

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение давления в неоднородном упругом
 полупространстве

Пусть в некоторой точке O границы нижнего полупространства, занятого упругой неоднородной средой, возникло давление, которое затем распространяется симметрично по границе по произвольному закону. Движение среды считаем осесимметричным. Расположим ось Ox по границе среды, ось Oz направлена вниз. Обозначим $a(z)$, $b(z)$ и $\rho(z)$ переменные с глубиной скорости продольных и поперечных волн и плотность среды

$$a^2(z) = \frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}, \quad b^2(z) = \frac{\mu(z)}{\rho(z)}.$$

При $z=0$ выполняется условие для тензора напряжений

$$\begin{aligned} \tau_z &= \begin{cases} p_1(x, t), & x < R(t) \\ 0, & x > R(t) \end{cases} \\ \tau_{rz} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $R(t)$ — радиус фронта давления на поверхности среды, $p_1(x, t)$ — давление за этим фронтом. Рассмотрим случай сверхзвуковой скорости распространения $R'(t) > a(z)$. Для определения компонентов тензора напряжений на продольной волне, воспользуемся соотношением вдоль луча для продольной $\bar{u}^*(u_1, u_2)$ и поперечной $\bar{V}^*(v_1, v_2)$ составляющих вектора смещения [1]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\bar{u}^*}{ds_1} + V^2 \tau_1 \bar{u}^* + \frac{1}{\lambda(z) + 2\mu(z)} \{ [\text{grad } \lambda(z)(\bar{u}^* \text{ grad } \tau_1)] + \\ + 2 \text{ grad } \tau_1 [\bar{u}^* \text{ grad } \mu(z)] \} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$2 \frac{d\bar{V}^*}{ds_2} + V^2 \tau_2 \bar{V}^* + \frac{1}{\mu(z)} \{ 2 [\bar{V}^* \text{ grad } \mu(z)] \text{ grad } \tau_2 + \text{grad } \mu(z) [\bar{V}^* \text{ grad } \tau_2] \} = 0,$$

где $\tau_1 = t$ — уравнение фронта продольной волны, $\tau_2 = t$ — уравнение поперечного фронта, $s_{1,2}$ — параметр вдоль лучей. Уравнение лучей для продольных и поперечных волн записывается в виде

$$x = R[t_0(\theta_{1,2})] + \lambda_{1,2} s_{1,2}; \quad s_{1,2} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}}, \quad (3)$$

$$t = t_0(\theta_{1,2}) = \int_0^z \frac{dz}{C_{1,2}(z) \sqrt{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}} = \tau_{1,2},$$

где $\theta_{1,2}$ — угол выхода продольного и поперечного лучей с осью Ox в момент $t = t_0(\theta_1) = t_0(\theta_2)$ прохождения фронта через границу $C_1(z) = a(z)$.

$$C_2(z) = b(z); \quad \lambda_{1,2} = \frac{\cos \theta_{1,2}}{C_{1,2}(\theta)} = \frac{1}{R'[t_0(\theta_1)]} = \frac{1}{v}.$$

Решение [2] на фронтах продольной и поперечной волн получено в [1]. В нашем случае оно имеет вид

$$|\bar{u}^*| = \sqrt{\frac{1}{K_1 \rho(z) a^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{x}} A_1(\theta_1) \tau_1; \quad |\bar{v}^*| = \sqrt{\frac{1}{K_2 \rho(z) b^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{x}} A_2(\theta_2) \tau_2, \quad (4)$$

где

$$K_{1,2} = \sqrt{\frac{\frac{1}{C_{1,2}^2(0)} - \lambda_{1,2}^2}{\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2}} \sqrt{\frac{\bar{v}^3 R''[t_0(\theta_1)]}{R''[t_0(\theta_1)] \bar{v}^3 - \int_0^z \frac{dz}{C_{1,2}^2(z) \left[\frac{1}{C_{1,2}^2(z)} - \lambda_{1,2}^2 \right]^{3/2}}}}. \quad (5)$$

Для составляющих смещения на фронтах волн имеем

$$u_1 = |\bar{u}^*| \cos \theta_{1,0} = |\bar{u}^*| \frac{a(z)}{a(0)} \cos \theta_1, \quad u_2 = |\bar{u}^*| \sin \theta_1 \Phi, \quad v_1 = |\bar{v}^*| \sin \theta_2 \Phi,$$

$$v_2 = -|\bar{v}^*| \frac{b(z)}{b(0)} \cos \theta_2.$$

Если подставить (4) в (1) получим уравнения для $A_1(\theta_1)$ и $A_2(\theta_2)$ при $z=0$

$$\left[a^2(0) - 2b^2(0) \cos^2 \theta_1 \right] \frac{A_1(\theta_1)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \frac{1}{\sqrt{\rho(0) a^2(0)}} -$$

$$- 2b^2(0) \frac{A_2(\theta_2)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \sqrt{\frac{1}{\rho(0) b^2(0)}} \sin \theta_2 \cos \theta_2 = \frac{P_1\{R[t_0(\theta_1)], t_0(\theta_1)\}}{\rho(0)}, \quad (6)$$

$$2 \frac{A_1(\theta_1)}{\sqrt{R[t_0(\theta_1)]}} \frac{1}{\sqrt{\rho(0)a^2(0)}} \cos \theta_1 \sin \theta_1 +$$

$$+ A_2(\theta_2) \frac{1}{\sqrt{\rho(0)b^2(0)}} (1 - 2\cos^2 \theta_2) = 0.$$

Решая (6) и подставляя смещения в закон Гука, получаем

$$\frac{\sigma_z}{p_1} = - \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right] \left[\frac{a^2(z)}{a^2(0)} - 2b^2(z)\frac{1}{v^2} \right] \frac{1}{b^2(0)}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \right\} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_1}},$$

$$\frac{\tau_{rz}}{p_1} = \frac{-2 \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{1}{v} \left[2\frac{1}{v^2} - \frac{1}{b^2(0)} \right] \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_1}}.$$

В случае жидкости, давление σ_z получим из (7) если множитель в фигурных скобках приравняем единице. Для однородного упругого тела выражения (7) получены автором в кандидатской диссертации (МГУ 1959). Если пренебречь продольной составляющей, имеем на поперечной волне:

$$\frac{\sigma_z}{p_1} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{4}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}} \sqrt{\frac{1}{K_2}}$$

$$\frac{\tau_{rz}}{p_1} = \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}} \frac{b^2(z)}{b^2(0)} \frac{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right] \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \frac{1}{v} \sqrt{\frac{R[t_0(\theta_1)]}{x}}}{\left[\frac{1}{b^2(0)} - 2\frac{1}{v^2} \right]^2 + 4\frac{1}{v^2} \sqrt{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{v^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2(0)} - \frac{1}{v^2}}} \sqrt{\frac{1}{K_2}}$$

Ս. Գ. Յագգուկ

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա. Մ' Փ Ո Փ Ո Ւ Մ'

Աշխատության մեջ քննարկվում է հարվածային ալիքի թափանցումը առաձգական անհամասեռ կիսատարածության մեջ: Ալիքների տարածման արագությունը մակերեսի վրա ընդունվում է ավելի մեծ, քան նրանց տարածումը երկաթական ուղղությամբ: Արդյիսի ենթադրության դեպքում որոշվում են առաձգական լարումների տեղորդ երկաթական և լալնական առաձգական ալիքների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Скуридин Г. А. и Гвоздев А. А. О краевых условиях для скачков. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 2, 1958.