произведений Бляшке $\{b_n(w)\}$ с полюсами в $|w|<1$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}b_n(e^{i\theta})\,\omega(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}R(e^{i\theta})\,\omega(\theta)\,d\theta \tag{9}$$

для любой суммируемой на $[0,2\pi]$ функции $\omega(\theta)$.

В самом деле, для аналитической и ограниченной в $|w|>1$ по модулю единицей функции $R(w)$ удастся найти последовательность произведений Бляшке $\{b_n(w)\}$, равномерно сходящуюся к $R(w)$ внутри $|w|>1$.

Но отсюда уже следует справедливость (9) (см. [8], гл. II, § 14). Полагая в (9) $\omega(\theta)\,d\theta=\varphi'(e^{i\theta})\,d(e^{i\theta})$ и используя равенство (5), убеж-

* См. теорему 5.

даемся в том, что, если удается установить неравенство (4) для всевозможных произведений Бляшке с полюсами в $|w|<1$, то оно будет верно и для всех рассматриваемых рациональных дробей.

Для вывода о принадлежности области G классу K можно вместо того, чтобы смотреть будет ли представима в круге $|w|<1$ интегралом Коши-Стильтьеса (2) любая функция вида $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$, где $\Phi(z)$ представлялась в области G интегралом типа Коши-Стильтьеса (1), делать то же самое, ограничиваясь лишь всеми функциями $\Phi(z)$, представимыми в G интегралами типа Коши-Лебега (соответствующими абсолютно непрерывным функциям $\psi(\zeta)$ в формуле (1)).

С другой стороны, если область $G\in K$, то для всякой функции $\Phi(z)$, представимой в G интегралом типа Коши-Лебега, функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ будет представима в $|w|<1$ интегралом типа Коши-Лебега. (Хотя *a priori* она могла допускать представление при помощи интегралов типа Коши-Стильтьеса).

Только что перечисленные факты устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть известно, что для всякой аналитической в области G функции $\Phi(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \tag{10}$$

функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ будет представима в круге $|w|<1$ интегралом типа Коши-Стильтьеса (2).

Тогда область $G\in K$, т. е. указанное только что свойство будет иметь место также для всех функций $\Phi(z)$, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса.

Пусть теперь известно, что область $G\in K$. Тогда для всякой функции $\Phi(z)$, представимой интегралом типа Коши-Лебега (10), функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ будет представима в $|w|<1$ интегралом типа Коши-Лебега:

$$\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi}\frac{\Omega(\theta)\,d\theta}{e^{i\theta}-w}. \tag{11}$$

Докажем вначале первую часть теоремы.

Предположим, что для всякой функции $\Phi(z)$, допускающей представление (10), функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ представима интегралом типа Коши-Стильтьеса (2).

Применим рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве необходимости в теореме 1. Мы приходим тогда к равенству (7), принимающему в рассматриваемом случае следующий вид:

$$\left|\int_{\Gamma}r_n(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right|=\left|\int_{0}^{2\pi}R_n(e^{i\theta})\,d\lambda(\theta)\right|\leqslant\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|R_n(e^{i\theta})|\int_{0}^{2\pi}|d\lambda(\theta)|. \tag{12}$$

Здесь $\{R_n(w)\}$ — какая-либо последовательность рациональных дробей с полюсами внутри $|w|<1$, для которых $|R_n(e^{i\theta})|\leqslant 1$ на $|w|=1$. Причем в качестве $\omega(\zeta)$ может фигурировать любая суммируемая на Γ функция.

Теперь удобно трактовать $\left\{\int\limits_\Gamma r_n(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right\}$ как последовательность линейных функционалов над пространством $L^1(\Gamma)$ суммируемых на Γ функций $\omega(\zeta)$. В силу (12) значения рассматриваемой последовательности функционалов, принимаемые на каждом элементе $\omega(\zeta)$ пространства $L^1(\Gamma)$, будут ограничены. Но отсюда, как известно, (см., напр., [5]) вытекает равномерная ограниченность норм наших функционалов. Следовательно,

$$\operatorname{vrai}\max_{\zeta\in\Gamma}|r_n(\zeta)|=\max_{\zeta\in\Gamma}|r_n(\zeta)|\leqslant C,\quad n=1,2,\cdots. \tag{13}$$

Примем далее во внимание, что неравенство (13) имеет место для любой последовательности $\{r_n^1(z)\}$ соответствующих произвольной последовательности $\{R_n(w)\}$ рациональных дробей с полюсами внутри $|w|<1$ и с условием $|R_n(w)|\leqslant 1$ на $|w|=1$. Это позволит немедленно установить существование константы A, ограничивающей на Γ модули всевозможных дробей $r(\zeta)$, соответствующих рациональным дробям $R(w)$ с полюсами в $|w|<1$, для которых $|R(e^{i\theta})|\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. По теореме 1 только что проверенный факт дает возможность заключить, что $G\in K$.

