

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. Мхитарян

К вопросу о бризовой циркуляции

Введение

Проблема изучения ветрового режима водоемов имеет важное теоретическое и прикладное значение. Важность этой проблемы проистекает не только из необходимости учитывать локальные метеорологические процессы в прогнозе погоды, выдвинутой И. А. Кибелем [6]. Изучение местных ветров связано с решением и других прикладных задач, как, например, задачи об определении испарения с поверхности водоемов и озер [9, 10] и т. д.

В настоящее время, когда на повестку дня ставится проблема сокращения испарения с поверхности озер и водохранилищ, особенно в южных засушливых районах нашей страны, путем применения специальных мономолекулярных пленок, вопрос о ветровом режиме приобретает новое важное значение. Это особенно сложный вопрос для горных водоемов. Многие стороны жизни и эффективности действия пленки зависят от ветрового и волнового режимов, то есть как от общего ветрового фона, определяемого общециркуляционными факторами, так и в еще большей степени, от локальных ветров-бризов, горно-долинной циркуляции, фенов и т. д.

В этой работе будет рассмотрена лишь бризовая циркуляция, возникающая, как известно, вследствие температурной неоднородности подстилающей поверхности и имеющая суточный ход.

Бризы известны давно, им посвящено большое количество работ. Укажем лишь на работы А. И. Воейкова [2], Л. Н. Гутмана [3—5] и др. [1, 8, 11—17]. В работе [7] предложен метод решения задачи о локальном ветре. В работах [3—5] Л. Н. Гутману удалось провести решение задачи до конца, благодаря удачной формулировке краевого условия на поверхности земли для температуры.

Предполагая отсутствие других местных ветров и общего движения атмосферы, попытаемся построить модель бризовой циркуляции в рамках линейной теории.

§ 1. Основные уравнения

Обратимся к общим уравнениям гидротермодинамики (три урав-

нения движения, уравнения неразрывности, состояния, притока тепла и влажности). Они имеют следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_u \frac{\partial u}{\partial z} \right) + k'_u \Delta u + l v, \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + k'_v \Delta v - l u, \quad (1.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + k'_w \Delta w - g, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} V = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + k'_T \Delta T + f_1, \quad (1.5)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) + k'_q \Delta q + f_2, \quad (1.6)$$

$$p = \rho R T. \quad (1.7)$$

Обозначения следующие: начало координатной системы расположено на урезе воды, z — вертикально вверх, x — по нормали к берегу, y — по касательной; t — время; u, v, w — составляющие скорости; p, ρ, q, T — соответственно давление, плотность, влажность и температура воздуха; R — газовая постоянная; g — ускорение силы тяжести; $k_u, k'_u, k_T, k'_T, k_q$ и k'_q — коэффициенты турбулентного перемешивания для количества движения, тепла и влаги по горизонтали и вертикали, соответственно; $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса, причем ω — угловая скорость вращения земли вокруг своей оси, φ — широта местности; f_1 — приток тепла; f_2 — приток влаги; Δ — плоский оператор Лапласа.

Положим

$$\begin{aligned} p &= P(z) + p'(x, y, z, t), \\ T &= \bar{T}(z) + \theta(x, y, z, t), \\ \rho &= \gamma_1(z) + \rho'(x, y, z, t), \\ q &= Q(z) + q'(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $P, \bar{T}, \gamma_1$ и Q — стандартные величины, соответствующие покоящейся атмосфере. Тогда основная система (1.1)–(1.6) для бризовых отклонений, после использования (1.7), примет вид (штрихи для простоты записи отбрасываем):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -RT \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_u \frac{\partial u}{\partial z} \right) + k'_u \Delta u + l v, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -RT \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + k'_v \Delta v - l u, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -RT \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_u \frac{\partial w}{\partial z} \right) + k_u' \Delta w + \lambda \theta, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma w, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu w = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_T \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + k_T' \Delta \theta, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} + \mu_1 w = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) + k_q' \Delta q. \quad (1.14)$$

