

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Ц. Гяуни

К теории динамической устойчивости слоистых
анизотропных пологих оболочек

Рассматривается нелинейная задача динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек, собранных из нечетного числа однородных ортотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки.

Линейная задача динамической устойчивости пологих однослойных оболочек исследована в работах многих авторов [1, 4, 8, 9]. Общие вопросы нелинейной теории динамической устойчивости упругих систем разработаны В. В. Болотиным, им же решены две конкретные нелинейные задачи динамической устойчивости изотропных пластин [1].

Известно [1], что линейная теория динамической устойчивости дает исчерпывающий ответ о расположении областей динамической неустойчивости в предположении, что начальное равновесное безмоментное состояние отождествляется с недеформированным состоянием оболочки. В противном случае области неустойчивости следует определить не из уравнений линейной теории, а из линейного приближения уравнений нелинейной теории, которые будут содержать коэффициенты при нелинейных членах и будут совпадать с уравнениями линейной теории только в том случае, если начальное состояние принимается недеформированным. В настоящей работе мы безмоментное состояние примем как недеформированное и для границ областей неустойчивости будем брать их обычные значения [1]. Однако, беспредельное возрастание амплитуд в областях динамической неустойчивости, предсказываемое линейной теорией, в экспериментальных исследованиях не наблюдается. Наоборот, с увеличением амплитуд колебаний скорости их изменения постепенно уменьшаются и получается процесс установления колебаний с почти постоянной амплитудой. Причиной этого являются нелинейные факторы, которые для пологих оболочек включают в себя в первую очередь большие прогибы. Поэтому, для исследования процесса установления колебаний и определения амплитуд установившихся колебаний, необходимо исходить из уравнений нелинейной теории оболочек [1].

1. Пусть x и y являются криволинейными, ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки. Считаем, что геометрия срединной поверхно-

сти оболочки совпадает с геометрией плоскости и главные кривизны k_x и k_y при дифференцировании ведут себя как постоянные.

Известно, что ортотропные материалы обладают тремя плоскостями упругой симметрии. Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала каждого слоя будет параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две — перпендикулярны к координатным линиям $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

Имеем следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$k_x N_1 + k_y N_2 + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q - m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь m^* — приведенная масса, которая в случае симметрично собранных слоистых оболочек имеет вид

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n \gamma_m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right],$$

где γ_m — удельный вес m -го слоя, δ_m — расстояние m -го слоя от срединной поверхности оболочки, которая одновременно является срединной поверхностью среднего $(n+1)$ -го слоя [3], q — внешняя, нормально приложенная к срединной поверхности, нагрузка.

Эти уравнения получены из обычных уравнений равновесия нелинейной теории [2] путем добавления инерционных членов, причем тангенциальные силы инерции не учитываются.

Для усилий и моментов имеем [3]

$$N_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2, \\ N_2 = C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2, \\ S = C_{66} \omega_2, \quad (1.3)$$

и

$$M_1 = D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2, \\ M_2 = D_{12} \kappa_1 + D_{22} \kappa_2, \\ H = D_{66} \tau, \quad (1.4)$$

где

$$C_{ik} = 2 \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right],$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} \gamma_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\gamma_m^3 - \gamma_{m+1}^3) \right]; \quad (1.5)$$

$$B_{11}^m = \frac{E_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad (1.6)$$

$$B_{12}^m = \frac{\mu_1^m E_2^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m} = \frac{\mu_2^m E_1^m}{1 - \mu_1^m \mu_2^m}, \quad B_{66}^m = G_{xy}^m.$$

Для деформации срединной поверхности имеем [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ w &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ z_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \tau &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которые должны удовлетворять следующему уравнению неразрывности [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Представляя усилия N_1 , N_2 и S посредством функции напряжений $\varphi = \varphi(x, y, t)$ следующим образом

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (1.10)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (1.1). На основании (1.8), (1.7) и (1.10) из уравнений (1.2) и (1.9) получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{2} L(w, w) + \\ + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} -$$

$$- L(w, \varphi) - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - q(x, y, t) + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1.12)$$

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad (1.13)$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

В системе (1.11) заменив $q(x, y, t)$ выражением [1]

$$q = N_1^0(x, y, t) z_1 + N_2^0(x, y, t) z_2, \quad (1.14)$$

получим уравнения динамической устойчивости

$$a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{2} L(w, w) +$$

$$+ k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - L(w, \varphi) -$$

$$- k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N_1^0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.15)$$

где N_1^0 и N_2^0 силы, характеризующие начальное безмоментное состояние, которые для простоты принимаются не зависящими от x и y .