Переходим к доказательству второй части утверждения теоремы. Пусть $G\in K$ и $\Phi(z)$ — какая-либо функция, допускающая представление интегралом типа Коши-Лебега

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Для суммируемой на Γ функции $\omega(\zeta)$ можно, очевидно, найти последовательность $\{\omega_n(\zeta)\}$ линейных комбинаций системы $\{\zeta^j\}$, $j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$, такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Gamma|\omega(\zeta)-\omega_n(\zeta)|\,|d\zeta|=0. \tag{14}$$

Положим

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{15}$$

Рассмотрим последовательность функций $\{\Phi_n[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\}$. Согласно теореме 2 функции $\Phi_m[\varphi(w)]\,\varphi'(w)-\Phi_n[\varphi(w)]\,\varphi'(w)$ можно представить в круге $|w|<1$ интегралом типа Коши-Стильтьеса

$$\Phi_m[\varphi(w)]\,\varphi'(w)-\Phi_n[\varphi(w)]\,\varphi'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\lambda_{n,m}(\theta)}{e^{i\theta}-w}, \tag{16}$$

причем

$$\int_0^{2\pi} |d\lambda_{n,m}(\theta)| \leqslant A \int_\Gamma |\omega_m(\zeta) - \omega_n(\zeta)| |d\zeta|. \tag{17}$$

Но функции $[\Phi_m[\varphi(w)] - \Phi_n[\varphi(w)]]\varphi'(w)$ будут аналитичны внутри $|w| < 1$ и входить в класс H_1, ибо каждая из этих функций является произведением функции $\varphi'(w)$ из класса H_1[4] на ограниченные в $|w| < 1$ функции $\Phi_m[\varphi(w)] - \Phi_n[\varphi(w)]$.

Поэтому функции $\lambda_{n,m}(\theta)$ обязаны быть абсолютно непрерывными на $[0, 2\pi]$. Подобный факт имеет место всегда, когда функция $F(w)$ класса H_1 представлена в $|w| < 1$ интегралом вида

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda(\theta)}{e^{i\theta} - w}.$$

Действительно, функцию $F(w) \in H_1$ можно представить в $|w| < 1$ интегралом Коши:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{F(e^{i\theta})\, d(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - w}.$$

Откуда вытекает, что $\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{d\left[\lambda(\theta) - i\int_0^\theta e^{it}F(e^{it})\,dt\right]}{e^{i\theta} - w}$ определяет в $|w| < 1$ функцию $\equiv 0$. По известной теореме Ф. и М. Рисс заключаем, что $\lambda(\theta) - i\int_0^\theta e^{it}F(e^{it})\,dt$ абсолютно непрерывна. Из этого немедленно следует абсолютная непрерывность на $[0, 2\pi]$ функции $\lambda(\theta)$.

Полагая в дальнейшем $\lambda'_{n,m}(\theta) = \Omega_{n,m}(\theta)$, мы сможем переписать (16) и (17) следующим образом

$$\Phi_m[\varphi(w)]\varphi'(w) - \Phi_n[\varphi(w)]\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Omega_{n,m}(\theta)\, d\theta}{e^{i\theta} - w}, \tag{18}$$

$$\int_0^{2\pi} |\Omega_{n,m}(\theta)|\, d\theta \leqslant A \int_\Gamma |\omega_m(\zeta) - \omega_n(\zeta)| |d\zeta|. \tag{19}$$

Применим далее хорошо известные рассуждения, которые используются обычно для доказательства полноты пространства L^p. Опираясь на сходимость в среднем на Γ последовательности $\{\omega_n(\zeta)\}$ к

[4] Напомним, что по предположению область G ограничена жордановой спрямляемой кривой Γ. Поэтому $\varphi'(w) \in H_1$.

$\omega(\zeta)$ (см. (14)) и на (19), мы сможем для чисел $\varepsilon_l = \frac{1}{2^l}$, $l = 1, 2, \cdots$, найти возрастающую последовательность номеров n_l такую, что

$$\int_0^{2\pi} |\Omega_{n_l, n_{l+1}}(\theta)|\, d\theta \leqslant A \int_\Gamma |\omega_{n_l}(\zeta) - \omega_{n_{l+1}}(\zeta)|\, |d\zeta| \leqslant \frac{1}{2^l}, \quad l = 1, 2, \cdots.$$

Отсюда вытекает сходимость почти всюду на $[0, 2\pi]$ ряда

$$\Omega_{n_1, n_2}(\theta) + \Omega_{n_2, n_3}(\theta) + \cdots$$

к некоторой функции $\Omega_{n_1}(\theta)$, суммируемой на $[0, 2\pi]$ (см., напр., [4]). Используем затем выражение (18) и хорошо известный признак возможности почленного интегрирования. Мы убеждаемся тогда в равномерной сходимости внутри круга $|w| < 1$ ряда

$$\{\Phi_{n_2}[\varphi(w)] - \Phi_{n_1}[\varphi(w)]\}\varphi'(w) + \{\Phi_{n_3}[\varphi(w)] - \Phi_{n_2}[\varphi(w)]\}\varphi'(w) + \cdots$$

к следующей функции, представимой интегралом типа Коши-Лебега:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Omega_{n_1}(\theta)}{e^{i\theta} - w}\, d\theta.$$

