

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II)

Введение

Эта статья является продолжением работы [1]. Все полученные здесь результаты относятся к дифференциальной окрестности первого порядка и находятся в тесной связи с алгебраической геометрией. Ради удобства некоторые геометрические объекты, рассмотренные в работе [1], здесь получили новые названия.

В первом параграфе одновременно вводятся два подвижных репера: точечный и тангенциальный. Во втором параграфе рассматриваются некоторые свойства конгруэнций и псевдоконгруэнций d -мерных плоскостей. В параграфе 3 получаются новые семейства, которые являются обобщениями псевдоконгруэнций и конгруэнций. В четвертом параграфе рассматривается одно соответствие в семействе, которое является обобщением основного соответствия комплекса прямых трехмерного пространства.

В параграфе 7 рассматриваются некоторые свойства s -фокальных семейств. Случай 0-фокальных d -семейств приводит к теории многомерных поверхностей. Этот вопрос будет изложен в следующей статье.

С дифференциальной окрестностью первого порядка естественным образом связываются три системы билинейных соотношений (1.5), которые определяют шесть геометрических объектов (точку, направление, гиперплоскость и т. д.). Геометрические места этих объектов представляют шесть алгебраических многообразий в трех различных пространствах P_d , P_{d-1} и P_{n-d-1} .

Во всех остальных параграфах изучаются эти объекты и многообразия.

§ 1. Подвижные точечный и тангенциальный реперы

Отнесем a -параметрическое семейство (a -семейство) d -мерных плоскостей (d -плоскостей) в P_n к подвижному точечному реперу $A_0, \dots, A_a$ так, чтобы точки $A_0, \dots, A_d$ лежали на d -плоскости семейства. Уравнениями инфинитезимального перемещения вершин этого репера будут

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]; \quad \alpha, \beta, \gamma = 0 \dots n. \quad (1.1)$$

Пусть u^x будут параметрами α -семейства. Тогда уравнения семейства d -плоскостей запишутся в виде

$$\omega_i^p = a_{ix}^p du^x, \quad (1.2)$$

где здесь и далее

$$i = 0 \dots d, \quad x = 1 \dots a, \quad p = d+1 \dots n.$$

Ради удобства здесь мы одновременно рассматриваем так называемый тангенциальный подвижной репер (см. [1]) a^z ($z = 0 \dots n$), где

$$a^z = (-1)^z (A_0 \dots A_{z-1} A_{z+1} \dots A_n). \quad (1.3)$$

Если X_α — тангенциальные координаты гиперплоскости m , то $m = X_\alpha a^\alpha$. Инфинитезимальное перемещение элементов этого репера в силу (1.3) и (1.1) определяется следующей системой

$$da^z = -\omega_z^\beta a^\beta. \quad (1.4)$$

С первой дифференциальной окрестностью каждой d -плоскости α -семейства связываются три билинейные системы

$$a_{ix}^p x^i du^x = 0, \quad a_{ix}^p x^i X_p = 0, \quad a_{ix}^p X_p du^x = 0, \quad (1.5)$$

которые в основном и являются предметом изучения как в этой, так и в предыдущей работах.

§ 2. Об одном свойстве псевдоконгруэнций и конгруэнций

Как известно, касательная $d + \alpha$ -плоскость α -семейства в точке $x^i A_i$ определяется грассмановым произведением

$$(A_0 \dots A_d, a_{11}^p x^1 A_p, \dots, a_{da}^p x^a A_p). \quad (2.1)$$

Касательное подпространство однопараметрического подсемейства du^x определяется другим грассмановым произведением

$$(A_0 \dots A_d, a_{0x}^p du^x A_p, \dots, a_{dx}^p du^x A_p). \quad (2.2)$$

Эти два подпространства имеют одну и ту же размерность тогда и только тогда, когда $a = d + 1$, т. е. когда семейство является псевдоконгруэнцией. Линейные оболочки совокупностей этих двух подпространств (первая совокупность получается из (2.1) для всевозможных точек x^i , вторая совокупность — из (2.2) для всевозможных направлений du^x) совпадают друг с другом.

Естественно возникает задача о совпадении подпространств (2.1) и (2.2). Для решения этой задачи мы будем пользоваться тангенциальными координатами. Уравнения подпространств (2.1) и (2.2) запишутся соответственно в виде

$$a_{ix}^p x^i X_p = 0, \quad X_i = 0; \quad a_{ix}^p X_p du^x = 0, \quad X_i = 0, \quad (2.3)$$

где X_α — тангенциальные координаты гиперплоскости.

Каждой точке x^i однозначно соответствует одна касательная (вообще говоря, $2d+1$ -мерная) плоскость (2.1), но на каждой $2d+1$ -плоскости (проходящей через d -плоскость семейства) соответствует точка, ибо первая система (2.3) не всегда будет иметь решение относительно x^i .

Очевидно, последнему требованию будут удовлетворять только те $2d+1$ -плоскости, для которых ранг матрицы

$$(a_{ik}^p X_p) \quad (2.4)$$

будет равняться d . Следовательно, если обратим в нуль определитель матрицы (2.4), то получим уравнение касательного конуса [1] псевдоконгруэнции.

Все эти рассуждения справедливы и относительно второй системы (2.3). Для геометрического места касательных подпространств (2.2) получим точно такое же уравнение, т. е. касательные подпространства дают тот же самый касательный конус. Следовательно, каждой системе величин x^i будет соответствовать единственная система du^i , для которой (2.1) и (2.2) совпадают, и это соответствие взаимное. Фактически две системы (2.3) устанавливают соответствие между x^i и du^i . Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Псевдоконгруэнция характеризуется тем свойством, что ее касательная $d+a$ -плоскость в некоторой точке x^i и касательное подпространство произвольного однопараметрического семейства имеют одинаковую размерность. Существует взаимно-однозначное соответствие (2.3) между точками d -плоскости и 1-подсемействами, которое устанавливается совпадением этих двух подпространств.*

С помощью этого соответствия легко проводится фиксация подвижного репера. Такую фиксацию мы сделали для двухпараметрического семейства прямых четырехмерного пространства в [3].

Из (2.1) и (2.2) следует, что поставленная задача теряет силу для случаев, когда размерность объемлющего пространства меньше или равна $2d+1$, например, для конгруэнций прямых трехмерного пространства.

