

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. С. Космодамианский

Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий

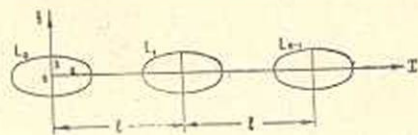
Задача о напряженном состоянии анизотропной пластинки, ослабленной одним эллиптическим отверстием, имеет точное решение и хорошо изучена [1].

Однако, во многих отраслях промышленности инженеры имеют дело с пластинками, ослабленными не одним, а несколькими отверстиями, которые оказывают взаимное влияние друг на друга.

Целью данной работы является изучение влияния отверстий на напряженное состояние пластинки вблизи этих отверстий.

1. Пусть анизотропная пластинка, ослабленная конечным числом эллиптических отверстий, деформируется усилиями, действующими на контурах отверстий в ее срединной плоскости. Для простоты примем эллиптические отверстия одинаковыми. Центры их лежат на одной прямой, а расстояния между центрами также одинаковы и равны l . Полуоси эллипсов обозначим через $a=1$ и b . При этом будем предполагать, что $l > 2a$ и $l > 2b$ (фиг. 1).

Задача о напряженном состоянии такой пластинки сводится [1] к определению двух функций комплексных переменных $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из граничных условий на контурах отверстий



Фиг. 1.

$$2\operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = \int_0^s Y_n ds + c_{1k}, \quad (1.1)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_2\Phi_1(z_1) + \mu_1\Phi_2(z_2)] = -\int_0^s X_n ds + c_{2k},$$

где X_n и Y_n — проекции усилий, действующих на контурах отверстий, на оси x и y ; k — номер контура; c_{1k} и c_{2k} — произвольные постоянные, не влияющие на напряженное состояние пластинки; μ_1 и μ_2 — комплексные постоянные, которые характеризуют анизотропию пластинки.

Функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ определены в областях S_1 и S_2 , которые получаются из заданной области путем аффинного преобразования.

Остановимся на случае, когда комплексные параметры μ_1 и μ_2 являются чисто мнимыми ($\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\delta$). Тогда в области определения функции $\Phi_1(z_1)$ будем иметь плоскость с одинаковыми эллиптическими вырезами, причем полуоси эллипсов получатся равными 1 и βb . В области же определения функции $\Phi_2(z_2)$ аналогичные эллипсы имеют полуоси 1 и δb . При этом расстояния между центрами отверстий будут попрежнему равны l .

Аналитическую в области S_1 функцию $\Phi_1(z_1)$ можно представить так [2]

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z_1). \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi_k(z_1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) — функция, голоморфная вне контура L_k , полученного из контура L_k путем аффинного преобразования.

Отобразим конформно внешность единичного круга γ на внешность контура L_k . Отображающая функция имеет вид

$$\omega(\zeta_k) = z_1 - kl = \frac{1 + \beta b}{2} \zeta + \frac{1 - \beta b}{2} \frac{1}{\zeta}. \quad (1.3)$$

Функция

$$\varphi_k(z_1) = \varphi_k^*(\zeta_k) \quad (1.4)$$

будет голоморфной функцией вне единичного круга γ в области (ζ_k) . Поэтому ее можно представить в виде ряда

$$\varphi_k^*(\zeta_k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{mk}}{\zeta_k^m}, \quad (1.5)$$

где

$$\zeta_k = \zeta(z_1 - kl). \quad (1.6)$$

Теперь функция $\Phi_1(z_1)$ примет вид

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{mk}}{[\zeta(z_1 - kl)]^m}. \quad (1.7)$$

Перенесем начало координат в центр эллипса L_v ($v = 0, 1, 2, \dots, n-1$) положив

$$z_1 - vl = z_1^*. \quad (1.8)$$

Тогда

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,v}}{[\zeta(z_1^*)]^m} + \sum_{k=-v}^{n-1-v} (*) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,k+v}}{[\zeta(z_1^* - kl)]^m}, \quad (1.9)$$

где знак (*) означает отсутствие в сумме номера $k = 0$.

