

Э. М. Нерсисян

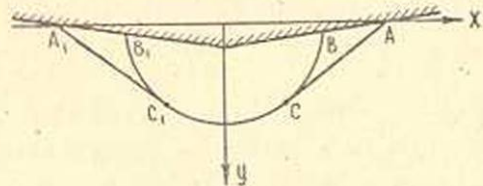
Приближенное решение задачи о проникании клина в жидкость

Рассматривается плоская задача о проникании тупого клина в сжимаемую жидкость. Решение этой задачи в линейной постановке получено в работе [2]. Оно содержит особенность, а именно: давление на фронте оказывается равным нулю.

Если при отыскании второго приближения решать задачу при полученном из первого приближения условии для давления на фронте, особенность в решении, появившаяся в результате линеаризации, сохраняется.

Цель настоящей работы — сформулировать задачу для определения давления во втором приближении. Чтобы получить условие для давления на фронте C_1C , фиг. 1, ищется решение вблизи фронта методом Пуанкаре—Лайтхилла—Го [3]. Этот метод позволяет получить давление на фронте, отличное от нуля, и сформулировать задачу для определения давления во втором приближении во всей эллиптической области.

Пусть тупой клин проникает в сжимаемую жидкость, занимающую все нижнее полупространство. Начало координат O возьмем в точке пересечения вершины клина со свободной поверхностью жидкости. Скорость проникания клина V_0 меньше скорости звука в жидкости и направлена вниз, перпендикулярно к горизонтальной свободной поверхности. Клин предполагается достаточно тупым, чтобы скорость точек пересечения клина со свободной поверхностью жидкости была сверхзвуковой (фиг. 1).



Фиг. 1.

В случае плоской задачи уравнение для потенциала скоростей записывается в виде

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

где

$$a^2 = a_0^2 - (n-1) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right].$$

Если искать решение уравнения для потенциала скоростей в виде ряда по степеням малого параметра

$$\varphi = \gamma \varphi_0 + \gamma^2 \varphi_1 + \dots,$$

для φ_0 , как известно, получим волновое уравнение, а для последующих коэффициентов $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ уравнения будут также волновыми с правой частью, содержащей предыдущие коэффициенты

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} &= \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{n-1}{a_0^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial t} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y \partial t} \right]. \end{aligned}$$

Для линейной задачи решение получается в виде [2]

$$V_y + if^s = \frac{V_0}{\pi i} \ln \left(-\frac{\lambda_2 + z}{\lambda_1 + z} \right),$$

где

$$V_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad \lambda_1 = \frac{M-1}{M+1}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad z = \left(\frac{\tau+1}{\tau-1} \right)^2, \quad \tau = \varepsilon e^{i\theta},$$

θ — полярный угол, $r = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\xi = \frac{x}{at}$, $\eta = \frac{y}{at}$

Вдоль C_1C линейное решение дает

$$V_y = 0.$$

Найдем линейное решение вблизи C_1C . Из (2) находим

$$V_y = \frac{V_0}{\pi} \arg \left(-\frac{\lambda_2 + z}{\lambda_1 + z} \right).$$

Пусть $\alpha = 1-r$ — малая величина, характеризующая расстояние от дуги C_1C . Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} = 1 - \sqrt{2\alpha}, \\ z &= \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{i \sin \theta} - 1 \right). \end{aligned}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$V_y = \frac{V_0}{\pi} \left[\arctg \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sin \theta} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda_2 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}} \right) + \right. \\ \left. + \arctg \left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sin \theta} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} - \lambda_1} \right) \right].$$

В точке C выражение $\lambda_2 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}$ равно нулю, а в точке C_1 равно нулю выражение $\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} - \lambda_1$. Поэтому вблизи точек C и C_1 аргументы арктангенсов не будут малы. Рассматривая точки дуги C_1C , кроме окрестностей точек C_1 и C , мы можем записать ($\arctg x \sim x$)

$$V_y = V_0 f_1(\theta) \sqrt{x}, \quad (5)$$

где

$$f_1(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\lambda_2 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} - \lambda_1} \right).$$