Теперь переходим к конгруэнциям d -плоскостей. Как известно, размерность такого семейства равна $n-d$. Если рассматривать конгруэнцию как геометрическое место гиперплоскостей (инцидентных d -плоскости), то нетрудно заметить, что гиперплоскость внутри конгруэнции зависит от $2(n-d)-1$ параметров. Фокальным подпространством в данной гиперплоскости будем называть такое подпространство, которое является пересечением данной гиперплоскости с $2(n-d)-1$ бесконечно близкими с ней гиперплоскостями конгруэнции. Фокальное подпространство будет существовать тогда и только тогда, когда размерность пространства больше или равна $2(n-d)$ или, что то же самое, $n \leq 2d$. Тогда размерность фокального подпространства в данной гиперплоскости будет $2d-n$. Не-

трудно заметить, что в этом случае каждое однопараметрическое подсемейство конгруэнции будет иметь $2d - n$ -фокус.

Уравнения фокального $2d - n$ -подпространства в данной гиперплоскости X_p запишутся в виде

$$a_{ix}^p x^i X_p = 0, \quad x^p = 0, \quad i = 0 \dots d, \quad p = d+1 \dots n, \quad x = 1 \dots a. \quad (2.5)$$

Эта система получается из требования

$$(df, a^{d+1} \dots a^n) = 0, \quad (f = X_p a^p).$$

Точно так же уравнения фокального $2d - n$ -подпространства однопараметрического подсемейства du^x запишутся в виде

$$a_{ix}^p x^i du^x = 0, \quad x^p = 0. \quad (2.6)$$

В (2.5) каждой гиперплоскости соответствует единственное $2d - n$ -подпространство, но не каждому $2d - n$ -подпространству (принадлежащему d -плоскости конгруэнции) соответствует гиперплоскость, ибо система (2.5) будет иметь решение относительно X_p тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$(a_{ix}^p x^i) \quad (2.7)$$

будет равен $n - d - 1$. Как известно [1], точки x^i , для которых ранг матрицы (2.7) равен $a - 1$, образуют фокальное многообразие d -плоскости.

Точно так же система (2.6) будет иметь единственное решение относительно du^x тогда и только тогда, когда ранг матрицы (2.7) равен $n - d - 1$. Следовательно, каждой гиперплоскости X_p в силу (2.5) соответствует некоторое $2d - n$ -подпространство и каждому такому подпространству в силу (2.6) соответствует вполне определенное направление du^x , и наоборот. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между инцидентными d -плоскостями конгруэнции гиперплоскостями X_p и однопараметрическими подсемействами du^x . Этот результат также мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Конгруэнция d -плоскостей характеризуется тем свойством, что ее фокальное подпространство в некоторой гиперплоскости X_p и фокальное подпространство каждого однопараметрического подсемейства имеют одинаковую размерность. Существует взаимно-однозначное соответствие между гиперплоскостями d -плоскости и 1-подсемействами, которое устанавливается совпадением этих двух подсемейств.*

В работе [3] это соответствие было использовано для фиксации репера двупараметрического семейства 2-плоскостей четырехмерного пространства.

§ 3. Конгруэнции и псевдоконгруэнции различных классов

$n-d$ -параметрическое семейство d -мерных плоскостей называется конгруэнцией n -пространства. Конгруэнция характеризуется тем свойством, что через каждую точку n -пространства проходит конечное число ее d -плоскостей. Двойственный класс семейства плоскостей называется псевдоконгруэнцией. Псевдоконгруэнция является $d+1$ -параметрическим семейством d -плоскостей и характеризуется тем свойством, что в любой гиперплоскости n -пространства лежит конечное число плоскостей этого семейства.

Мы начнем с обобщения этих двух понятий. Конгруэнциями класса r назовем такие семейства d -плоскостей, которые содержат конечное число d -плоскостей, проходящих через произвольно заданное r -мерное ($r \leq d$) подпространство n -пространства. Псевдоконгруэнциями класса r назовем такие семейства d -плоскостей, которые содержат конечное число d -мерных плоскостей, лежащих в произвольно заданном $n-r-1$ -мерном подпространстве n -пространства. Легко доказывается

Теорема 3.1. *Конгруэнцией класса r является $(n-d)(r+1)$ -параметрическое семейство d -мерных плоскостей. Псевдоконгруэнцией класса r является $(d+1)(r+1)$ -параметрическое семейство d -мерных плоскостей.*

Действительно, все d -плоскости, проходящие через r -мерное подпространство ($r \leq d$), образуют шубертово многообразие с условием $(0, 1 \dots r, n-d+r+1, n-d+r+2, \dots, n)$. Размерность этого многообразия в P_N ($N = C_{n+1}^{d+1} - 1$) равна $(n-d)(d-r)$. Так как это многообразие обязательно лежит на грассмановом многообразии $\mathcal{Q}(d, n)$, то семейство будет с ним пересекаться в конечном числе точек тогда и только тогда, когда размерность этого семейства будет равна $(n-d)(r+1)$. Точно так же доказывается второе утверждение теоремы.

В новых терминах обычные конгруэнции и псевдоконгруэнции будут иметь нулевой класс.

Псевдоконгруэнции и конгруэнции класса r обладают еще одним свойством, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.2. 1) *Псевдоконгруэнция класса r характеризуется тем свойством, что ее касательная $d+1$ -плоскость в каждой точке x^i и касательное подпространство каждого ее $r+1$ -подсемейства имеют одинаковую размерность, равную $d+(r+1) \times (d+1)$.* 2) *Конгруэнция класса r характеризуется тем свойством, что ее фокальное подпространство в каждой гиперплоскости X_p и фокальное подпространство каждого ее $r+1$ -подсемейства имеют одинаковую размерность, равную $d-(r+1)(n-d)$.*

Действительно, например, для псевдоконгруэнции класса r касательная плоскость в точке x^i имеет размерность $d+(r+1)(d+1)$. Но касательное подпространство $(r+1)$ -подсемейства также будет

размерности $d + (r + 1)(d + 1)$, согласно теореме (см. [1]), что касательное подпространство a -семейства имеет размерность $d + a(d + 1)$.

Вопрос о взаимно-однозначном соответствии точек x^i и $r + 1$ -подсемейств псевдоконгруэнции и аналог этой задачи для конгруэнций остается открытым.