Последняя сумма в выражении (1.9) представляет из себя функцию, голоморфную в круге, который охватывает контур L'_v , не касаясь соседних контуров. В этом круге, а, следовательно, и на контуре L'_v , эту сумму можно разложить в ряд

$$\sum_{k=-v}^{n-1-v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,k+v}}{[\zeta(z_1^* - kl)]^m} = \sum_{t=0}^{\infty} A_t^{(v)} (z_1^*)^t, \quad (1.10)$$

где

$$A_t^{(v)} = \frac{1}{t!} \lim_{z_1^* \rightarrow 0} \frac{d^t}{dz_1^t} \left\{ \sum_{k=-v}^{n-1-v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,k+v}}{[\zeta(z_1^* - kl)]^m} \right\}. \quad (1.11)$$

Коэффициенты $A_t^{(v)}$ в качестве множителей будут иметь в различных степенях малый параметр $\varepsilon = 1/l$, т. к. $(\zeta)_{z^*=0} = -\frac{kl}{1+\beta b} \times \times \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1-\beta^2 b^2}{k^2 l^2}}\right)$.

Ограничимся в разложении (1.9) членами, содержащими ε в степени не выше наперед заданной. Тогда на контуре L'_v

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,v}}{[\zeta(z_1^*)]^m} + \sum_{t=0}^r A_t^{(v)} (z_1^*)^t, \quad (1.12)$$

где r — наперед заданное число.

Таким же образом на контуре L'_v , который в плоскости (z_2) получился из контура L_v путем аффинного преобразования, будем иметь

$$\Phi_2(z_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_{m,v}}{[\zeta(z_2^*)]^m} + \sum_{t=0}^r B_t^{(v)} (z_2^*)^t, \quad (1.13)$$

где

$$z_2^* = z_2 - vl \quad (1.14)$$

Предположим, что коэффициенты $\varphi_{m,k+v}$ и $\psi_{m,k+v}$ при $k \neq 0$ нам известны. Тогда для определения функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из граничных условий (1.1), заданных на контуре L_v , мы имеем задачу для ортотропной пластинки с одним эллиптическим отверстием, решение которой известно для общего вида нагружения контура пластинки [1].

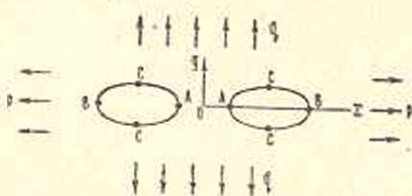
Проделив эту операцию для каждого отверстия, для определения коэффициентов $\varphi_{m,k+v}$ и $\psi_{m,k+v}$ получим конечную алгебраическую си-

стему. Найдя эти коэффициенты, мы на основании формул (1.12) и (1.13) определим функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, зная которые найдем напряжения из следующих зависимостей

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2\operatorname{Re} [\beta^2 \Phi_1'(z_1) + \beta^2 \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re} [\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re} i [\beta \Phi_1'(z_1) + \beta \Phi_2'(z_2)].\end{aligned}\quad (1.15)$$

Таким путем решается задача о напряженном состоянии анизотропной пластинки и в том случае, когда отверстия не являются одинаковыми и когда расстояния между центрами отверстий различны. В этом случае $\varepsilon = \frac{1}{l_1}$, где l_1 — наименьшее расстояние между отверстиями. Остальные расстояния выражаются в долях l_1 .

2. Пусть имеем ортотропную пластинку с двумя эллиптическими отверстиями. Контуры этих отверстий свободны от усилий, а на бесконечности действуют растягивающие усилия интенсивности p вдоль линии центров отверстий и интенсивности q — перпендикулярно к линии центров (фиг. 2).



Фиг. 2.