По (5) находим

$$\varphi^* = \int_{\sqrt{1-\xi^2}}^{\xi} \sqrt{1-\xi^2-\eta^2} d\eta = -V_0 f(\theta) x^{3/2},$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \left(1 + \frac{3}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta \right) f_1(\theta).$$

Обозначим

$$\varphi^* a_0 = \tilde{\varphi}_0,$$

где $\frac{V_0}{a_0}$ — малая величина и $r = \frac{r_0}{a_0}$.

Тогда

$$\tilde{\varphi}_0 = -\gamma a_0^2 f(\theta) \left(1 - \frac{r_0}{a_0} \right)^{3/2}. \quad (6)$$

Уравнение для потенциала скоростей в полярных координатах (r, θ) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Это уравнение в силу автомодельности задачи заменой переменных

$$\frac{\bar{r}}{t} = r \quad \text{и} \quad \varphi = \tilde{\varphi}(r, \theta)$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial r^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} - r \right)^2 - a^2 \right] + \frac{1}{r^3} \left(2r - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \left(r - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^4} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - a^2 r^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$a^2 = a_0^2 - (n-1) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 + \tilde{\varphi} - r \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right].$$

В линейном случае имеем $\tilde{\varphi} = \gamma \tilde{\varphi}_0$. Поэтому

$$\varphi = t\tilde{\varphi} = t\gamma\tilde{\varphi}_0 = t\gamma^2 a_0.$$

Будем искать решение в виде [3]

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \gamma \tilde{\varphi}_0(r_0, \theta) + \gamma^2 \tilde{\varphi}_1(r_0, \theta) + \dots \\ r &= r_0 + \gamma r_1(r_0, \theta) + \gamma^2 r_2(r_0, \theta) + \dots \end{aligned}$$

Ниже показывается, что нужно выбрать $r_1 = \text{const} = 0$. Оставляя в уравнении (7) величины до третьего порядка γ включительно, получим

$$\begin{aligned} & \left(\gamma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0^2} \right) \left[\left(\gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} + \gamma^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} - r_0 - \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 \right)^2 - a_0^2 + \right. \\ & + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right)^2 + \frac{n-1}{2} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_0 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) \left. \right] + \\ & + \frac{2}{r_0^3} \left(r_0 - \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta} \right) \left(r_0 - \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0 \partial \theta} + \\ & + \frac{1}{r_0^4} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta} \right)^2 - r_0^2 a_0^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta^2} - \frac{a_0^2}{r_0} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

В уравнении (8) в силу (6) особенность дает только слагаемое $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$. Поэтому, чтобы исключить особенность, мы должны в коэффициенте при $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$ члены с первой степенью γ в точке $r_0 = a_0$ положить равными нулю

$$-\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} - r_1\right) 2r_0 + (n-1)\left(\tilde{\varphi}_0 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}\right) = C.$$

Отсюда следует, что при $r_0 = a_0$ имеем $r_1 = 0$. Итак, $r_1 = \text{const} = 0$.

Перейдем теперь в (8) к пределу при $r_0 \rightarrow a_0$ и определим значение $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0}$ в точке $r_0 = a_0$. С помощью (6) и (8) получим в точке $r_0 = a_0$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2} \left[-\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} 2r_0 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_0 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) \right] - \frac{a_0^2}{r_0} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = 0. \quad (9)$$

Найдем производные $\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}$ и $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$ с помощью (6)

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} = a_0 \frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_0}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} f(\theta), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2} = -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{r_0}{a_0} \right)^{-\frac{1}{2}} f(\theta).$$

Подставив эти производные в (9), получим

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \frac{n+1}{2} a_0 f^2(\theta) \frac{9}{4}.$$