§ 4. Основное соответствие семейства

Как известно [4], для комплекса прямых трехмерного пространства получается взаимно-однозначное соответствие между точками луча комплекса, с одной стороны, и плоскостями, инцидентными этому лучу, с другой стороны.

В этом параграфе мы будем заниматься обобщением этой задачи для многомерного случая. Само собой разумеется, что только такие a -семейства будут допускать подобное соответствие, размерность которых больше $n - d$, ибо только в этом случае через каждую точку пространства будет проходить бесконечно много d -плоскостей семейства, обеспечивающих возникновение такого соответствия.

Пусть имеем a -семейство d -мерных плоскостей. Как известно [1], a -семейство имеет конечное число нуль-фокусов тогда и только тогда, когда $a = n - 2d + 1$. Но если размерность семейства $a = n - 2d + 1 + r$, то очевидно, что на каждой d -плоскости существует r -мерное фокальное многообразие, и если $r = d$, то каждая точка d -плоскости семейства является фокусом некоторого 1-подсемейства.

Допустим, что размерность семейства равна $n - d + 1$, и найдем касательное подпространство 1-подсемейства, имеющего фокус в точке $x^i A_i$. Как известно, точка x^i и 1-подпространство du^x удовлетворяют системе

$$a_{ix}^p x^i du^x = 0. \quad (4.1)$$

Эта система для каждой точки x^i имеет единственное (вообще говоря) решение du^x , которое будет фокальным направлением. Для каждого фокального направления ранг матрицы

$$(a_{ix}^p du^x) \quad (4.2)$$

равен d . Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всеми точками x^i и всеми фокальными направлениями du^x . Так как размерность каждого фокуса равна нулю, то касательное подпространство каждого фокального 1-подсемейства будет $2d$ -мерным. Следовательно, доказана

Теорема 4.1. *Каждая точка d -мерной плоскости a -семейства является фокусом некоторого 1-подсемейства тогда и только тогда, когда $a = n - d + 1$.*

Двойственный результат получается аналогичным образом и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Каждая гиперплоскость, инцидентная d -плоскости семейства, является касательной гиперплоскостью некоторого 1-подсемейства тогда и только тогда, когда $a = d + 2$.*

Для получения взаимно-однозначного соответствия между всеми точками d -плоскости и всеми гиперплоскостями, проходящими через эту плоскость, необходимо, чтобы $n = 2d + 1$. Если это соответствие устанавливается так, что точка является фокусом, а гиперплоскость — касательным подпространством некоторого 1-подсемейства, то оно называется основным. В силу теорем 4.1 и 4.2 получается

Теорема 4.3. *Для того, чтобы a -семейство d -плоскостей обладало основным соответствием, необходимо и достаточно, чтобы $n = 2d + 1$, $a = d + 2$.*

§ 5. Фокальные многообразия с образующими фокальными подпространствами

Как уже известно [1], семейство имеет фокальные однопараметрические подсемейства только в том случае, когда $a \geq n - 2d + 1$. При равенстве семейство допускает конечное число 1-подсемейств с 0-фокусами.

Очевидно, что если размерность семейства $a = n - 2d + 1 + r$, то фокальные точки образуют фокальное алгебраическое многообразие размерности r . Известно также, что семейство допускает конечное число однопараметрических подсемейств с 1-фокусами (фокальными прямыми) тогда и только тогда, когда $a = 2(n - 2d + 1) + 1$.

Естественно возникает задача: найти такие семейства d -плоскостей, у которых фокальное алгебраическое многообразие содержит конечное число 1-фокусов (т. е. прямых). Для этого необходимо и достаточно выполнение равенства $n - 2d + 1 + r = 2(n - 2d + 1) + 1$, но так как $r \leq d - 1$, то $n \leq 3d - 3$. Следовательно, размерность семейства должна удовлетворять неравенству $a \leq n - d$.

Такие семейства погружаются только в пространства размерности больше пяти. Например, в шестимерном пространстве трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей удовлетворяет этому требованию. На каждой 3-плоскости семейства фокальное многообразие представляет поверхность третьего порядка (ибо семейство является конгруэнцией [1]). Кроме того, семейство допускает конечное число 1-фокусов. Следовательно, в трехмерном пространстве общая поверхность третьего порядка имеет по меньшей мере конечное число образующих прямых. Весьма вероятно утверждение, что такая поверхность, вообще говоря, содержит только конечное число образующих, строгое доказательство которого пока отсутствует.

Точно так же в пространствах размерности $n = 3d - 3$ для $2d - 3$ -семейства фокальное многообразие есть гиперповерхность порядка $2d - 3$. На этой гиперповерхности лежит по меньшей мере конечное число прямых. Таким образом получается

Теорема 5.1. Фокальное многообразие α -семейства d -плоскостей n -мерного пространства содержит конечное число фокальных прямых тогда и только тогда, когда $n \leq 3d - 3$ и, следовательно, $\alpha = 2(n - 2d + 1) + 1$. В этом случае фокальное алгебраическое многообразие имеет размерность $n - 2d + 2$. Если при этом α -семейство является конгруэнцией ($\alpha = n - d$), то фокальное многообразие в d -подпространстве есть гиперповерхность порядка $n - d$.

Вопрос о том, существуют ли на фокальном многообразии другие образующие прямые, остается открытым. Но если даже они существуют, то по характеру резко отличаются от фокальных прямых, ибо каждая точка такой образующей прямой будет 0-фокусом некоторого 1-подсемейства, тогда как здесь каждый 1-фокус целиком является фокальной прямой также некоторого 1-подсемейства.

Мы теперь займемся обобщением этой теоремы. Как известно [1], α -семейство допускает s -фокальные подсемейства тогда и только тогда, когда $\alpha \geq (s + 1)(n - 2d + s) + 1$. Обозначим через R_s разность этих двух чисел, т. е.

$$R_s = \alpha - (s + 1)(n - 2d + s) - 1. \quad (5.1)$$

Тогда R_0 будет размерностью фокального многообразия $r(a_{ix}^p x^i) = \alpha - 1$, а R_s будет размерностью семейств s -фокусов (s -мерных образующих плоскостей) на фокальном многообразии¹. Очевидно, что при $t < s$, $R_t > R_s$. Очевидно также, что для нашей задачи имеет смысл только тот случай, когда $R_0 \leq d - 1$. Следовательно, окончательный результат выразится следующей теоремой.