Итак, установлено существование в $|w| < 1$ предела

$$\lim_{n_l \to \infty} \{\Phi_{n_l}[\varphi(w)]\varphi'(w)\} - \Phi_{n_1}[\varphi(w)]\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Omega_{n_1}(\theta)\, d\theta}{e^{i\theta} - w}. \quad (20)$$

Из (20) и отмечавшейся выше представимости в $|w| < 1$ функции $\Phi_{n_1}[\varphi(w)]\varphi'(w)$ интегралом Коши вытекает равенство

$$\lim_{n_l \to \infty} \Phi_{n_l}[\varphi(w)]\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Omega_{n_1}(\theta) - ie^{i\theta}\Phi_{n_1}[\varphi(e^{i\theta})]\varphi'(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - w}\, d\theta.$$

Этим показана возможность представить в $|w| < 1$ функцию

$$\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n[\varphi(w)]\varphi'(w)$$

интегралом типа Коши:

$$\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Omega(\theta)\, d\theta}{e^{i\theta} - w}, \qquad \Omega(\theta) = \Omega_{n_1}(\theta) + ie^{i\theta}\Phi_{n_1}[\varphi(e^{i\theta})]\varphi'(e^{i\theta}).$$

Так как мы брали произвольную функцию $\Phi(z)$, представимую в области G интегралом типа Коши, то тем самым полностью доказана теорема.

Приведем теперь еще одно характеристическое условие для областей $G \in K$.

Теорема 4. *Чтобы область G, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ, входила в вкласс K, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:*

Для произвольной аналитической и ограниченной в $|w|>1$ *функции* $B(w)$, $B(\infty)=0$, *интеграл типа Коши-Лебега*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\psi(\zeta)]\,d\zeta}{\zeta-z}$$

определял в областях G *и* G^-, *границей которых служит* Γ, *ограниченные аналитические функции. (Здесь* $w=\psi(z)$ *конформно отображает* G *на* $|w|<1$).

Вместо произвольных ограниченных в $|w|>1$ *аналитических функций* $B(w)$ *можно брать всевозможные аналитические в* $|w|>1$ *и непрерывные в* $|w|\geqslant 1$ *функции* $C(w)$.

Тогда, если $G\in K$, *то функции* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{C[\psi(\zeta)]\,d\zeta}{\zeta-z}$ *обязаны быть непрерывными в* $\overline{G}$ *и* $\overline{G^-}$.

Обратно, если известно, что $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{C[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta$ *всегда определяет в* G^- *ограниченные аналитические функции, то* $G\in K$.

Доказательство. Пусть $G\in K$. Рассмотрим какую-либо аналитическую и ограниченную в $|w|>1$ функцию $B(w)$ с условием $B(\infty)=0$. Не нарушая общности, считаем, что $|B(w)|\leqslant 1$ в $|w|>1$. Очевидно, что для взятой функции $B(w)$ можно найти последовательность $\{R_n(w)\}$ рациональных дробей с полюсами внутри $|w|<1$, равномерно сходящуюся к $B(w)$ внутри $|w|>1$. Причем $|R_n(w)|\leqslant 1$ при $|w|>1$. Отсюда следует, что для любой суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции $\omega(\theta)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}R_n(e^{i\theta})\,\omega(\theta)\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}B(e^{i\theta})\,\omega(\theta)\,d\theta, \tag{21}$$

(см. [8]).

Полагая в (21)

$$\omega(\theta)\,d\theta=\frac{\varphi'(e^{i\theta})\,d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z},\qquad z\overline{\in}\Gamma,$$

и совершая переход с $|w|=1$ на Γ, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_n[\psi(\zeta)]\,d\zeta}{\zeta-z}=\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\psi(\zeta)]\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{22}$$

Теперь остается лишь воспользоваться теоремой 1, в силу которой интегралы $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_n[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta$ будут определять в области G^- рациональные дроби $r_n(z)$, равномерно ограниченные по модулю на Γ: $|r_n(\zeta)|\leqslant A$, $\zeta\in\Gamma$, $n=1, 2,\cdots$. После чего равенство (22) позволяет немедленно установить аналогичную оценку модуля для определяемой в области G^- интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{B[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta$ функции.

Чтобы проверить ограниченность в области G функции, заданной интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{B[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta$, достаточно снова использовать (4) и заметить, что интегралы типа Коши-Лебега $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_n[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta$ определяют внутри G функции $R_n[\psi(z)] - r_n(z)$, заведомо непрерывные в $\bar{G}$. Причем для модуля их граничных значений очевидно имеем:

$$|R_n[\psi(\zeta)] - r_n(\zeta)| \leq |R_n[\psi(\zeta)]| + |r_n(\zeta)| \leq 1 + A.$$