Решение задачи о напряженном состоянии этой пластинки проведем методом наложения. Сначала найдем поле напряжений в сплошной пластинке. Здесь

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (2.1)$$

На воображаемых контурах отверстий в данном случае проекции усилий на оси x и y будут иметь вид

$$X_n^0 = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n^0 = q \frac{dx}{ds}. \quad (2.2)$$

Наложим, далее, на поле напряжений в сплошной пластинке поле напряжений, которое получится, если к контурам отверстий приложить усилия

$$X_n = -X_n^0, \quad Y_n = -Y_n^0. \quad (2.3)$$

Эта задача приводится к определению функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из граничных условий (1.1).

В силу геометрической и силовой симметрии, которая имеет место в нашей задаче, функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ можно представить в виде

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{[\zeta(z_1^*)]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{[\zeta(z_1^* + 2l)]^k}.$$

$$\Phi_2(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{[\zeta(z_2^*)]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \psi_k}{[\zeta(z_2^* + 2l)]^k}, \quad (2.4)$$

где $z_1^* = z_1 - l$, $z_2^* = z_2 - l$.

Коэффициенты φ_k и ψ_k следует определять из граничных условий на контуре правого отверстия. Тогда на контуре левого отверстия они будут выполнены автоматически.

Разложим вторые суммы выражений (2.4) в степенные ряды, используя формулы (1.10)–(1.14), ограничившись членами, содержащими ε в четвертой степени.

Тогда из граничных условий (1.1) для определения коэффициентов φ_k и ψ_k получим следующую алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} & \varphi_1(1 - \varepsilon^2 m_0 - 6\varepsilon^4 m_0^2 m_1) + \psi_1(1 - \varepsilon^2 n_0 - 6\varepsilon^4 n_0^2 n_1) + 2\varphi_2 \varepsilon^3 m_0^2 + \\ & + 2\psi_2 \varepsilon^3 n_0^2 - 3\varphi_3 \varepsilon^4 m_0^3 - 3\psi_3 \varepsilon^4 n_0^3 = -\frac{q}{2}, \\ & \varphi_2(1 - 3\varepsilon^4 d_0 m_0^2) + \psi_2(1 - 3\varepsilon^4 t_0 n_0^2) + \varphi_1 \varepsilon^3 m_0 d_0 + \psi_1 \varepsilon^3 n_0 t_0 = 0, \\ & \varphi_3 + \psi_3 - \varphi_1 \varepsilon^4 m_0(m_0^3 + m_1^3) - \psi_1 \varepsilon^4 n_0(n_0^3 + n_1^3) = 0, \\ & \beta \varphi_1(1 + \varepsilon^2 m_0 \beta c + 6\varepsilon^4 m_0^2 m_1 \beta c) + \delta \psi_1(1 + \varepsilon^2 n_0 \delta c + 6\varepsilon^4 n_0^2 n_1 \delta c) - \\ & - 2\beta^2 \varphi_2 \varepsilon^3 c m_0^2 - 2\delta \psi_2 \varepsilon^3 c n_0^2 + 3\beta^2 \varphi_3 \varepsilon^4 c m_0^3 + 3\delta^2 \psi_3 \varepsilon^4 c n_0^3 = \frac{pc}{2}, \\ & \beta \varphi_2(1 + 3\varepsilon^4 m_0^2 \beta c) + \delta \psi_2(1 + 3\varepsilon^4 n_0^2 \delta c) - \beta^2 \varphi_1 \varepsilon^3 m_0 c - \delta^2 \psi_1 \varepsilon^3 n_0 c = 0, \\ & \beta \varphi_3 + \delta \psi_3 + \beta \varphi_1 \varepsilon^4 m_0(m_0^3 - m_1^3) + \delta \psi_1 \varepsilon^4 n_0(n_0^3 - n_1^3) = 0, \\ & \varphi_k = \psi_k = 0 \quad (k=4, 5, \dots). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c &= \frac{b}{a}, \quad m_0 = 0.5(1 + \beta c), \quad m_1 = 0.5(1 - \beta c), \quad n_0 = 0.5(1 + \delta c), \\ n_1 &= 0.5(1 - \delta c), \quad d_0 = 0.5(1 + \beta^2 c^2), \quad t_0 = 0.5(1 + \delta^2 c^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Найдя из этой системы коэффициенты φ_k и ψ_k , на основании формул (2.4) и (1.15) найдем напряжения.