Теорема 5.2. Фокальное алгебраическое многообразие $r(a_{ix}^p x^i) = \alpha - 1$ размерности $R_0 \leq d - 1$ обладает s -мерными образующими (s -фокусами) тогда и только тогда, когда $R_s \geq 0$. Если $R_s = 0$, то фокальное многообразие имеет конечное число таких образующих.

Здесь представляет особый интерес случай, когда $R_0 = d - 1$ или когда семейство является конгруэнцией. В этом случае фокальное многообразие $r(a_{ix}^p x^i) = \alpha - 1$ является гиперповерхностью порядка α в d -мерном пространстве, а из $R_s \geq 0$ получим

$$d > \alpha + s - \frac{\alpha - 1}{s + 1}.$$

Полагая $\alpha - 1 = k(s + 1)$, где k — положительное целое число, и рассматривая только случай с конечными образующими s -плоскостями, мы получим следствие: фокальная гиперповерхность $d = ks + s + 1$ -мерного пространства порядка $ks + k + 1$ имеет конечное число образующих s -мерных плоскостей, которые являются s -фокаль-

¹ $r(a_{ix}^p x^i)$ означает ранг матрицы $(a_{ix}^p x^i)$.

ными подпространствами. Если $d > ks + s + 1$, то гиперповерхность порядка $ks + k + 1$ в этом пространстве имеет бесконечно много таких образующих s -плоскостей.

Из этого результата вытекают некоторые факты, которые в алгебраической геометрии представляют самостоятельный интерес. Действительно, полагая, например, $k = 1$, получим, что наша фокальная гиперповерхность имеет порядок $s + 2$ и находится в $2s + 1$ -мерном пространстве. Следовательно, в $2s + 1$ -мерном пространстве гиперповерхность $r(a_{ix}^p, x^i) = s + 1$ порядка $s + 2$ имеет конечное число образующих s -плоскостей. Можно доказать, что в подавляющем большинстве случаев (например, для $d = 3, 5, \dots$) гиперповерхность $r(a_{ix}^p, x^i) = s + 1$ является наиболее общей.

§ 6. Семейства, обладающие 0-фокальными неоднопараметрическими подсемействами

Как известно [1], a -семейство является 0-фокальным, если все плоскости дифференциальной окрестности первого порядка каждой d -плоскости семейства инцидентны некоторой точке. В этом параграфе мы займемся такими семействами d -мерных плоскостей, некоторые подсемейства которых 0-фокальны.

Для однопараметрических подсемейств a -семейства эта задача уже решена в [1] и доказано, что a -семейство d -плоскостей допускает однопараметрические 0-фокальные подсемейства тогда и только тогда, когда $a \geq n - 2d + 1$.

Как известно, фокусы и фокальные направления удовлетворяют системе

$$a_{ix}^p x^i du^s = 0. \quad (6.1)$$

Для того, чтобы некоторая точка x^i стала фокусом s -параметрического подсемейства, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $(x^i a_{ix}^p)$ (или, короче, $r(a_{ix}^p, x^i)$) был равен $a - s$. Но матрица (a_{ix}^p, x^i) принадлежит типу $a \times (n - d)$, следовательно, наше требование приведет к $s(a - d - a + s)$ независимым соотношениям над x^i . Для существования 0-фокусов необходимо и достаточно, чтобы $s(n - d - a + s) \leq d$ или $R_s \equiv d - s(n - d - a + s) \geq 0$, где R_s — размерность алгебраического многообразия $r(a_{ix}^p, x^i) = a - s$. При этом, когда $R_s = 0$ (d должно делиться на s без остатка), то каждая d -плоскость a -семейства имеет конечное число 0-фокусов, каждый из которых является 0-фокусом некоторого неголономного s -параметрического подсемейства. Если $R_s = d$, то каждая точка d -плоскости является фокусом некоторого s -параметрического неголономного подсемейства. Таким образом, получается

Теорема 6.1. a -семейство допускает s -параметрические подсемейства с 0-фокусами тогда и только тогда, когда $R_s \equiv d - s(n - d - a + s) \geq 0$. Такие 0-фокусы образуют R_s -мерное алгебраическое подмногообразие фокального многообразия.

Займемся теперь двойственным результатом, т. е. будем искать такие гиперплоскости $X_p a^p$, каждая из которых является касательной гиперплоскостью некоторого s -параметрического подсемейства. Как известно, для этого система

$$a^p_{ix} X_p du^x = 0 \quad (6.2)$$

должна допускать $s-1$ -мерное решение в пространстве переменных du^x . Но такое решение возможно только в случае, когда

$$r(a^p_{ix} X_p) = a - s. \quad (6.3)$$

Аналогичные рассуждения приведут к следующей теореме.

Теорема 6.2. Семейство допускает s -параметрические подсемейства, каждое из которых имеет некоторую касательную гиперплоскость (инцидентную d -плоскости семейства) тогда и только тогда, когда $R_s \equiv n - d - 1 - s(d + 1 - a + s) > 0$. Равенство соответствует случаю, когда имеется конечное число таких подсемейств.

§ 7. s -фокальные семейства

Пусть a -семейство d -мерных плоскостей будет s -фокальным, т. е. все d -плоскости первой дифференциальной окрестности проходят через некоторое s -подпространство. Так как для таких семейств каждое направление du^x является фокальным и их фокусы совпадают, то в системе $a^p_{ix} x^i du^x = 0$ все коэффициенты при du^x должны обращаться в нуль, т. е.

$$a^p_{ix} x^i = 0. \quad (7.1)$$

Система (7.1) дает s -мерное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a^p_{ix}) (i -индекс столбцов) равен $d - s$ или, короче,

$$r(a^p_{ix}) = d - s, \quad (7.2)$$

где черточка под i показывает, что i -индекс столбцов.