2. Решение системы (1.15) ищем в виде

$$\varphi(x, y, t) = \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(t) \varphi_{mn}(x, y), \quad (2.1)$$

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t) w_{mn}(x, y).$$

Представим $\varphi_{mn}(x, y)$ и $w_{mn}(x, y)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента и может быть представлена в виде линейных комбинаций фундаментальных функций поперечных колебаний балок, заведомо удовлетворяющих только двум граничным условиям на каждом краю оболочки

$$\varphi_{mn}(x, y) = X_n(x) Y_m(y), \quad (2.2)$$

$$w_{mn}(x, y) = U_n(x) V_m(y).$$

Уравнения (1.15) в вариационной записи принимают вид:

$$\begin{aligned} & \iint \left[a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} L(w, w) + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \varphi \, dx \, dy = 0, \\ & \iint \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \right. \\ & \left. - L(w, \varphi) - k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + N_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta w \, dx \, dy = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вариациями функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ будут:

$$\delta \varphi = \sum_m \sum_n \varphi_{mn} \delta \Phi_{mn}, \quad (2.4)$$

$$\delta w = \sum_m \sum_n w_{mn} \delta f_{mn}.$$

Используя произвольность вариации $\delta \Phi_{mn}$ и δf_{mn} и ортогональность фундаментальных функций, из (2.3) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \iint \left[\Phi_{mn} \left(a_{22} \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial x^4} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial y^4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} f_{mn}^2 L(w_{mn}, w_{mn}) + f_{mn} \left(k_x \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2} \right) \right] \varphi_{mn} \, dx \, dy = 0, \\ & \iint \left[f_{mn} \left(D_{11} \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4} \right) - \right. \\ & \left. - \Phi_{mn} f_{mn} L(w_{mn}, \varphi_{mn}) - \Phi_{mn} \left(k_x \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + f_{mn} N_1^0 \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial x^2} + f_{mn} N_2^0 \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + m^* \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} w_{mn} \right] w_{mn} \, dx \, dy = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После подстановки (2.2) в систему (2.5) и интегрирования, получим дифференциальное уравнение

$$f_{mn} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{N_1^0}{N_{1n}^{mn}} - \frac{N_2^0}{N_{2n}^{mn}} \right) f_{mn} - e_{mn} f_{mn}^2 + d_{mn} f_{mn}^3 = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 &= \frac{I_2 \dot{I}_2}{m^* I_0 I_1} + \frac{\dot{I}_1}{m^* I_0}, \\ N_{1n}^{mn} &= \frac{I_2 \dot{I}_2}{I_1 I_4} + \frac{\dot{I}_1}{I_4}, \quad N_{2n}^{mn} = \frac{I_2 \dot{I}_2}{I_1 I_5} + \frac{\dot{I}_1}{I_5}, \\ e_{mn} &= \frac{\dot{I}_2 \dot{I}_3 + I_2 \dot{I}_3}{m^* I_0 I_1}, \quad d_{mn} = \frac{I_3 \dot{I}_3}{m^* I_0 I_1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$I_1 = \iint \left[a_{22} X_n^{IV} Y_m + (a_{33} + 2a_{32}) X_n^* Y_m^* + a_{11} X_n Y_m^{IV} \right] X_n Y_m dx dy,$$

$$I_2 = - \iint (k_x U_n V_m + k_y U_n^* V_m) X_n Y_m dx dy,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \iint |U_n^* V_m U_n V_m - (U_n^* V_n)^2| X_n Y_m dx dy,$$

$$I_4 = \iint |D_{11} U_n^{IV} V_m + 2(D_{12} + 2D_{33}) U_n^* V_m^* + D_{22} U_n V_m^{IV}| X_n Y_m dx dy,$$

$$I_5 = \iint (X_n Y_m^* U_n^* V_m - 2X_n^* Y_m^* V_m U_n^* + X_n^* Y_m U_n V_m^*) U_n V_m dx dy, \quad (2.8)$$

$$I_6 = - \iint (k_x X_n Y_m^* + k_y X_n^* Y_m) U_n V_m dx dy,$$

$$I_7 = \iint U_n^* V_m U_n V_m dx dy,$$

$$I_8 = \iint U_n V_m^* U_n V_m dx dy,$$

$$I_9 = \iint U_n^2 V_m^2 dx dy.$$

3. Из уравнения (2.6), принимая $f_{mn} = A \sin \omega t$ и $N_1^0 = N_2^0 = 0$, для нелинейной частоты собственных колебаний (ω_{mn}) получим выражение:

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 - e_{mn} f_{mn} + d_{mn} f_{mn}^2. \quad (3.1)$$

Принимая $N_1^0 = \text{const}$, $N_2^0 = \text{const}$ и $f_{mn} = \text{const}$, из (2.6) можно получить также нелинейные критические значения действующих сил при их статическом действии. Аналогичные задачи для однослойных, изотропных, шарнирно-опертых оболочек решены О. Д. Ониашвили [4].