Здесь: $p = \frac{p'}{\rho}$; $\lambda = \frac{g}{T}$; $\mu = \gamma_a - \gamma$ при $q < q_m$, $\mu = \gamma_b - \gamma$ при $q = q_m$;

$\gamma = \gamma_a - \gamma_b$, причем q_m — влажность насыщения, γ , γ_a и γ_b — вертикальные градиенты температуры в покоящейся, сухоадиабатической и влажноадиабатической атмосфере, соответственно. Кроме того

$$\sigma = \frac{1}{\gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dz} = \frac{g - \gamma R}{RT}.$$

Если теперь в первом приближении отбрасывать члены с горизонтальным перемешиванием, полагать бризы как малые отклонения от общего движения, вызванные локальной неоднородностью подстилающей поверхности и линеаризовать уравнения, получим основную систему уравнений нашей задачи в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -RT \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + lv, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -RT \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right) - lu, \quad (1.16)$$

$$0 = -RT \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda \theta, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial q}{\partial z} \right). \quad (1.20)$$

Здесь и далее принято $k_u = k_T = k_q$. В этой системе не составляет труда сохранить правую часть уравнения (1.12), но более существенно сохранить последние члены левых частей уравнений (1.13) и (1.14). Для простоты мы воспользуемся системой из шести уравнений (1.15)–(1.20) для шести неизвестных функций: u , v , w , p , θ и q .

Сформулируем краевые условия.

1. При $z = z_0$ $u = v = w = 0$, $\theta = \theta_0(x, y, t)$, $q = q_0(x, y, t)$,

$$2. \text{ При } z \rightarrow \infty \quad u = v = p = \vartheta = q = 0. \quad (1.21)$$

Здесь z_0 — параметр шероховатости.

Функцию ϑ_0 можно брать из наблюдений или же определить из условия баланса на уровне z_0 . Что касается функции q_0 , то на водной поверхности это будет максимальная влажность, соответствующая температуре ϑ_0 , а на поверхности суши ее можно также брать из наблюдений, либо пренебречь изменением влажности за счет испарения с поверхности суши и уравнение (1.20) рассматривать лишь для водной поверхности ($x > 0$).

§ 2. Решение системы основных уравнений

Наметим следующую схему решения.

Начальных условий ставить не будем, так как ищется периодическое решение. Граничные же условия имеют вид (1.21). Сначала из уравнений (1.19) и (1.20) определяются ϑ и q . Далее, вставляя ϑ в (1.17), легко найти p , а подставляя последнее в (1.15) и (1.16), можно определить скорости u и v , тогда из (1.18) определится w .

Прежде чем приступить к решению предположим, что известные функции ϑ_0 и q_0 представлены в виде рядов Фурье

$$\vartheta_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n(x, y) \cos n\omega t + T'_n(x, y) \sin n\omega t], \quad (2.1)$$

$$q_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n(x, y) \cos n\omega t + q'_n(x, y) \sin n\omega t], \quad (2.2)$$

причем суточный ход каждой из величин ϑ_0 и q_0 известен либо из наблюдений, либо из условия баланса. Положим также $k = \text{const}$. Ниже мы покажем, как решается задача при $k = k(z)$.

Итак, наша система примет вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

$$0 = -RT \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda \vartheta, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -RT \frac{\partial p}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + tv, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -RT \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - tu, \quad (2.7)$$

$$w = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz, \quad (2.8)$$

Граничные условия имеют вид (1.21), причем мы примем $z_0 = 0$, а ϑ_0 и q_0 — по (2.1) и (2.2). Ищем решение уравнения (2.3) в виде

$$\vartheta(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n z} [\vartheta_n(x, y) \cos(n\omega t - \varepsilon_n z) + \dot{\vartheta}_n(x, y) \sin(n\omega t - \varepsilon_n z)].$$