Фокальное s -подпространство является характеристикой d -плоскостей семейства в любом направлении du^x . Геометрическое место таких s -подпространств называется огибающим многообразием [1]. Совмещая $s + 1$ точек $A_0 \dots A_s$ на s -фокусе, в силу (7.1) получим

$$a^p_{ix} = 0, \quad i = 0, \dots, s. \quad (7.3)$$

Если огибающее многообразие рассматривать как точечное многообразие, то оно будет поверхностью размерности $a + s$. Касательная $a + s$ -плоскость этой поверхности в точке $x^i A_i$ лежит на d -плоскости a -семейства. Касательное подпространство a -семейства s -мерных плоскостей совпадает с d -плоскостью первоначального a -семейства.

a -семейство s -плоскостей также может иметь s_1 -фокус, который описывает новое огибающее многообразие. Продолжая те же рас-

суждения относительно α -семейства s_1 -плоскостей, получим третье огибающее многообразие и т. д. Таким образом, получается цепь огибающих многообразий, которая неизбежно обрывается после конечного числа шагов. Например, если $n=102$, $d=100$ и $a=2$, то $s=d-a(n-d)=96$, $s_1=s-a(d-s)=88$, $s_2=s_1-a(s-s_1)=72$, $s_3=40$, но s_4 имеет уже отрицательный знак. Следовательно, цепь огибающих многообразий обрывается после четвертого шага.

Все эти рассуждения можно проделать и для s -касательных подпространств α -семейства, но здесь мы этим заниматься не будем. Эти вопросы подробно будут рассмотрены в другой статье, где мы изучим дифференциальную окрестность второго порядка α -семейства.

Возвращаясь к задачам, связанным с первой дифференциальной окрестностью s -фокального α -семейства, мы найдем формулы для фокальных подсемейств этого семейства. Как известно [1], если α -семейство имеет s -фокус, то оно обладает следующим очень важным свойством: касательная $d+a$ -плоскость его $d+a$ -поверхности в точке $x^i A_i$ не меняется вдоль подпространства соединения (линейной оболочки) этой точки и s -фокуса. Этот факт нам позволяет свести изучение s -фокального α -семейства d -мерных плоскостей n -мерного пространства к изучению наиболее общего α -семейства $d-s-1$ -мерных плоскостей $n-s-1$ -мерного пространства. Для этого необходимо в n -мерном пространстве взять произвольное $n-s-1$ -подпространство, которое не пересекается с s -фокусом. Так как $d>s$, то каждая d -мерная плоскость s -фокального α -семейства будет пересекаться с $n-s-1$ -подпространством по определенной $d-s-1$ -мерной плоскости, и поскольку d -мерная плоскость описывает α -мерное семейство, то $d-s-1$ -мерные плоскости в $n-s-1$ -подпространстве также опишут α -мерное семейство.

Заметим, что такой прием впервые был применен В. Бляшке для случая $n=4$, $d=2$, $a=2$, $s=0$ в [5], где он надеялся установить связь между алгебраической и дифференциальной геометрией. Он свел изучение двумерной поверхности к изучению конгруэнции прямых трехмерного пространства. Хотя Бляшке не было известно вышеуказанное свойство s -фокальных семейств, но он доказал ряд свойств двумерной поверхности. В частности, он с помощью выкладок доказал, что единственная пара сопряженных направлений на 2-поверхности соответствует двум фокусам конгруэнции.

Очевидно, что если α -семейство $d-s-1$ -мерных плоскостей $n-s-1$ -пространства в некотором направлении du^x имеет r -фокус, то α -семейство d -плоскостей будет иметь в этом направлении $r+s+1$ -фокус, и наоборот. Но у нас имеется общая формула для фокальных свойств α -семейства [1], согласно которой α -семейство d -плоскостей обладает r -фокальными направлениями тогда и только тогда, когда $a \geq (r+1)(n-2d+r)+1$. Применяя эту формулу для нового α -семейства $d-s-1$ -плоскостей, будем иметь:

Теорема 7.1. *Наиболее общее s -фокальное a -семейство d -мерных плоскостей обладает $s + r + 1$ -фокальными однопараметрическими подсемействами тогда и только тогда, когда $a \geq (r + 1)(n - 2d + s + r + 1) + 1$. Равенство соответствует случаю, когда имеется конечное число таких подсемейств.*

В работе [1] мы изучали инволюционные (или гармонически пересекающиеся) направления a -семейства d -плоскостей. Так как это понятие связано только с касательными $d + 1$ -плоскостями однопараметрических подсемейств и эти плоскости в силу указанного выше свойства не меняются для s -фокального семейства, то справедлива

Теорема 7.2. *s -фокальное a -семейство d -мерных плоскостей в n -пространстве обладает инволюционными направлениями тогда и только тогда, когда a -семейство $d - s - 1$ -мерных плоскостей в $n - s - 1$ -мерном пространстве обладает такими направлениями.*

Эти две теоремы имеют важное приложение в теории многомерных поверхностей.

§ 8. Три билинейные формы семейства

Одной из задач этого параграфа является установление удобной терминологии.

Как мы увидели, с первой дифференциальной окрестностью d -плоскости a -семейства связаны билинейные соотношения

$$a_{ix}^p x^i du^x = 0, \quad a_{ix}^p x^i X_p = 0, \quad a_{ix}^p X_p du^x = 0. \quad (8.1, 2, 3)$$

Если заданная точка x^i удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p x^i) < a, \quad (8.4)$$

то (8.1) определяет фокальные направления, для которых точка x^i является фокусом, и наоборот, если заданное направление удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p du^x) \leq d, \quad (8.5)$$

то то же самое (8.1) определяет геометрическое место фокусов этого направления (т. е. определяет либо 0-фокус, либо фокус большой размерности).

Здесь очевидна следующая

Теорема 8.1. *В a -семействе размерность подсемейства с данным фокусом x^i равна $a - r(a_{ix}^p x^i)$, а размерность фокального подпространства для данного направления du^x равна $d - r(a_{ix}^p du^x)$.*

Точно так же, если заданная точка x^i удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p x^i) < n - d, \quad (8.6)$$

то (8.2) определяет касательную (в общем случае $d + a$ -мерную) плоскость семейства, точка касания которой совпадает с точкой x^i .

Наоборот, если заданная гиперплоскость X удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p X_p) \leq d, \quad (8.7)$$

то то же самое соотношение (8.2) определяет *фокальное подпространство в данной гиперплоскости* X_p семейства. Для того, чтобы не спутать последний объект с фокальным подпространством по направлению, определяемому с помощью соотношений (8.1), мы здесь дадим более подробное объяснение.