Наконец, исходя из уравнения (2.6), можно описать хлопок оболочки при действии нагрузки со стороны выпуклости [2], однако в настоящей работе этот вопрос не исследуется.

4. В частном случае, когда прямоугольная в плане ($a \times b$) оболочка радиально оперта по четырем краям, из (2.7) получим

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{m^*} \left[\frac{(k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)^2}{a_{22} \lambda_n^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \mu_m^4} + D_{11} \lambda_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + D_{22} \mu_m^4 \right], \quad (4.1)$$

$$N_{1*}^{mn} = -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[\frac{(k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)^2}{a_{22} \lambda_n^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \mu_m^4} + D_{11} \lambda_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + D_{22} \mu_m^4 \right], \quad (4.2)$$

$$N_{2*}^{mn} = -\frac{1}{\mu_m^2} \left[\frac{(k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)^2}{a_{22} \lambda_n^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \mu_m^4} + D_{11} \lambda_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + D_{22} \mu_m^4 \right], \quad (4.3)$$

$$e_{mn} = \frac{16}{m^* ab} \frac{\lambda_n \mu_m (k_y \lambda_n^2 + k_x \mu_m^2)}{a_{22} \lambda_n^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \mu_m^4}, \quad (4.4)$$

$$d_{mn} = \frac{512}{9} \frac{1}{m^* a^2 b^2} \frac{\lambda_n^2 \mu_m^2}{a_{22} \lambda_n^4 + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \mu_m^4}, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_m = \frac{m\pi}{b}. \quad (4.6)$$

5. Принимая [1]

$$N_1^0 = N_{10} + N_{1t} \cos \theta t, \quad (5.1)$$

$$N_2^0 = N_{20} + N_{2t} \cos \theta t,$$

уравнение (2.6) можно привести к виду:

$$f_{mn}^* + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \theta t) f_{mn} - e_{mn} f_{mn}^2 + d_{mn} f_{mn}^3 = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{N_{10} N_{2*}^{mn} + N_{20} N_{1*}^{mn}}{N_{1*}^{mn} N_{2*}^{mn}} \right), \quad (5.3)$$

$$\mu_{mn} = \frac{1}{2} \frac{N_{1t} N_{2*}^{mn} + N_{2t} N_{1*}^{mn}}{N_{1*}^{mn} N_{2*}^{mn} - N_{10} N_{2*}^{mn} - N_{20} N_{1*}^{mn}} \quad (5.4)$$

Условно предполагая [1], что силы сопротивления имеют вид $R_{mn}(f_{mn})f_{mn}$, и вводя их в уравнение (5.2), получим

$$\ddot{f}_{mn} + R_{mn}(f_{mn})\dot{f}_{mn} + \Omega_{mn}^2(1 - 2\mu_{mn}\cos\theta t)f_{mn} - e_{mn}\dot{f}_{mn}^2 + d_{mn}\dot{f}_{mn}^3 = 0. \quad (5.5)$$

Ограничиваясь первым членом разложения $R_{mn}(f_{mn})$ в ряд Тейлора из уравнения (5.5) получим

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu\cos\theta t)f - ef^2 + df^3 = 0, \quad (5.6)$$

где ε характеризует затухание системы в первом приближении.

Здесь индексы m и n опущены, поскольку уравнение (5.5) идентично для всех форм колебаний.

6. Переходим к вычислению амплитуд установившихся колебаний.

Известно [1], что уравнение (5.6) можно написать таким образом, чтобы его "линейная" часть допускала периодическое решение:

$$f'' + 2\varepsilon_* f' + \Omega_*^2(1 - 2\mu\cos\theta t)f + V(f, f', t) = 0, \quad (6.1)$$

где

$$V(f, f', t) = -ef^2 + df^3 + (\Omega^2 - \Omega_*^2)(1 - 2\mu\cos\theta t)f + 2(\varepsilon - \varepsilon_*)f', \quad (6.2)$$

$$\Omega_* = \Omega \frac{\theta}{\theta_*}, \quad \varepsilon_* = \varepsilon \frac{\theta}{\theta_*}, \quad (6.3)$$

θ^* — критическая частота.