Легко заметить, что условие на бесконечности удовлетворено. Условие на поверхности земли $z = 0$ дает согласно (2.1) $\vartheta_n = T_n$ и $\dot{\vartheta}_n = T'_n$, а подстановка решения в уравнение (2.4) дает

$$\varepsilon_n^2 = \frac{n\omega}{2k}. \quad (2.9)$$

С учетом этого решение уравнения (2.3) примет вид:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n z} [T_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n z) + T'_n \sin(n\omega t - \varepsilon_n z)]. \quad (2.10)$$

Точно также можно написать решение уравнения (2.4). Оно имеет вид

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_n z} [q_n \cos(n\omega t - \varepsilon_n z) + q'_n \sin(n\omega t - \varepsilon_n z)], \quad (2.11)$$

причем ε_n определяется по формуле (2.9).

Используя теперь второе условие из (1.21), согласно уравнению (2.5), можно написать

$$p = \frac{\lambda}{RT} \int_0^z \vartheta dz.$$

Или, подставляя сюда (2.10), получим

$$p = -\frac{\lambda}{RT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon_n z}}{\varepsilon_n} [(T_n - T'_n) \cos(n\omega t - \varepsilon_n z) + (T_n + T'_n) \sin(n\omega t - \varepsilon_n z)]. \quad (2.12)$$

В частности, для давления на поверхности земли

$$p_0(x, y, 0, t) = -\frac{\lambda}{RT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} [(T_n - T'_n) \cos n\omega t + (T_n + T'_n) \sin n\omega t]. \quad (2.13)$$

Обратимся теперь к уравнениям движения (2.6) и (2.7). Умножив второе из них на i и складывая с первым, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{i\ell}{k} V = -\frac{\lambda}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon_n z}}{\varepsilon_n} [M_n \cos \alpha_n + M'_n \sin \alpha_n]. \quad (2.14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$V = u + iv; \quad \alpha_n = n\omega t - \varepsilon_n z;$$

$$M_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (T_n - T'_n); \quad M'_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (T_n + T'_n). \quad (2.15)$$

Найдем сначала частное решение неоднородного уравнения (2.14). Легко убедиться, что оно дается соотношением

$$V_{n.p.} = -\frac{i\hbar}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [M_n \cos \alpha_n + M_n^* \sin \alpha_n]. \quad (2.16)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{i\hbar}{k} V = 0 \quad (2.17)$$

имеет в следующем виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x, y, z) \cos n\omega t + v_n(x, y, z) \sin n\omega t], \quad (2.18)$$

причем u_n и v_n — неизвестные комплексные функции.

Подставляя (2.18) в (2.17), получим тождество, на основании которого

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \frac{i\hbar}{k} u_n - \frac{n\omega}{k} v_n &= 0, \\ \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} - \frac{i\hbar}{k} v_n + \frac{n\omega}{k} u_n &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Исключая из (2.19) поочередно u_n и v_n , получим

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} - \frac{2i\hbar}{k} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{n^2\omega^2 - l^2}{k^2} u_n = 0. \quad (2.20)$$

Точно таким же будет уравнение для определения v_n , следовательно, и решения будут одного вида, отличие лишь в постоянных интегрирования.

Характеристическим уравнением для (2.20) будет

$$r_n^4 - \frac{2i\hbar}{k} r_n^2 + \frac{n^2\omega^2 - l^2}{k^2} = 0.$$

Это уравнение имеет следующие корни

$$\begin{aligned} r_{n,1,2} &= \pm \sqrt{\frac{n\omega + l}{2k}} (1 + i), \\ r_{n,3,4} &= \pm \sqrt{\left| \frac{n\omega - l}{2k} \right|} (1 \mp i). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Отбросим два из этих четырех решений, ввиду их неограниченности на бесконечности. Будем иметь

$$u_n = c_{1,n} e^{-a_n(1+i)z} + c_{2,n} e^{-b_n(1+i)z}. \quad (2.22)$$

Точно также можно написать

$$v_n = c_{3,n} e^{-a_n(1+i)z} + c_{4,n} e^{-b_n(1+i)z}. \quad (2.23)$$

Здесь и далее верхний знак в выражении $b_n(1 \mp i)$ берется при $n\omega > l$, а нижний — при $n\omega < l$. Кроме того, обозначено

$$a_n^2 = \frac{n\omega + l}{2k}; \quad b_n^2 = \left| \frac{n\omega - l}{2k} \right|. \quad (2.24)$$