Пусть с самого начала мы взяли бы функцию $C(w)$, аналитическую в $|w| > 1$ и непрерывную в $|w| \geq 1$, $C(\infty) = 0$. Построим тогда последовательность рациональных дробей $\{R_n(w)\}$ с полюсами в $|w| < 1$, равномерно сходящуюся к $C(w)$ в $|w| \geq 1$. При помощи теоремы 1 мы убеждаемся в том, что последовательности $\{r_n(\zeta)\}$ и $\{R_n[\psi(\zeta)] - r_n(\zeta)\}$ удовлетворяют на Γ критерию Коши для равномерной сходимости. Поэтому последовательности $\{r_n(z)\}$ $\{R_n[\psi(z)] - r_n(z)\}$ равномерно сходятся в замкнутых областях $\bar{G}^-$ и $\bar{G}$ к непрерывным в $\bar{G}^-$ и $\bar{G}$ функциям. Откуда с помощью соотношения (22) сразу вытекает заключение о непрерывности в замкнутых областях $\bar{G}$ и $\bar{G}^-$ функций, определенных интегралами типа Коши-Лебега

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{C[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta.$$

Переходим к доказательству достаточности указанных в 1 части теоремы условий для принадлежности области G классу K. Введем два банаховских пространства B и $\bar{B}$, соответственно состоящие из ограниченных в $|w| > 1$ и в G^--аналитических функций $B(w)$ и $\bar{B}(z)$, с нормами

$$\|B(w)\| = \sup_{|w|>1}|B(w)|; \quad \|\bar{B}(z)\| = \sup_{z\in G^-}|\bar{B}(z)|. \tag{23}$$

Считая выполненным условие теоремы, получаем, что $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{B[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta$ можно рассматривать как аддитивную операцию T, переводящую пространство B в пространство $\bar{B}$. Причем эта операция будет замкнутой (см. [3]), что означает следующее: если

$$\|B_n(w) - B(w)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{и} \quad \|T(B_n) - \bar{B}(z)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{24}$$

то

$$\bar{B}(z) = T(B(w)).$$

Только что приведенное свойство операции T действительно имеет место. В самом деле,

$$T(B_n) = \widetilde{B}_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{B_n[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{25}$$

Из сделанного предположения $\|B_n(w) - B(w)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, определения нормы (23) и известных теорем о соответствии границ при конформном отображении областей, ограниченных спрямляемыми кривыми (см. [8], гл. III), следует, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0<\vartheta<2\pi} |B(e^{i\vartheta}) - B_n(e^{i\vartheta})| = \operatorname*{vrai\,max}_{\zeta\in\Gamma} |B[\psi(\zeta)] - B_n[\psi(\zeta)]| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому можно произвести переход к пределу под знаком интеграла в (25). Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{B[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{26}$$

Но, с другой стороны, по предположению (24) имеем:

$$\|T(B_n) - \widetilde{B}(z)\| = \|\widetilde{B}_n(z) - \widetilde{B}(z)\| = \sup_{z\in G^-} |\widetilde{B}_n(z) - \widetilde{B}(z)| \to 0. \tag{27}$$

Сравнивая (26) и (27), заключаем о равенстве

$$\widetilde{B}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{B[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

доказывающем замкнутость операции T.

Но аддитивная замкнутая операция банаховского пространства B в банаховское пространство $\widetilde{B}$ обязана быть линейной операцией (см. [3], стр. 427). Поэтому существует такое число A, что

$$\|\widetilde{B}(z)\| = \|T[B(w)]\| \leqslant A\cdot\|B(w)\|. \tag{28}$$

Применяя неравенство (28) к рациональным дробям $R(w)$ с полюсами в $|w|<1$, заключаем, что

$$\sup_{z\in G^-} |r(z)| \leqslant A \sup_{|w|>1} |R(w)|, \quad \text{где} \quad r(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{R[\psi(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z\in G^-.$$

По теореме 1 отсюда следует вывод о принадлежности области G классу K.

Для доказательства достаточности условия, приведенного во второй части теоремы, используем аналогичные рассуждения. Для этого надо рассмотреть отображение пространства C, составленного из аналитических в $|w|>1$ и непрерывных в $|w|\geqslant 1$ функций $C(w)$ в пространство $\widetilde{B}$, заданное равенством

$$\widetilde{B}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{C[\psi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta.$$

Только что установленная теорема 4 позволяет доказать, что необходимым условием вхождения области G в класс K является выполнение для области G условия В. И. Смирнова.

Теорема 5. *Если область G входит в класс K, то $G \in S$, т. е. для области G обязано выполняться условие В. И. Смирнова о представимости в $|w| < 1$ функции $\ln|\varphi'(w)|$ интегралом Пуассона-Лебега ($z = \varphi(w)$ конформно отображает круг $|w| < 1$ на область G).*

Доказательство. Предположим, что область $G \overline{\in} S$. Покажем, что тогда существует ограниченная в $|w| > 1$ аналитическая функция $B^*(w)$, для которой интеграл типа Коши-Лебега $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{B^*[\psi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta$ определяет внутри G функцию с неограниченным модулем. Откуда, в силу теоремы 4, будет следовать, что $G \overline{\in} K$.