Используя метод Мандельштама [1, 5], уравнение (6.1) можно привести к следующей системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dz_1}{dt} + F_1(z_1, z_2, t) = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{dz_2}{dt} - \varepsilon_* z_2 + F_2(z_1, z_2, t) = 0,$$

где

$$z_1 = x_1 \psi_{11} + x_2 \psi_{21}, \quad (6.5)$$

$$z_2 = x_1 \psi_{12} + x_2 \psi_{22};$$

$$F_1(z_1, z_2, t) = \psi_{21} V(x_1, x_2, t), \quad (6)$$

$$F_2(z_1, z_2, t) = \psi_{22} V(x_1, x_2, t);$$

$$x_1 = f, \quad x_2 = f'; \quad (6.7)$$

$$\psi_{11} = 2\varepsilon_* \varphi(-t) - \frac{d\varphi(-t)}{dt}, \quad \psi_{12} = -\frac{d\varphi(-t)}{dt}, \quad (6.8)$$

$$\psi_{21} = \varphi(-t), \quad \psi_{22} = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ — функция Матье [6].

Уравнение (6.4) можно решить методом последовательных приближений. Однако для практических целей достаточно и нулевое приближение, которое определяется из условий

$$\begin{aligned} z &= C, \\ z &= 0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где C — амплитуда нулевого приближения, для определения которой из условия периодичности решений* системы (6.4) получим

$$\int_0^T F_1(C, 0, t) dt = 0, \quad (6.10)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[-eC^2 \ddot{\varphi}^2(t) + dC^2 \dot{\varphi}^2(t) + (\Omega^2 - \Omega_*^2)(1 - 2\mu \cos \theta t) C \dot{\varphi}(t) + \right. \\ \left. + 2(z - z_*) C \frac{d\varphi(t)}{dt} \right] \varphi(-t) dt = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из условия (6.11) для амплитуд установившихся колебаний в нулевом приближении, помимо тривиального корня $C=0$, получим следующие выражения для главной области неустойчивости соответственно для верхнего и нижнего предела:

а) при $z=0$

$$C = \frac{2\Omega}{\sqrt{3d}} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1\right)(1 \mp \mu)}, \quad (6.12)$$

где

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2(1 \mp \mu); \quad (6.13)$$

в) при $z \neq 0$

$$C = \frac{2\Omega}{\sqrt{3d}} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\theta_*^2} - 1\right)\left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{\theta^2 z^2}{\Omega^2}}\right)}, \quad (6.14)$$

где

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2 \left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{4z^2}{\Omega^2}}\right). \quad (6.15)$$

Отметим, что формулы (6.12) — (6.15) по внешнему виду идентичны с соответствующими формулами для пластин. Кривизны срединной поверхности входят в формулы (6.12) — (6.15) через величины Ω и μ . Отсюда мы замечаем, что четные степени функции f не влияют ни на установление колебаний, ни на величину установившихся амплитуд. К аналогичному результату приводят и другие методы нахождения периодических решений уравнения (6.1).

* Решения системы (6.4) если периодичны, то имеют период $T = \frac{2\pi}{\theta}$ или $2T$

Следует отметить, что выкладки П. 6 предполагают слабую нелинейность системы, неспособную существенно изменять гармонический характер движения. На основе этого строится решение, не обеспечивающее постоянства энергии системы для любого мгновения, но соответствующее постоянству энергии в среднем за период. Этим и объясняется отсутствие влияния четких нелинейных членов на величину установившихся амплитуд [11]. Поэтому исследование переключения для динамического процесса становится невозможным.

7. В качестве числового примера рассмотрим трехслойную фанерную оболочку [7], характерные размеры срединной поверхности которой суть: $a=b=10$ м, $R=40$ м.

Пусть оболочка состоит из двух продольных (наружных) и одного поперечного слоев. Общая толщина фанеры $h=0,09$ м, толщина каждого слоя $\delta_0=0,03$ м. Расчетные толщины $\delta_1=\delta_3=0,045$ м и $\delta_2=0,015$ м. Удельный вес фанеры $\gamma=800$ кг/м³.