Как известно, через каждую d -мерную плоскость проходит ∞^{a-d-1} гиперплоскостей. Следовательно, a -семейство d -мерных плоскостей можно рассматривать как $a+n-d-1$ -параметрическое семейство гиперплоскостей. Иными словами, мы a -семейство d -мерных плоскостей рассматриваем как геометрическое место гиперплоскостей подобно тому, когда то же самое семейство мы рассматривали как геометрическое место точек, которое из себя представило $d+a$ -мерную поверхность. Каждая точка x^i этой поверхности имеет свою касательную плоскость. Двойственный образ этой плоскости для нашего $a+n-d-1$ -семейства гиперплоскостей будет как раз фокальным подпространством в данной гиперплоскости. Другими словами: фокальное подпространство в данной гиперплоскости есть пересечение данной гиперплоскости X_p a^p и ее бесконечно близких $a+n-d-1$ -гиперплоскостей. Из (8.2) вытекает, что если $d > a$, то размерность фокального подпространства в любой общей гиперплоскости X_p всегда равна $d-a$. Если вышеуказанное неравенство не соблюдается, то только в тех гиперплоскостях имеются фокальные подпространства, координаты которых удовлетворяют соотношениям (8.7). Размерность фокального подпространства в этом случае определяется с помощью числа (8.7).

Для размерностей касательной плоскости в точке x^i и фокального подпространства в гиперплоскости во всех случаях справедлива следующая

Теорема 8.2. *Размерности касательной плоскости в точке x^i и фокального подпространства в гиперплоскости X_p равны соответственно числам $d+r(a_{ix}^p x^i)$ и $d-r(a_{ix}^p X_p)$.*

Мы в следующих параграфах снова рассмотрим эти подпространства и их геометрические места, а сейчас переходим к соотношениям (8.3). Если заданное направление du^* удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p du^*) < n-d, \quad (8.8)$$

то (8.3) определяет касательное подпространство этого однопараметрического семейства и, наоборот, если заданная гиперплоскость X_p удовлетворяет соотношениям

$$r(a_{ix}^p X_p) < a, \quad (8.9)$$

то то же самое соотношение (8.3) определяет такое подсемейство a -семейства, касательное подпространство которого принадлежит гиперплоскости X_p . Легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 8.3. *В a -семействе размерность касательного подпространства l -подсемейства равна $d + r(a_{ix}^p du^x)$, а размерность подсемейства, касательное подпространство которого принадлежит данной гиперплоскости X_p , равна $a - r(a_{ix}^p X_p)$.*

§ 9. Многообразие точек касания семейства

Как уже известно, касательные плоскости в данной точке x^i и фокальные подпространства в данной гиперплоскости X_p определяются одной системой

$$a_{ix}^p x^i X_p = 0. \quad (9.1)$$

В этом параграфе мы будем рассматривать только такие семейства, для которых система (9.1) имеет решение. В силу теоремы (8.2) размерности касательной плоскости в точке x^i и фокального подпространства в гиперплоскости X_p равны соответственно числам $d + r(a_{ix}^p x^i)$ и $d - r(a_{ix}^p X_p)$. Следовательно, для существования этих подпространств необходимо и достаточно, чтобы

$$r(a_{ix}^p x^i) = n - d - 1, \quad (9.2)$$

$$r(a_{ix}^p X_p) = d. \quad (9.3)$$

Геометрическое место точек, удовлетворяющих системе (9.2), является алгебраическим многообразием и называется многообразием точек касания.

Точно так же геометрическое место гиперплоскостей X_p (инцидентных d -плоскости), удовлетворяющих системе (9.3), называется, как известно из [1], касательным конусом с плоской d -мерной вершиной.

Так как матрица (9.2) принадлежит типу $a \times (n - d)$, то система (9.2) даст всего $a - n + d + 1$ независимых алгебраических соотношений и, следовательно, имеет место

Теорема 9.1. *Размерность многообразия точек касания общего a -семейства d -плоскостей равна $n - a - 1$.*

Из этой теоремы как следствие получается: в наиболее общем a -параметрическом семействе d -мерных плоскостей 1) имеется конечное число точек касания тогда и только тогда, когда $a = n - 1$; 2) многообразие точек касания является гиперповерхностью в d -мерной плоскости семейства тогда и только тогда, когда семейство является конгруэнцией, и, наконец, 3) каждая точка d -плоскости является точкой касания тогда и только тогда, когда $a \leq n - d - 1$.

Теперь рассмотрим фокальное многообразие d -мерной плоскости a -семейства. Как известно, это многообразие определяется системой

$$r(a_{\alpha}^p, x^i) = a - 1. \quad (9.4)$$

В силу систем (9.2) и (9.4) получается

Теорема 9.2. *Многообразие точек касания a -семейства является подмногообразием фокального многообразия тогда и только тогда, когда $a > n - d$. Эти два многообразия совпадают только в случае конгруэнции. И, наконец, фокальное многообразие является подмногообразием многообразия точек касания тогда и только тогда, когда $a < n - d$.*

§ 10. s -касательные плоскости точки и s -фокальные подпространства гиперплоскости семейства

В предыдущем параграфе мы рассматривали только случай, когда в точке касания существует только одна касательная гиперплоскость и, наоборот, в касательной гиперплоскости существует только одна точка касания. В этом параграфе мы отказываемся от этого ограничения и предполагаем, что

$$r(a_{\alpha}^p, x^i) = s - d, \text{ где } n - s \geq 1. \quad (10.1)$$

Тогда в силу теоремы (8.2) касательная плоскость в точке x^i будет иметь размерность s . Точки, удовлетворяющие системе (10.1), образуют подмногообразие многообразия точек касания. Нетрудно заметить, что размерность этого подмногообразия равна $d - (n - s) \times (a - s + d)$. Таким образом, получается

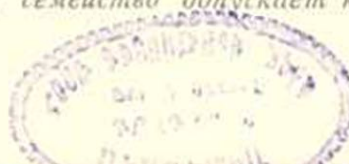
Теорема 10.1 *a -параметрическое семейство d -плоскостей в некоторых точках имеет s -мерную касательную плоскость тогда и только тогда, когда $d - (n - s)(a - s + d) \geq 0$. Равенство соответствует случаю, когда имеется конечное число таких точек (или s -плоскостей).*

Теперь будем рассматривать такие семейства, которые обладают s -мерными фокальными подпространствами в некоторых гиперплоскостях. Для таких семейств необходимо

$$r(a_{\alpha}^p, X_p) = d - s, \quad s > 0. \quad (10.2)$$

Размерность многообразия (10.2) в дуальном пространстве P_{n-d-1} равняется $n - d - 1 - (s + 1)(a - d + s)$. Это приведет к следующему результату:

Теорема 10.2. *Наиболее общее семейство допускает s -мерное фокальное подпространство в некоторых гиперплоскостях тогда и только тогда, когда $n - d - 1 - (s + 1)(a - d + s) \geq 0$. Если выполняется равенство, то семейство допускает конечное число таких подпространств.*



§ 11. Неподвижная касательная плоскость в различных точках и неподвижное фокальное подпространство в различных гиперплоскостях

Сначала докажем одну теорему.