Если решения (2.22) и (2.23) подставить в (2.19), легко получить

$$c_{1,n} = -ic_{3,n} \quad \text{и} \quad c_{2,n} = ic_{4,n}. \quad (2.25)$$

Складывая теперь частное решение (2.16) с общим решением (2.18), используя при этом (2.22), (2.23) и (2.25), получим решение уравнения (2.14).

Удовлетворяя граничному условию на земле, согласно которому $V=0$ при $z=0$, легко определить $c_{3,n}$ и $c_{4,n}$. За недостатком места эти выражения выписывать не будем. Напишем сразу окончательный результат для скоростей, отделяя для этого действительные и мнимые части полученного общего решения неоднородного уравнения.

$$\begin{aligned} u = & \frac{\lambda}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [K_{ny} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{ny} \sin(n\omega t - \sigma_n z)] + \\ & + \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} [(K'_{nx} - K_{ny}) \cos(n\omega t - a_n z) - (K_{nx} + K'_{ny}) \sin(n\omega t - a_n z)] - \\ & - \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} [(K'_{nx} + K_{ny}) \cos(n\omega t \mp b_n z) - (K_{nx} - K'_{ny}) \sin(n\omega t \mp b_n z)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} V = & -\frac{\lambda}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [K_{nx} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t - \sigma_n z)] + \\ & + \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} [(K_{nx} + K_{ny}) \cos(n\omega t - a_n z) + (K'_{nx} - K_{ny}) \sin(n\omega t - a_n z)] + \\ & + \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} [(K_{nx} - K_{ny}) \cos(n\omega t \mp b_n z) + (K'_{nx} + K_{ny}) \sin(n\omega t \mp b_n z)]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} K_{nx} &= \frac{\partial}{\partial x} (T_n - T'_n); & K'_{nx} &= \frac{\partial}{\partial x} (T_n + T'_n); \\ K_{ny} &= \frac{\partial}{\partial y} (T_n - T'_n); & K'_{ny} &= \frac{\partial}{\partial y} (T_n + T'_n). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Нетрудно заметить, что при $l=0$ получается $a_n = b_n = \sigma_n$ и решения (2.26) и (2.27) становятся неопределенностью. Раскрывая ее по обычным правилам, получим

$$u|_{l=0} = -\frac{\lambda z}{4k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^2} \left[\frac{\partial T'_n}{\partial x} \cos(n\omega t - \sigma_n z) - \frac{\partial T_n}{\partial x} \sin(n\omega t - \sigma_n z) \right],$$

$$v|_{l=0} = -\frac{\lambda z}{4k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n^2 z}}{\sigma_n^2} \left[\frac{\partial T_n}{\partial y} \cos(n\omega t - \sigma_n z) - \frac{\partial T_n}{\partial y} \sin(n\omega t - \sigma_n z) \right]. \quad (2.29)$$

Это предельное решение имеет место для экваториальных областей, где $l \rightarrow 0$ и совпадает с решением нашей задачи, которое мы получили бы, если бы с самого начала положили $l=0$ для всех широт.