Упругие характеристики каждого слоя приведены в нижеследующей таблице:

	E_1^m (кг/см ²)	E_2^m	G_{12}^m	μ_{12}^m	μ_{21}^m
I и III слои	120000	6000	4800	0,6	0,03
II слой	6000	120000	4800	0,03	0,6

На основании приведенных данных из (1.5) и (1.13) получаем

$$a_{11}=0,249658 \text{ м/кг}, \quad D_{11}=70200 \text{ кг. м},$$

$$a_{22}=0,133817 \text{ м/кг}, \quad D_{22}=6210 \text{ кг. м},$$

$$a_{12}=0,010385 \text{ м/кг}, \quad D_{12}=2160 \text{ кг. м},$$

$$a_{00}=2,380952 \text{ м/кг}, \quad D_{00}=2970 \text{ кг. м}.$$

Допустим, на оболочку действуют равномерная нагрузка $q_0=100$ кг/м² и пульсирующая нагрузка $q_1 \cos \theta t = 200 \cos \theta t$ кг/м². Исходное безмоментное напряженное состояние будет характеризоваться силами $N_1^0=0$ и $N_2^0=Rq$. Используя формулы (4.1)–(4.7), (5.1), (5.3) и (5.4) в случае основного тона колебаний ($m=n=1$), для величин Ω_{11}^2 и μ_{11} получаем значения $\Omega_{11}^2=374,014$ 1/сек² и $\mu_{11}=0,1446$ кг/м.

Из-за отсутствия определенных данных, затуханием системы не будем интересоваться.

Из формулы (6.13) для нижней и верхней границ главной области неустойчивости получим значения:

$$(\theta_*)_{\text{ниж.}} = 1279,753 \text{ 1/сек}^2 \text{ и}$$

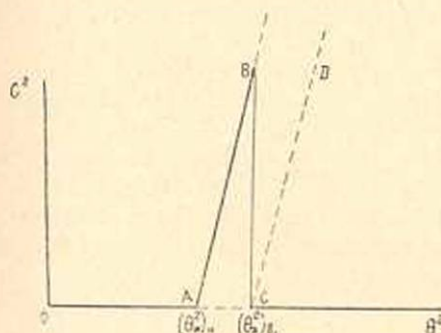
$$(\theta_*)_{\text{верхн.}} = 1712,358 \text{ 1/сек}^2.$$

Амплитуды установившихся колебаний для главной области неустойчивости получаются в виде (фиг. 1):

$$I. (C^2) \text{ ниж.} = (0,119947 \, \Omega^2 - 155,661579) 10^{-3} \, \text{м}^2,$$

$$II. (C^2) \text{ верх.} = (0,119947 \, \Omega^2 - 205,392205) 10^{-3} \, \text{м}^2.$$

Исходя из формулы (6.14), легко убедиться, что при наличии затухания затягивание колебаний возможно лишь для частот, не превышающих $\Omega^2 = \frac{\mu^2 \Omega^4}{\varepsilon^2} [1, 10]$.



Фиг. 1.

Как видно из чертежа, нулевое решение нелинейной системы устойчиво всюду, за исключением областей возбуждения линейной системы. В области возбуждения AC вместо неограниченного возрастания амплитуд получается процесс установления колебаний по линии AB, соответствующий решению I; что касается решения II, то оно неустойчиво [10].

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. С. А. Амбарцумяну за постановку задачи и за руководство.

Институт математики и механики
АН Арианской ССР

Поступила 2 X 1959

д. с. Գեղ. Գր.

ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգաժամ գիտարկվում է փոքր կորույթյան շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների դինամիկ կայունության ոչ գծային խնդիրը:

Խնդրի հիմնական հավասարումն ստացվում է որպես երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում, որի գծային մասը իրենից ներկայացնում է Մատրի հալանի հավասարումը:

Օգտագործելով Լ. Ի. Մանդելշտամի մեթոդը, հաշվված են կայունացված ամպլիտուդները անկայունության տիրույթներում: Պարզվում է, որ հավասարման ոչ գծային մասի մեջ մտնող զույգ աստիճանի անդամները ոչ մի ազդեցություն չունեն կայունացման երևույթի վրա: Բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТЛ, М., 1956.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
3. Амбарцумян С. А. Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН АрмССР, т. V, № 6, 1952.
4. Окиашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, 1957.
5. Макдильштам Л. И. Полное собрание трудов. Изд. АН СССР, М., 1947.
6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функции Матье. ИЛ, М., 1953.
7. Амбарцумян С. А. Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Изв. АН АрмССР, т. IV, № 5, 1951.
8. Хачатурян Т. Т. Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. Сб. тр. Ер.ПИ, № 4, 1950.
9. Марков А. И. Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. ПММ, т. XIII, в. 2, 1949.
10. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1948.
11. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, М., 1957.