Для определения функции $B^*(w)$ рассмотрим представление функции $\varphi'(w) \in H_1$

$$\varphi'(w) = \exp \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \ln|\varphi'(e^{i\theta})| d\theta \cdot \exp \frac{-1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\nu(\theta). \qquad (29)$$

Здесь $\nu(\theta)$ — неубывающая функция с производной, равной нулю почти для всех θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Причем в силу сделанного предположения $G \overline{\in} S$ имеем: $\nu(\theta) \neq \text{const}$ (см., напр, [8], гл. III). Построим вначале аналитическую в круге $|w| < 1$ функцию $\widetilde{B}(w)$:

$$\widetilde{B}(w) = \exp \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\nu(\theta), \qquad |w| < 1. \qquad (30)$$

Эта функция будет превосходить по модулю единицу в $|w| < 1$, что сразу вытекает из равенства

$$\ln|\widetilde{B}(\rho e^{i\alpha})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \alpha)} d\nu(\theta). \qquad (31)$$

Откуда видно, что

$$\ln|\widetilde{B}(\rho e^{i\alpha})| \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,$$

ибо $\nu(\theta)$ — неубывающая функция.

Заметим, что $|\widetilde{B}(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду на $|w| = 1$, так как $\ln|\widetilde{B}(e^{i\theta})| = \nu'(\theta)$, а $\nu'(\theta) = 0$ почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Теперь можно определить в $|w|>1$ функцию $B^*(w)$, полагая

$$B^*\left(\frac{1}{\rho}e^{i\alpha}\right)=\left[\overline{\widetilde{B}(\rho e^{i\alpha})}\right]^{-1}, 0<\rho<1, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,$$

т. е. в точках, симметричных относительно $|w|=1$, значения $B^*(w)$ и $\widetilde{B}(w)$ симметричны. Получающаяся функция $B^*(w)$ является очевидно аналитической в $|w|<1$, причем $|B^*(w)|\leqslant 1$ при $|w|>1$ и, кроме того, будет справедливо для угловых граничных значений функций $\widetilde{B}(w)$ и $B^*(w)$ почти всюду на $|w|=1$ равенство

$$\widetilde{B}(e^{i\theta})=B^*(e^{i\theta}).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B^*[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\widetilde{B}[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{32}$$

Функция $\widetilde{B}[\psi(z)]$ будет входить в класс $E_1(G)$. Действительно, учитывая (29) и (30), имеем:

$$\widetilde{B}(w)\,\varphi'(w)=\exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\ln|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Откуда видно, что функция $\widetilde{B}(w)\,\varphi'(w)$ входит в класс H_1, в связи с чем функция $\widetilde{B}[\psi(z)]$ удовлетворяет известному критерию для принадлежности классу $E_1(G)$.

Установленное включение $\widetilde{B}[\psi(z)]\in E_1(G)$ равносильно, как хорошо известно, возможности представить функцию $\widetilde{B}[\psi(z)]$ интегралом Коши по ее граничным значениям:

$$\widetilde{B}[\psi(z)]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\widetilde{B}[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta, \quad z\in G. \tag{33}$$

Сравнение (32) и (33) приводит к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B^*[\psi(\zeta)]}{\zeta-z}\,d\zeta=\widetilde{B}[\psi(z)], \quad z\in G. \tag{34}$$

Но функция $\widetilde{B}[\psi(z)]$ заведомо не может быть ограниченной в области G. Более того функция $\widetilde{B}[\psi(\zeta)]$ не может входить в класс $D(G)$. Ибо тогда $\widetilde{B}(w)\in D$ в круге $|w|<1$. Это невозможно, так как в представлении (30) $\nu(\theta)$ — неубывающая функция $\neq$ const, что не может иметь место в параметрических представлениях В. И. Смирнова функций класса D.

Неограниченность в области G функции $\overline{B}[\psi(z)]$, представимой в силу (34) интегралом типа Коши-Лебега, доказывает, ввиду сделанных вначале замечаний, теорему 5.

Приведем теперь еще одно необходимое и достаточное условие для принадлежности области G классу K.

Теорема 6. *Для включения области G в класс K необходимо и достаточно, чтобы всевозможные функции вида* $\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}$, $0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi$, *могли быть представлены в круге* $|w|<1$ *интегралами типа Коши-Стильтьеса:*

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\lambda_{\theta_0}(\theta)}{e^{i\theta}-w} \tag{35}$$

с равномерно ограниченными вариациями у функций $\lambda_{\theta_0}(\theta)$

$$\int\limits_0^{2\pi}|d\lambda_{\theta_0}(\theta)|\leqslant A,\quad 0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi. \tag{36}$$

Необходимость есть непосредственное следствие теоремы 2. Действительно, возьмем функции $\Phi_{\zeta_0}(z)=\dfrac{1}{\zeta_0-z}$, $\zeta_0\in\Gamma$. Функции $\Phi_{\zeta_0}(z)=$ $=\dfrac{1}{\zeta_0-z}$, очевидно, можно рассматривать как функции, представимые интегралами типа Коши-Стильтьеса (1) с функциями $\mu(\zeta)$, имеющими скачок величиной $2\pi i$ в точке $\zeta=\zeta_0$. Тогда по теореме 2 функции

$$\Phi_{\zeta_0}[\varphi(w)]\cdot\varphi'(w)=\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}\qquad(\varphi(e^{i\theta_0})=\zeta_0)$$

могут быть представлены интегралами типа Коши-Стильтьеса (2) с функцией $\lambda_{\theta_0}(\theta)$, вариация которой не превосходит A.