Теорема 11.1. *Если одна и та же гиперплоскость X_p в двух различных точках x и y является касательной плоскостью a -семейства, то она одновременно касается семейства вдоль прямой xy .*

Действительно, в силу условий теоремы $a_{ix}^p X_p x^i = 0$, $a_{iy}^p X_p y^i = 0$, откуда следует, что $a_{ix}^p X_p (x^i + \lambda y^i) = 0$ для любого значения λ .

Точно так же доказывается другая

Теорема 11.2. *Если одна и та же точка x^i есть точка касания для двух гиперплоскостей X_p и Y_p , то она одновременно является точкой касания для любой гиперплоскости, принадлежащей пучку $X_p Y_p$.*

Теперь предположим, что касательная гиперплоскость во всех точках x^i d -плоскости неподвижна, т. е. система $a_{ix}^p x^i X_p = 0$ не накладывает какого-либо условия на x^i . В таком случае коэффициенты при x^i должны обращаться в нуль

$$a_{ix}^p X_p = 0. \quad (11.1)$$

Последняя система допускает ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$r(a_{ix}^p) \leq n - d - 1. \quad (11.2)$$

Как известно [1], размерность касательного подпространства (т. е. подпространства, в котором лежат все d -плоскости дифференциальной окрестности первого порядка) равна $d + r(a_{ix}^p)$. Отсюда вытекает следующий очевидный результат:

Теорема 11.3. *Касательная плоскость для всех точек d -плоскости семейства неподвижна только в том случае, когда она совпадает с касательным подпространством семейства над этой d -плоскостью.*

Точно так же доказывается другая

Теорема 11.4. *Фокальное подпространство во всех гиперплоскостях (проходящих через d -плоскость семейства) неподвижно только тогда, когда оно является фокальным подпространством семейства для всех направлений.*

§ 12. Подпространства, принадлежащие многообразию точек касания

Теорема (9.1) утверждает, что размерность многообразия точек касания равна $n - a - 1$. Мы здесь будем искать такие a -семейства, многообразие точек касания которых содержит s -мерные фокальные

(в гиперплоскостях) подпространства. В силу теоремы 10.2 в таком случае должно выполняться условие $n - d - 1 - (s + 1)(a - d + s) \geq 0$.

Таким образом, для выполнения условий нашей задачи должны соблюдаться следующие неравенства:

$$n - d - 1 < a < n - 1, \quad a \leq \frac{n - d - 1 + (s + 1)(d - s)}{s + 1}.$$

Нетрудно заметить, что правая часть второго неравенства всегда меньше правой части первого неравенства, поэтому будем иметь

$$n - d - 1 < a \leq \frac{n - d - 1}{s + 1} + d - s. \quad (12.1)$$

Таким образом, доказывается следующая теорема.

Теорема 12.1. *Алгебраическое многообразие точек касания d -мерной плоскости a -семейства содержит s -мерное подпространство тогда и только тогда, когда выполняется условие (12.1). Причем, если выполняется неравенство, то многообразие содержит бесконечно много таких подпространств, если же выполняется равенство, то многообразие содержит их в конечном числе.*

Здесь особый интерес представляет случай, когда многообразие точек касания есть гиперповерхность. Но в этом случае $a = n - d$ и, согласно теореме 9.1, это многообразие является одновременно фокальным многообразием, для которого эта задача уже решена в параграфе 5.

§ 13. Фокальные подсемейства и их отображение в P_{a-1}

Как известно, фокусы и фокальные направления удовлетворяют системе

$$a_{ik}^r x^i du^k = 0. \quad (13.1)$$

Геометрическое место фокальных направлений (которое называется фокальным подсемейством) определяется системой

$$r(a_{ik}^r du^k) = d. \quad (13.2)$$

В пространстве переменных du^k система (13.2) определяет алгебраическое многообразие размерности $2d + a - n - 1$, ибо в P_{a-1} каждой точке du^k соответствует некоторое однопараметрическое подсемейство a -семейства. Алгебраическое многообразие (13.2) мы иногда будем называть фокальным многообразием в пространстве P_{a-1} , в отличие от подобного термина в d -плоскости, т. е. от фокального многообразия, определяемого системой $r(a_{ik}^r x^i) = a - 1$. Следовательно, наиболее общее семейство допускает фокальное подсемейство только тогда, когда $2d + a - n - 1 \geq 0$. В пространстве переменных du^k это многообразие является алгебраической гиперповерхностью тогда и только тогда, когда $n = 2d + 1$. Размерность и порядок этой гиперповерхности будут равны соответственно числам $a - 2$ и $d + 1$.

Определение. α -семейство d -мерных плоскостей называется промежуточным, если оно погружено в пространстве размерности $n = 2d + 1$, и пространство меньшей размерности не обладает этим свойством. Следовательно, здесь доказана следующая

Теорема 13.1. Промежуточное семейство характеризуется тем свойством, что его фокальное подсемейство α -семейства является гиперповерхностью (размерности $\alpha - 2$ и порядка $d + 1$) в пространстве переменных du^i .