Подставляя теперь решения (2.26) и (2.27) в (2.28), получим для вертикальной скорости следующее выражение

$$\begin{aligned} w = & -\frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n a_n} (\Delta T_n \cos n\omega t + \Delta T_n' \sin n\omega t) + \\ & + \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n a_n} [\Delta T_n \cos(n\omega t - a_n z) + \Delta T_n' \sin(n\omega t - a_n z)] + \\ & + \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n b_n} \left(\frac{\Delta T_n \cos n\omega t + \Delta T_n' \sin n\omega t}{\Delta T_n} - \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n b_n} \left[\frac{\Delta T_n \cos(n\omega t - b_n z) + \Delta T_n' \sin(n\omega t - b_n z)}{\Delta T_n} \right] \right). \quad (2.30) \end{aligned}$$

Здесь верхние знаки и лапласианы от T_n и T_n' берутся при $n\omega > l$, а нижние — при $n\omega < l$.

Таким образом, решение задачи дается формулами (2.10) для температуры, (2.11) — для влажности, (2.12) — для давления, (2.13) — для наземного давления, (2.26) и (2.27) — для горизонтальных и (2.30) — для вертикальной скоростей.

§ 3. Решение задачи при переменном коэффициенте турбулентного перемешивания

Рассмотрим случай, когда k линейно растет с высотой. Такая закономерность для k хорошо оправдывается в приземном слое, далее k стремится к пределу.

Но чтобы не решать двухслойную задачу и упростить выкладки, примем

$$k = k_0 z. \quad (3.1)$$

Тогда система (1.15)–(1.20) примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (3.2)$$

$$0 = -RT \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda \theta, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -RT \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) r + k_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial V}{\partial z} \right) - i l V, \quad (3.4)$$

$$w = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (3.5)$$

Причем, как и выше $V = u + iv$.

Граничные условия имеют вид (1.21). Уравнение для влажности в точности совпадает с (3.2).

Ищем решение (3.2) в виде

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_n(x, y, z) \cos n\omega t + \vartheta'_n(x, y, z) \sin n\omega t]. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.2) и обозначая

$$\vartheta_n + i\vartheta'_n = \Phi_n, \quad (3.7)$$

получим для Φ_n уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{in\omega}{k_0 z} \Phi_n = 0.$$

Ограниченным на бесконечности и обращающимся в $T_n + iT'_n$ на $z = z_0$ решением этого уравнения является

$$\Phi_n(x, y, z) = \frac{T_n(x, y) + iT'_n(x, y)}{H_0(\beta_n \sqrt{iz_0})} H_0(\beta_n \sqrt{iz}), \quad (3.8)$$

$$\beta_n = 2 \sqrt{\frac{n\omega}{k_0}}. \quad (3.9)$$

Здесь H_0 — функция Ханкеля первого рода.

Из уравнения (3.3) имеем

$$p = \frac{\lambda}{RT} \int_0^z \vartheta dz.$$

Если подставить сюда (3.6) и, кроме того, положить

$$p = \frac{\lambda}{RT} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\omega t + p'_n \sin n\omega t), \quad (3.10)$$

можно легко получить

$$p_n + ip'_n = \int_0^z \Phi_n dz.$$

Подставляя сюда (3.8) и выполняя квадратуры, получим

$$p_n + ip'_n = \frac{T_n + iT'_n}{H_0(\beta_n \sqrt{iz_0})} \cdot \frac{\sqrt{2z}}{\beta_n} (1-i) H_1(\beta_n \sqrt{iz}). \quad (3.11)$$

В частности, если положить здесь $z = z_0$ и подставить это решение в (3.10), можно получить $p_0(x, y, 0, t)$.

Обратимся теперь к уравнению (3.4). Представляя его решение в виде (2.18) и используя решение (3.10) для p , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) - \frac{il}{k_0} u_n - \frac{n\omega}{k_0} v_n = F_n, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) - \frac{il}{k_0} v_n + \frac{n\omega}{k_0} u_n = f_n, \quad (3.13)$$

$$F_n = \frac{i}{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) p_n, \quad f_n = \frac{i}{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) p'_n, \quad (3.14)$$

причем p_n и p'_n определяются из (3.11).