Вывод о том, что можно считать равномерно ограниченными вариации у функций $\lambda(\theta)$ в представлениях функций $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$ интегралами типа Коши-Стильтьеса (2), если равномерно ограничены вариации у функций $\mu(\zeta)$ в представлениях (1) функций $\Phi(z)$, можно получить сразу, не привлекая даже теоремы 2, вытекавшей из теоремы 1. Для этого рассмотрим банаховское пространство, состоящее из аналитических в области G функций $\Phi(z)$, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_\Gamma\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}$. Полагаем при этом $\|\Phi\|=\inf\limits_{F(\zeta)\in E_1(G^-)}\displaystyle\int\limits_\Gamma|d[\mu(\zeta)]-F(\zeta)\,d\zeta|$, где inf берется по всевозможным функциям, являющимся угловыми граничными значениями аналитических в G^- функций $F(z)$, $F(\infty)=0$, принадлежащих классу $E_1(G^-)$.

(Это равносильно тому, что в качестве нормы $\|\Phi\|$ взята нижняя грань полных вариаций всех функций $\mu(\zeta)$, которые могут участвовать в представлении (1) функции $\Phi(z)$).

Рассмотрим затем отображение только что описанного пространства в подобное же пространство, состоящее из аналитических в круге $|w|<1$ функций, представимых интегралами типа Коши-Стильтьеса, заключающееся в том, что функции $\Phi(z)$ ставится в соответствие функция $\Phi[\varphi(w)]\varphi'(w)$. Тогда определенное сейчас отображение будет аддитивной замкнутой операцией, которая поэтому должна быть линейной.

Приступаем теперь к доказательству достаточности.

Пусть выполняются условия (35) и (36). Возьмем какую-либо рациональную дробь $R(w)$ с полюсами внутри $|w|<1$ и условием $|R(e^{i\theta})|\leqslant 1$ на $|w|=1$. Пусть L — какой-либо контур, лежащий в $|w|<1$, заключающий все полюса $R(w)$. Тогда, пользуясь (35), (36), имеем

$$\left|\int\limits_{L} R(w)\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}\,dw\right| = \left|\int\limits_{0}^{2\pi} R(e^{i\theta})\,d\nu_{\theta_0}(\theta)\right| \leqslant A. \tag{37}$$

Здесь нам снова пришлось применить уже описанный при выводе (6) простой прием, фактически состоящий в перемене порядка интегрирования.

Переходя в область G, имеем из (37)

$$\left|\int\limits_{l}\frac{R[\psi(z)]\,dz}{\zeta_0 - z}\right| \leqslant A.$$

Так как контур l, — образ L при конформном отображении $z=\varphi(w)$ круга $|w|<1$ на G, — охватывает все особенности $R[\psi(z)]$, то интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{R[\psi(z)]\,dz}{z-\zeta_0}$ будет давать значение в точке ζ_0 рациональной дроби $r(z)$, получающейся суммированием главных частей разложений функции $R[\psi(z)]$. Таким образом, доказано неравенство $|r(\zeta_0)|\leqslant A$, $\zeta_0\in\Gamma$. Но в качестве точки ζ_0 может фигурировать любая точка контура Γ. По теореме 1 отсюда будет следовать вывод о том, что $G\in K$.

Теорема 7. *Для принадлежности области G классу K достаточно равномерной ограниченности интегралов:*

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\frac{\varphi'(e^{i\theta})}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(e^{i\theta})} - \frac{1}{e^{i\theta_0}-e^{i\theta}}\right| d\theta \leqslant C, \quad 0\leqslant\theta_0\leqslant 2\pi. \tag{38}$$

Доказательство. Покажем вначале включение в класс D следующих функций

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}-\frac{1}{e^{i\theta_0}-w}\in D,\quad 0\leqslant\theta_0<2\pi. \tag{39}$$

В самом деле, функция $\frac{1}{e^{i\theta_0}-w}\in H_\delta$, $0<\delta<1$, а $\varphi'(w)\in H_1$. Так что, если установить включение функции $\frac{1}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}$ в класс D, то отсюда будет немедленно вытекать (39). Но $\frac{1}{\varphi(e^{i\theta_0})-\varphi(w)}=\frac{1}{\zeta_0-z}$ и нужное нам заключение содержится в следующей лемме:

Лемма 8. *Функции вида* $\frac{1}{\zeta_0-z}$, $\zeta_0\in\Gamma$, *принадлежат классу* $D(G)$.

Достаточно убедиться в существовании в области G у функции $\ln^+\frac{1}{|\zeta_0-z|}$ гармонической мажоранты $u(z)$, представимой интегралом Грина (см. [11], [12]).