Возвращаясь к общему случаю, мы рассмотрим такие α -семейства, фокальное многообразие (13.2) которых имеет образующие подпространства различных измерений. Но алгебраическое многообразие (13.2) может обладать образующими подпространствами различных видов. Здесь наша задача не заключается в том, чтобы найти все образующие подпространства многообразия (13.2). Мы будем искать только такие образующие подпространства, соответствующие подсемейства α -семейства которых являются 0-фокальными, т. е. каждое из них имеет только одну фокальную точку. Фактически эта постановка совпадает с задачей, рассмотренной в шестом параграфе, т. е. в некоторых точках x^i должны соблюдаться условия

$$r(a_\alpha^p x^i) = \alpha - s, \quad s > 1. \quad (13.3)$$

Система (13.3) имеет решение относительно x^i тогда и только тогда, когда соблюдается условие $\alpha \geq n - d + s - d/s$. Таким образом, справедлива

Теорема 13.2. Фокальное многообразие (13.2) обладает $s - 1$ -мерными образующими подпространствами (соответствующие подсемейства которых 0-фокальны) тогда и только тогда, когда $\alpha \geq n - d + s - d/s$. При равенстве многообразие допускает конечное число таких образующих. В последнем случае d должно быть делителем s .

Рассмотрим частный случай, когда $d = s$, тогда $\alpha = n - 1$. Для промежуточного семейства ($n = 2d + 1$) последняя теорема приведет к результату: в пространстве P_{2d+1} алгебраическая гиперповерхность порядка $s + 1$ имеет по меньшей мере конечное число образующих подпространств размерности $s - 1$.

Обобщение этой теоремы получится, если полагать $d = ks$, тогда для промежуточных семейств получим следующую теорему: в проективном пространстве размерности $ks + s - k$ ($k \geq 1, s \geq 2$) гиперповерхность порядка $ks + 1$ имеет по меньшей мере конечное число образующих подпространств размерности $s - 1$.

Замечание, сделанное в пятом параграфе, справедливо и для последних двух теорем.

§ 14. Подсемейства с касательными гиперплоскостями и их отображение в $P_{\alpha-1}$

Подсемейством с касательными гиперплоскостями будем называть такое подсемейство нашего α -семейства, каждое однопараметрическое

семейство которого обладает касательной гиперплоскостью. Между 1-подсемействами и их касательными гиперплоскостями, как известно, существуют билинейные соотношения

$$a_{ij}^p X_p du^i = 0. \quad (14.1)$$

Подсемейство с касательной гиперплоскостью определяется соотношениями

$$r(a_{ij}^p du^i) = n - d - 1. \quad (14.2)$$

В пространстве переменных du^i система (14.2) определяет алгебраическое многообразие размерности $n - a - 2d - 3$. Следовательно, наиболее общее a -семейство обладает подобными подсемействами тогда и только тогда, когда $n - a - 2d - 3 \geq 0$. В P_{a-1} система (14.2) определяет гиперповерхность только тогда, когда семейство является промежуточным ($n = 2d + 1$).

Из (13.2) и (14.2) непосредственно получается

Теорема 14.1. 1) Фокальное подсемейство (13.2) является подмногообразием подсемейства с касательными гиперплоскостями (т. е. многообразия (14.2)) тогда и только тогда, когда $n \geq 2d + 1$. 2) Когда $n < 2d + 1$, то, наоборот, подсемейство с касательными гиперплоскостями является подмногообразием фокального подсемейства (13.2) и, наконец, 3) эти два подсемейства совпадают тогда и только тогда, когда a -семейство — промежуточное.

В последнем случае, в силу теоремы (13.1), оба подсемейства отображаются в гиперповерхности порядка $d + 1$ пространства P_{a-1} .

Теперь будем искать образующие $s - 1$ -мерные плоскости многообразия (14.2), т. е. найдем такие s -подсемейства, каждое из которых имеет единственную касательную гиперплоскость. Из (14.1) непосредственно следует, что для этих подсемейств

$$r(a_{ij}^p X_p) = a - s, \quad s \geq 1. \quad (14.3)$$

Система (14.3) имеет решение относительно X_p тогда и только тогда, когда выполняется $n - d - 1 - s(d + 1 - a + s) \geq 0$. Следовательно,

Теорема 14.2. В общем случае алгебраическое многообразие (14.2) в пространстве P_{a-1} обладает образующими $s - 1$ -мерными плоскостями тогда и только тогда, когда $n - d - 1 - s(d + 1 - a + s) \geq 0$. При равенстве многообразие обладает конечным числом таких плоскостей.

§ 15. Два касательных конуса семейства

Здесь мы рассмотрим две билинейные системы, связывающие тангенциальные координаты X_p гиперплоскости

$$a_{ij}^p x^i X_p = 0, \quad a_{ij}^p X_p du^i = 0.$$

Если $r(a_{ij}^p X_p) = d$, то первая система допускает решение. Гиперплоскости, удовлетворяющие соотношениям $r(a_{ij}^p X_p) = d$, образуют

касательный конус семейства. Точно так же, если $r(a_{ix}^p X_p) = a - 1$, то вторая система допускает решение. Гиперплоскости, удовлетворяющие соотношениям $r(a_{ix}^p X_p) = a - 1$, образуют другой конус, который в дальнейшем будет называться касательным конусом по направлениям, ибо в это многообразие входят те и только те гиперплоскости, каждая из которых содержит две соседние d -плоскости некоторого направления (однопараметрического подсемейства). С этой точки зрения первый конус будет называться касательным конусом по точкам.

Из уравнений этих конусов непосредственно получается

Теорема 15.1. Если $d < a - 1$, то касательный конус по направлениям является подмногообразием касательного конуса по точкам. Если $d > a - 1$, то, наоборот, конус по точкам является подмногообразием конуса по направлениям. Эти два конуса совпадают тогда и только тогда, когда семейство является псевдоконгруэнцией ($d = a - 1$).

Институт математики и механики

АН Армянской ССР,

Армянский заочный педагогический институт

Поступила 20 III 1963

Ս. Ե. Կարապետյան

ԲԱԶՄԱԶՈՓ ՀԱՐՔՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս աշխատությունը [1]-ի շարունակությունն է:

Մանրամասնորեն դիտարկված են (1.5) երկգծային սիստեմաների լուծումները և տրված են նրանց երկրաչափական մեկնաբանությունները: Արդյունքները սերտորեն կապված են հանրահաչափական երկրաչափության հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 3, 1963.
2. Ходже В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. I, II. ИЛ, М., 1954.
3. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 2, 1962.
4. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
5. Blaschke W. Sulla geometria proiettiva differenziale delle superficie V_2 nello spazio P_4 . Rend. Circolo mat. di Palermo, **3**, № 2, 1954, 193—197.