Заметим, что u_n и v_n — неизвестные комплексные функции. Для решения этой системы воспользуемся преобразованием Лапласа.

Положим для какой-либо функции

$$\bar{u}_n(x, y, p) = \int_{z_0}^{\infty} u_n(x, y, z) e^{-pz} dz. \quad (3.15)$$

Применяя этот оператор к системе (3.12)–(3.13) и используя граничные условия (1.21), получим

$$p^2 \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial p} + \left(p + \frac{il}{k_0} \right) \bar{u}_n + \frac{n\omega}{k_0} \bar{v}_n = -\bar{F}_n, \quad (3.16)$$

$$p^2 \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial p} + \left(p + \frac{il}{k_0} \right) \bar{v}_n - \frac{n\omega}{k_0} \bar{u}_n = -\bar{f}_n.$$

Исключая из этих уравнений $\bar{v}_n$, получим для $\bar{u}_n$

$$p^4 \frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial p^2} + 2p^2 \left(2p + \frac{il}{k_0} \right) \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial p} + \left(2p^2 + 2p \frac{il}{k_0} + \frac{n^2 \omega^2 - l^2}{k_0^2} \right) \bar{u}_n = \bar{F}. \quad (3.17)$$

здесь

$$\bar{F} = \frac{n\omega}{k_0} \bar{f}_n - p^2 \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial p} - \left(p + \frac{il}{k_0} \right) \bar{f}_n. \quad (3.18)$$

Если из (3.17) определить $\bar{u}_n$, то $\bar{v}_n$ найдется из следующего простого выражения

$$\bar{v}_n = -\frac{k_0}{n\omega} \left[\bar{F}_n + \left(p + \frac{il}{k_0} \right) \bar{u}_n + p^2 \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial p} \right]. \quad (3.19)$$

Для решения уравнения (3.17) сделаем преобразование переменных, для этого положим

$$p = \frac{1}{q}. \quad (3.20)$$

Кроме того, пусть

$$W_n(q) = e^{-\frac{ilq}{k_0}} \bar{u}_n. \quad (3.21)$$

Тогда (3.17) примет следующий простой вид

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial q^2} - \frac{2}{q} \frac{\partial W_n}{\partial q} + \left(\frac{2}{q} + \frac{n^2 \omega^2}{k_0^2} \right) W_n = e^{-\frac{nq}{k_0}} \bar{F}. \quad (3.22)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$W = q^{\pm \frac{1}{2}} \left[A_n J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n\omega}{k_0} q \right) + B_n J_{+\frac{1}{2}} \left(\frac{n\omega}{k_0} q \right) \right]. \quad (3.23)$$

Здесь $J_{\pm \frac{1}{2}}$ — функции Бесселя.

Для решения неоднородного уравнения (3.22) воспользуемся методом вариации постоянных. Используя некоторые свойства функций Бесселя и возвращаясь к искомой функции по (3.21) и к переменной p по (3.20), получим для изображения u_n , как общее решение неоднородного уравнения (3.17)

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{k_0 p}} \left[A_n J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) + B_n J_{+\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) \right] + \\ & + \frac{8\beta_n}{\pi} \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{k_0 p}} J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) \int_0^p \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{11}{2}} J_{+\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) \bar{F}(p) dp - \\ & - \frac{8\beta_n}{\pi} \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{k_0 p}} J_{+\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) \int_0^p \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{11}{2}} J_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{4\beta_n}{p} \right) \bar{F}(p) dp. \end{aligned} \quad (3.24)$$

По (3.19) легко определить v_n .

Из (3.24) можно найти оригинал u_n .

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pz} \bar{u} dp. \quad (3.25)$$

Найдя таким образом горизонтальные скорости, легко из уравнения неразрывности найти вертикальную скорость.