Для этого рассмотрим область G_ρ, получающуюся из G выбрасыванием круга радиуса ρ с центром в точке ζ_0. Граница области G_ρ будет состоять из дуги C_ρ окружности $|z-\zeta_0|=\rho$ и дуги $\Gamma_\rho\subset\Gamma$. Функция $\ln^+\frac{1}{|\zeta_0-z|}$ непрерывна в $\overline{G}_\rho$. Поэтому ее гармоническая мажоранта может быть выражена по формуле Грина

$$\ln^+\left|\frac{1}{\zeta_0-z}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\Gamma_\rho}\ln^+\frac{1}{|\zeta_0-\zeta|}\,\frac{\partial g_\rho(\zeta,z)}{\partial n}\,ds+\ln^+\frac{1}{\rho}\int\limits_{C_\rho}\frac{\partial g_\rho(\zeta,z)}{\partial n}\,ds\right]. \tag{40}$$

Здесь $g_\rho(\zeta,z)$ — функция Грина области G_ρ с полюсом в точке z.

Примем теперь во внимание, что $\frac{\partial g_\rho(\zeta,z)}{\partial n}\leqslant\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n}$ почти всюду на общей граничной дуге Γ_ρ областей G и G_ρ, так как $G_\rho\subset G$ (см., напр., [8], стр. 45) ($g(\zeta,z)$ — функция Грина области G с полюсом в z).

С другой стороны, $\int\limits_{C_\rho}\frac{\partial g_\rho(\zeta,z)}{\partial n}\,ds$ дает величину в точке z гармонической меры $\omega(z,C_\rho,G_\rho)$ дуги окружности C_ρ относительно области G_ρ.

Используем, кроме того, известную оценку гармонической меры дуги границы, приведенную в работе М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, в силу которой

$\omega(z,C_\rho,G_\rho)\leqslant A\sqrt{\frac{\rho}{d}}$ (см. [6], стр. 366), где A — некоторая константа, d — расстояние от дуги C_ρ до точки z.

Тогда мы сможем, усиливая неравенство (40), получить

$$\ln^+ \frac{1}{|\zeta_0 - z|} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\rho} \ln^+ \frac{1}{|\zeta_0 - \zeta|} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds + \frac{A}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{d}} \ln^+ \frac{1}{\rho}. \quad (41)$$

Перейдем в (41) к пределу при $\rho \to 0$. Учитывая, что будет существовать интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \ln^+ \frac{1}{|\zeta_0 - \zeta|} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds = \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta})|} d\theta$$

(ибо функция $\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)$ заведомо является функцией ограниченного вида), имеем

$$\ln^+ \frac{1}{|\zeta_0 - z|} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \ln^+ \frac{1}{|\zeta_0 - \zeta|} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds.$$

Тем самым показано включение $\frac{1}{\zeta_0 - z} \in D(G)$, что и утверждалось в лемме 8.

Продолжим доказательство теоремы 7. Из установленного уже включения в класс D функций (39) и суммируемости в силу условия теоремы угловых граничных значений этих функций вытекает вхождение указанных функций в класс H_1. Поэтому функции $\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)} - \frac{1}{e^{i\theta_0} - w}$ можно представить в $|w| < 1$ интегралом Коши:

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)} - \frac{1}{e^{i\theta_0} - w} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} \left[\frac{\varphi'(e^{i\theta})}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta})} - \frac{1}{e^{i\theta_0} - e^{i\theta}} \right] d\theta}{e^{i\theta} - w}. \quad (42)$$

С другой стороны, функции $\frac{1}{e^{i\theta_0} - w}$ можно, очевидно, рассматривать как функции, представимые интегралами типа Коши-Стильтьеса

$$\frac{1}{e^{i\theta_0} - w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\lambda^*_{\theta_0}(\theta)}{e^{i\theta} - w}, \qquad \int\limits_0^{2\pi} |d\lambda^*_{\theta_0}(\theta)| = 2\pi. \quad (43)$$

Здесь $\lambda^*_{\theta_0}(\theta)$ — функция скачков с единственным скачком величиной $2\pi i$ при $\theta = \theta_0$.

Теперь остается лишь использовать (42), (43) и (38), чтобы убедиться в возможности представить функции вида $\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)}$ интегралами типа Коши-Стильтьеса (35) с равномерно ограниченными вариациями у функций $\lambda_{\theta_0}(\theta)$. По теореме 6 отсюда следует включение $G \in K$, что и требовалось доказать.

Замечание. Приведенные при доказательстве теоремы 7 соображения позволяют фактически установить даже несколько более общее достаточное условие, чем сформулированное в теореме 7.

Пусть область G такова, что при всех θ_0, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$,

$$\inf_{F(e^{i\theta}) \in H_1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi'(e^{i\theta})}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta})} - \frac{1}{e^{i\theta_0} - e^{i\theta}} - F(e^{i\theta}) \right| d\theta \leqslant C.$$

Здесь $F(e^{i\theta})$ — угловые граничные значения аналитических в $|w| > 1$ функций $F(w)$ класса H_1, $F(\infty) = 0$. Константа C справа не зависит от θ_0, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$. Тогда $G \in K$.

Нетрудно видеть, что достаточно требовать выполнения условия (38) лишь для всюду плотного на $[0, 2\pi]$ множества значений. Укажем теперь одно непосредственное следствие теоремы 7.