Пусть $r = M$ — уравнение ударной волны. Тогда из уравнения состояния

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right],$$

удерживая малые второго порядка относительно $\frac{P}{Bn}$, легко получить соотношения на ударной волне

$$M = r'_0 + \gamma^2 r'_2(r'_0, \theta) + \dots, \quad (10)$$

$$\gamma \tilde{\varphi}_0(r'_0, \theta) + \gamma^2 \tilde{\varphi}_1(r'_0, \theta) + \dots = 0, \quad (11)$$

$$\gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} + \gamma^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \frac{2}{n+1} \left(M - \frac{a_0^2}{M} \right), \quad (12)$$

где r'_0 — значение r_0 на ударной волне.

Из уравнений (10), (12) и (6) имеем

$$r'_0 - a_0 = -O(\gamma^2),$$

$$M - a_0 = O(\gamma^2).$$

Таким образом, в силу (6) величина $\tilde{\varphi}_0(r'_0, \theta)$ имеем порядок $O(\gamma^3)$.

Из уравнения (11) получаем, что

$$\tilde{\varphi}_1(a_0, \theta) = O(\gamma^2).$$

В уравнении (8) в коэффициенте при $\gamma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$ для уменьшения общности приравниваем нулю члены с γ^2

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}\right)^2 - 2r_0 \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} - r_2\right) + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}\right)^2 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_1 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0}\right) = 0.$$

В пределе при $r_0 \rightarrow a_0$ имеем

$$r_2 = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} + \frac{n-1}{2} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \frac{9}{16} (n+1)^2 a_0 f^2(\theta).$$

Подставляя r'_0 из (10) в выражение для $\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} &= \frac{3}{2} f(\theta) a_0 \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \frac{r_2}{a_0}} = \\ &= \frac{3}{2} f(\theta) a_0 \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 f^2(\theta) \frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

Из уравнения (12) находим

$$\begin{aligned} \gamma \frac{3}{2} a_0 f(\theta) \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \frac{9}{4} f^2(\theta)} + \gamma^2 \frac{n+1}{2} a_0 \frac{9}{4} f^2(\theta) = \\ = \frac{4}{n+1} (M - a_0). \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение относительно M , получим

$$M = a_0 + \gamma^2 \frac{27}{16} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a_0 f^2(\theta).$$

По формуле

$$P = \rho_0 a_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_0}$$

найдем давление

$$P = \gamma^2 \frac{27}{16} (n+1) \rho_0 a_0^2 f^2(\theta). \quad (13)$$

Аналогичный метод использован в работе [4].

Если продифференцировать (1) по t и обозначить $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial t} = \psi$, то мы ψ получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F(x, y, t),$$

Итак, найдено значение давления на ударной волне и сформулирована задача для определения давления во втором приближении во всей эллиптической области.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 I 1963

Է. Մ. ՆԵՐՏԻՅԱՆ

ՍԵՊԻ ՇԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄՈՑԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորվածում դիտարկված է բուխ սեպի թափանցումը ներքին կիսանախաթյունը դրավող սեղմելի հեղուկի մեջ: Սեպի թափանցման արագությունը փոքր է հեղուկի մեջ ձախի տարածման արագությունից: Ենթադրվում է, որ սեպը բախվածության ընթացքում է, որպեսզի սեպի և հեղուկի ազատ մակերևույթ համաձայն կետերի արագությունը լինի գերձայնային: Ճնշումը հորվածում ալիքի վրա երկրորդ մասնախաթյունով զանված է Պուանկարե-Լալանդի-Գուսի մեթոդով: Դրված է ճնշման որոշման խնդիրը էլիպտիկ տիրույթում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розг Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I. Гостехиздат, М., 1955.
2. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1962.
3. „Проблемы механики“, выпуск II. ИЛ, М., 1959.
4. Багдоев А. Г. Определение закона распределения давления, распространяющегося с дозвуковой скоростью. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 4, 1962.