В таблице № 1 приведены значения нормальных напряжений σ_x и σ_y в наиболее интересных точках для двух случаев загрузки пластинки (1. $p=0$, $q \neq 0$; 2. $p \neq 0$, $q=0$). Для сравнения здесь же приведены значения аналогичных напряжений σ_x^* и σ_y^* , которые имеют место в пластинке с одним эллиптическим отверстием.

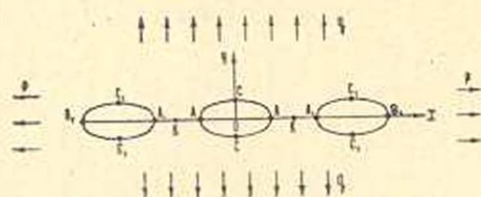
Касательные напряжения τ_{xy} в рассматриваемых точках равны нулю.

При проведении расчетов было принято, что пластинка изготовлена из СВАМа [3] ($\beta = 1,89$, $\delta = 0,531$). Были рассмотрены различные отношения полуосей эллипса c при неизменном расстоянии между отверстиями, которое равнялось a .

Таблица 1

c	Точки	$p = 0, q \neq 0$				$p \neq 0, q = 0$			
		σ_x/q	σ_y/q	σ_x^*/q	σ_y^*/q	σ_x/p	σ_y/p	σ_x^*/p	σ_y^*/p
1	O	0,32	2,08	0,32	1,49	0,10	0,03	0,16	-0,07
	A	0,004	3,51	0	3,42	0,002	-0,48	0	-1,00
	B	-0,02	3,71	0	3,42	0,006	-0,91	0	-1,00
	C	-0,94	-0,01	-1,00	0	3,17	0,02	3,42	0
0,5	O	0,82	1,89	0,46	1,40	0,13	0,03	0,45	0,01
	A	0,02	6,20	0	5,83	-0,02	-0,60	0	-1,00
	B	-0,01	6,10	0	5,83	0,01	-0,89	0	-1,00
	C	-0,92	-0,001	-1,00	0	2,03	0,001	2,21	0
0,25	O	0,95	1,78	0,47	1,35	0,50	0,02	0,73	0,01
	A	0,05	11,53	0	10,65	-0,03	-0,83	0	-1,00
	B	-0,01	11,15	0	10,65	0,01	-0,94	0	-1,00
	C	-0,94	0,001	-1,00	0	1,53	0	1,61	0

3. Пусть пластинка, рассмотренная в § 2, ослаблена тремя одинаковыми эллиптическими отверстиями (фиг. 3).



Фиг. 3.

В данном случае в силу силовой и геометрической симметрии функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ можно представить так

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) = & \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\varphi_{k0}}{[\zeta(z_1)]^k} + \\ & + \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} \varphi_{k1} \left\{ \frac{1}{[\zeta(z_1-l)]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta(z_1+l)]^k} \right\}, \\ \Phi_2(z_2) = & \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\psi_{k0}}{[\zeta(z_2)]^k} + \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} \psi_{k1} \left\{ \frac{1}{[\zeta(z_2-l)]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta(z_2+l)]^k} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Коэффициенты φ_{k0} , φ_{k1} , ψ_{k0} и ψ_{k1} следует определять из граничных условий на контурах правого и среднего отверстий таким же образом, как это сделано в § 2 (граничные условия на контуре левого отверстия будут удовлетворены автоматически).

После их определения на основании (3.1) станут известными функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ и напряжения в пластинке определятся по формулам (1.15).