Следствие 9. *Пусть область G такова, что функция $\varphi'(w)$ непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$, причем модуль непрерывности $\omega(\varphi', h)$ функции $\varphi'(e^{i\theta})$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^a \frac{\omega(\varphi', h)}{h} dh < \infty. \tag{44}$$

Тогда область $G \in K$.

В частности, условие (44) выполняется, если границей области G служит гладкая кривая Г, для которой угол $\theta(s)$ между касательной к кривой Г и вещественной осью обладает свойством

$$\omega(\theta, h) \leqslant \frac{C}{\left(\lg \frac{a}{h}\right)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 2. \tag{45}$$

Для включения области G в класс K достаточно даже знать, что

$$\int_0^a \frac{\omega(\theta, h)}{h} |\lg h| \, dh < \infty. \tag{46}$$

Действительно, из (45) вытекает, как показал Я. Л. Геронимус [2], обобщивший известный результат Келлога, следующее неравенство для модуля непрерывности функции $\varphi'(e^{i\theta})$:

$$\omega(\varphi', h) \leqslant \frac{C}{\left(\lg \frac{a}{h}\right)^{\alpha-1}}.$$

В случае выполнения (46) справедливость (38) была непосредственно установлена С. Я. Альпером [1]. Так что включение $G \in K$ следует сразу по теореме 7.

Заметим, что ранее в работах других авторов при более жестких или таких же, как в (44) или (45) предположениях о контуре Г, утверждалось лишь существование почти всюду на Г угловых граничных значений у интегралов типа Коши-Стильтьеса или типа Коши.

Лебега. Подобные результаты были установлены И. И. Приваловым (см. [7]), Б. В. Хведелидзе [14], предполагавшими, что Γ — гладкая кривая, удовлетворяющая условию Гельдера, и С. Я. Альпером [1], изучавшим интегралы типа Коши-Лебега в предположении, что Γ удовлетворяет условию (45).

Московский геологоразведочный
институт

Поступила 21 I 1963

Գ. Ց. Տումարկին

ԿՈՇԻ-ՍՏԻԼՏԵՍԻ ՏԻՊԻ ԵՎ ԿՈՇԻ-ԼԵԲԵԳԻ ՏԻՊԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մտցվում է ուղղելի եզրերով տիրույթների հատուկ դաս՝ K, հետևյալ ձևով. G տիրույթը պատկանում է K դասին, եթե ամեն մի $\Phi(z)$ անալիտիկ ֆունկցիա, որը ներկայացվում է Կոշի-Ստիլտեսի տիպի ինտեգրալով՝

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G$$

(Γ-ն G-ի եզրն է), G տիրույթի $|w| < 1$ շրջանի վրա կոնֆորմ արտապատկերումից հետո ներկայացվում է

$$\Phi(\varphi(w))\,\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} \frac{d\lambda(\theta)}{e^{i\theta} - w};$$

ինտեգրալով, որտեղ $z = \varphi(w)$-ն արտապատկերող ֆունկցիան է։

Բերվում են անհրաժեշտ և բավարար տիպի մի շարք պայմաններ, որպեսզի $G \in K$.

Օրինակ՝ ապացուցված է.

Թ ե ո ր ե մ 6. Որպեսզի $G \in K$, անհրաժեշտ է և բավարար, բոլոր

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)}, \qquad 0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$$

տեսքի ֆունկցիաները $|w| < 1$ շրջանում ներկայացվեն Կոշի-Ստիլտեսի տիպի

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(e^{i\theta_0}) - \varphi(w)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} \frac{d\lambda_{\theta_0}(\theta)}{e^{i\theta} - w}$$

ինտեգրալով, որտեղ

$$\int_{0}^{2\pi} |d\lambda_{\theta_0}(\theta)| \leqslant A, \quad 0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi։$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области. Известия АН СССР, серия матем., **19**, 1955, 423—444.
2. *Геронимус Я. Л.* О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе. Матем. сб., **38** (80), № 3, стр. 319—330.
3. *Канторович Л. В.* и *Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
4. *Колмогоров А. Н.* и *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. МГУ, 1960.
5. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. ИЛ, М., 1956.
6. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
7. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. Изд. МГУ, 1941.
8. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-ое,. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
9. *Тумаркин Г. Ц.* О поведении вблизи границы производных некоторых сходящихся внутри области последовательностей аналитических функций. ДАН СССР, **114**, № 3, 1957, 502—505.
10. *Тумаркин Г. Ц.* Об интегралах типа Коши-Стильтьеса. V Всесоюзная конференция по теории функций. Тезисы докладов. Ереван, 1960, стр. 109—111.
11. *Тумаркин Г. Ц.* и *Хавинсон С. Я.* О стирании особенностей у аналитических функций одного класса (класса D). УМН, **12**, № 4, (76), 193—199.
12. *Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.* Классы аналитических функций в многосвязных областях. Сборник „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного". Физматгиз, М., 1960, 45—77.
13. *Хавин В. П.* Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши-Стильтьеса. Вестник ЛГУ, № 1, 1958, 66—79.
14. *Хведелидзе Б. В.* Некоторые свойства особых интегралов в смысле главного значения Коши-Лебега, Сообщ. АН ГрССР, **8**, 1947, 283—290.