§ 4. Некоторые результаты

Подставим значение I во второе выражение (2.24) и перепишем его в следующем виде

$$b_n = \sigma_n \sqrt{1 - \frac{2}{n} \sin \varphi}. \quad (4.1)$$

Как видно из (4.1), для $n > 2$ b_n действительно на всех широтах, при $n=2$ — лишь на полюсе $b_n=0$. При $n=1$ и $\varphi=30^\circ$ широты снова $b_n=0$. Это означает, что если исключить полюс, то волны, за исключением волны с $n=1$, затухают с высотой на всех широтах.

Лишь суточная волна не затухает с высотой на широте $\varphi=30^\circ$. Этот результат для первой волны получен в [3].

Определим момент наступления бриза из условия

$$\left. \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (4.2)$$

Подставляя сюда решение (2.26), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\omega t_0 + \beta'_n \sin n\omega t_0) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_n &= -\frac{a_n - b_n}{\varepsilon_n} \frac{\partial T'_n}{\partial x}; & \beta'_n &= \frac{a_n - b_n}{\varepsilon_n} \frac{\partial T_n}{\partial x} & \varphi < 30^\circ, \\ \beta_n &= \frac{1}{\varepsilon_n} \left(b_n \frac{\partial T_n}{\partial x} - a_n \frac{\partial T'_n}{\partial x} \right); & \beta'_n &= \frac{1}{\varepsilon_n} \left(b_n \frac{\partial T'_n}{\partial x} + a_n \frac{\partial T_n}{\partial x} \right) & \varphi > 30^\circ. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) относительно ωt_0 решается графически. Определим угол наклона ветра от нормали к берегу у поверхности земли из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} \Big|_{z=0}. \quad (4.5)$$

Подставляя сюда (2.26) и (2.27) и раскрывая неопределенность, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos n\omega t + x'_n \sin n\omega t)}{\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\omega t + \beta'_n \sin n\omega t)}. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} x_n &= \left(2 - \frac{a_n + b_n}{\varepsilon_n} \right) \frac{\partial T'_n}{\partial x}; & x'_n &= \left(2 - \frac{a_n + b_n}{\varepsilon_n} \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} & \varphi < 30^\circ, \\ x_n &= \left(2 - \frac{a_n}{\varepsilon_n} \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} + \frac{b_n}{\varepsilon_n} \frac{\partial T'_n}{\partial x}; & x'_n &= \left(2 - \frac{a_n}{\varepsilon_n} \right) \frac{\partial T'_n}{\partial x} - \frac{b_n}{\varepsilon_n} \frac{\partial T_n}{\partial x} & \varphi > 30^\circ. \end{aligned}$$

β_n, β'_n определяются по (4.4).

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют сделать ряд выводов и проводить расчеты конкретных примеров. Этим вопросам будет посвящена наша следующая статья.

Ա. Մ. Մխիթարյան

ԲՐԻԶԱՅԻՆ ՑԻՐԿՈՒԼՅԱՑԻԱՅԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լճերի և ջրամբարների վրա բամուռ սեփմի ուսումնասիրությունը կարևոր կիրառական նշանակություն ունի: Ընդհանուր ֆոնի վրա ավելանում են նաև տեղական քամիներ (լեռնա-հովտային բրիզային, ֆյունային և այլն), որոնց ուսումնասիրությունը կօգնի ինչպես եղանակի կանխագուշակման մեթոդները կատարելագործելու, այնպես էլ այլ գործնական հարցեր լուծելու համար, ինչպիսիք են՝ դալորշիացումը և պայքարը նրա դեմ հասուկ մոլեկուլյար թաղանթների միջոցով:

Հոդվածում բերվում է բրիզային ցիրկուլացիայի խնդրի լուծումը գծային տեսության սահմաններում, բնագունելով, որ այն ունի օրական ընթացք և առաջանում է ծածկույթի ջերմային անհամասեռության հետևանքով:

Հիդրոջերմադինամիկայի հիմնական հավասարումների (1.9)–(1.14) սխեմներ պարզեցվում է և բերվում (1.15)–(1.20) տեսքին՝ ջերմաստիճանի (θ), խոնավության (q), ճնշման (p) և արագության հորիզոնական (u, v) ու ուղղաձիգ (w) բաղադրիչների համար: Սահմանային պայմաններն ունեն (1.21) տեսքը: Նախնական պայմաններ չեն դրվում, քանի որ որոնվում է խնդրի պերիոդիկ լուծումը:

Այնուհետև § 2-ում լուծվում է հավասարումների (2.3)–(2.8) սխեմներ, հաշվի առնելով Կորիոլիսի արագացումը տուրբուլենտականության հաստատուն գործակցի դեպքում:

Ընդունվում է, որ ջերմաստիճանի և խոնավության բաշխումը երկրի մակերևույթի վրա հալանի է և տրվում է (2.1) և (2.2) շարքերով: Այդ դեպքում ջերմաստիճանի համար ստացվում է (2.10) լուծումը, խոնավության համար՝ (2.11), ճնշման համար՝ (2.12), արագության հորիզոնական բաղադրիչների համար՝ (2.26) ու (2.27) և ուղղաձիգ բաղադրիչի համար՝ (2.30):

Հաջորդ պարագրաֆում նույն խնդիրը լուծվում է այն դեպքի համար, երբ ուղղաձիգ տուրբուլենտ փոխանակման գործակիցը ըստ բարձրության փոփոխական է, աճում է (3.1) գծային օրենքով: Հավասարումների սխեմին այս դեպքում ունի (3.2)–(3.5) տեսքը, սահմանային պայմանները՝ (1.21) տեսքը: Այս դեպքում ևս հնարավոր է լինում լուծումը հասցնել մինչև վերջ:

Հոդվածի վերջում բերվում են մի շարք արդյունքներ՝ (4.3) տեսքով բրիզի ծագման ժամանակի որոշման համար, (4.6) տեսքով՝ նրա թեթևության անկյան որոշման համար և այլն:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бурман Э. А. К вопросу о распределении вертикальных токов при бризовых циркуляциях. Труды ОГМИ, вып. 5, 1953.
2. Воейков А. И. Морские и береговые бризы. Метеор. вестник, 6–7, 1914.
3. Гутман Л. Н. О структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.
4. Гутман Л. Н. О вертикальных токах при бризах. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.

5. Гутман Л. Н. О распределении бризов по нормали к берегу. Метеор. и гидр., № 2, 1940.
6. Кибель И. А. Применение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 1940.
7. Кибель И. А. Метод решения задачи о локальных ветрах. Доклады ЦИП, 1, вып. 1—2, 1947.
8. Марков Д. В. и Альбов Н. В. Модель стационарной бризовой циркуляции. Труды ГГО, вып. 31, 1940.
9. Мхитарян А. М. Испарение с поверхности озера Севан. «Результаты комплексных исследований по Севанской проблеме», т. I. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
10. Николаев Н. Г. Ветры в бассейне озера Севан. Материалы по исследованию оз. Севан, ч. III, 1933.
11. Ситников И. Г. Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
12. Трубинов Б. Н. О вертикальных токах при бризе над плоским берегом. Изв. АН СССР, сер. Геофиз., № 2, 1961.
13. Arakawa H., Utsugi M. Theoretical Investigation of Land and Sea-Breezes. Geoph. Mag., 11, 1937.
14. Haurwitz H. Comments on the Sea-Breeze Circulation. The Journ. of Meteorol., 4, № 1, 1947.
15. Jeffreys H. On the Dynamics of Wind. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., 48, 1922.
16. Pearce R. P. The calculation of the sea-breeze circulation in terms of the differential heating across the coastline. Quart. Journ. of the Roy. Met. Soc., 81, № 349, 1955, 82, № 352, 1956.
17. Schmidt F. H. An Elementary Theory of Land and Sea-Breeze Circulation. The Journ. of Meteorol., 4, № 1, 1947.