Результаты вычислений для напряжений, проведенных для тех же случаев, что и в § 2, приведены в таблице № 2.

На основании приведенных таблиц можно заметить, что

Таблица 2

c	Точки	$p = 0, q \neq 0$				$p \neq 0, q = 0$			
		σ_x/q	σ_y/q	σ_x^*/q	σ_y^*/q	σ_x/p	σ_y/p	σ_x^*/p	σ_y^*/p
1	B ₁	-0,01	3,71	0	3,42	0,03	-0,89	0	-1,00
	A ₁	0,04	4,04	0	3,42	-0,04	-0,58	0	-1,00
	A	0,06	3,87	0	3,42	-0,06	-0,57	0	-1,00
	C ₁	-0,90	-0,01	-1,00	0	3,18	-0,01	3,42	0
	C	-0,82	-0,03	-1,00	0	2,95	0,02	3,42	0
	K	0,58	2,13	0,32	1,49	0,08	0,04	0,16	-0,07
0,5	B ₁	-0,02	6,26	0	5,85	0,02	-0,85	0	-1,00
	A ₁	0,10	6,42	0	5,85	-0,09	-0,69	0	-1,00
	A	0,08	6,61	0	5,85	-0,08	-0,60	0	-1,00
	C ₁	-0,87	0,01	-1,00	0	1,99	-0,01	2,21	0
	C	-0,77	-0,004	-1,00	0	1,79	-0,004	2,21	0
	K	0,88	1,95	0,46	1,40	0,09	0,04	0,45	0,01
0,25	B ₁	-0,02	11,44	0	10,68	0,02	-0,90	0	-1,00
	A ₁	0,07	11,74	0	10,68	-0,05	-0,84	0	-1,00
	A	0,07	12,01	0	10,68	-0,04	-0,79	0	-1,00
	C ₁	-0,91	0,01	-1,00	0	1,51	-0,001	1,61	0
	C	-0,87	-0,01	-1,00	0	1,45	-0,002	1,61	0
	K	1,01	1,84	0,47	1,36	0,49	0,03	0,73	0,01

а) концентрация напряжений в пластинке понижается при увеличении количества отверстий, когда пластинка растягивается вдоль линии центров отверстий и увеличивается, когда пластинка растягивается поперек линии центров;

б) при растяжении пластинки поперек линии центров нормальные напряжения σ_x и σ_y в точках между отверстиями значительно увеличиваются по сравнению со случаем, когда пластинка ослаблена только одним отверстием; это увеличение получается большим, если отношение полуосей эллипсов c будут уменьшаться; при растяжении же пластинки вдоль линии центров напряжения в точках между отверстиями уменьшаются.

Саратовский госуниверситет
им. Чернышевского

Поступила 6 VI 1960

Ա. Ս. Կոսմոպոլիտսկի

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԷԼԻՊՏԻԿ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԹԻՔԵՂԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Վերջավոր թվով էլիպտիկ անցքերով թիթեղը դեֆորմացիայի է ենթարկվում թիթեղի միջին հարթությանում կիրառված ուժերով:

Առաջարկվում է մի եղանակ, որը հնարավորություն է տալիս սովոր թիթեղի լարվածության վիճակի խնդիրը բերել մեկ անցքով համանման թիթեղի մի շարք խնդիրների, որոնց լուծումներն ստացվում են հալանի եղանակներով:

Որպես մասնավոր դեպք, դիտարկված է երկու և երեք էլիպտիկ անցքերով օրթոտրոպ թիթեղի ձգումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластики. Гостехиздат, М., 1957.
2. Шерман Д. И. К вопросу о напряженном состоянии междукламерных целлюлозных перегородок в упругой среде, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы. Изв. АН СССР, ОТН*, 7, № 6, 1952.
3. Буров А. К., Андреевская Г. Д. Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение. Изд. АН СССР, М.—Л., 1956.