

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

Термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом ползучести материала

В настоящей работе рассматривается термонапряженное состояние бетонных блоков, имеющих форму длинной полосы прямоугольного поперечного сечения и цилиндра, лежащих на сплошном упругом основании. Задача рассматривается как в предположении упругой работы материала, так и с учетом ползучести. При этом принимается гипотеза, обобщающая гипотезу плоских сечений. Касательные напряжения, возникающие в контакте блока и основания, принимаются пропорциональными соответствующим перемещениям. Для простоты рассмотрен тот случай, когда температура изменяется произвольным образом только по толщине блока и зависит от времени.

Обзор литературы о температурных напряжениях в бетонных блоках можно найти в работе [1].

§ 1. Термо-упругое напряженное состояние прямоугольного бетонного блока (полосы)

1°. Рассмотрим упругое напряженное состояние бетонного прямоугольного блока высотой $2h$, длиной $2a$, шириной $2b$, лежащего на сплошном упругом основании (фиг. 1), вызванное температурным воздействием, меняющимся по высоте и по времени. При этом принимается, что $\frac{h}{b}$ и $\frac{b}{a}$ меньше $\frac{1}{4}$. Вследствие разности механических свойств материалов блока (бетон) и основания (старый бетон, скала, грунт и т. д.) в продольном и поперечном направлениях контакта возникают касательные напряжения. Эти напряжения обозначим через $\tau_x(x, y)$, $\tau_y(x, y)$, а перемещения в соответствующих направлениях — через $u(x, y)$, $v(x, y)$.

При решении задачи будем полагать [1, 2, 3], что

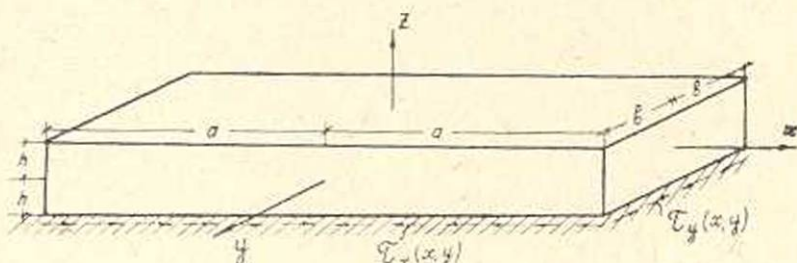
$$\begin{aligned}\tau_x(x, y) &= \beta u(x, y), \\ \tau_y(x, y) &= \beta v(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

где β — коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта и имеющий размерность кг/см^2 .

Обозначая перемещения произвольной точки блока по x и y соответственно через $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ и пренебрегая $\varepsilon_z(x, y, z)$, для компонентов нормальных напряжений имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + \nu \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}, \\ \sigma_y(x, y, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} + \nu \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}\end{aligned}\quad (2),$$

где E — модуль упругости бетона, ν — коэффициент Пуассона, α_1 — коэффициент температурного расширения, а $T(z)$ — температурная функция.



Фиг. 1.

Принимаем:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = A(x, y) + B(x, y)z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = C(x, y) + D(x, y)z,$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ и $D(x, y)$ — неизвестные функции переменных x и y .

Написав условия равновесия части блока ($x \leq \xi \leq a$, $y \leq \eta \leq b$, $-h \leq z \leq h$), сделав ряд преобразований и пренебрегая компонентами $\sigma_x(x, y, z)$ и $\sigma_y(x, y, z)$ получим:

$$\begin{aligned}\int_{-h}^h \sigma_x(x, y, z) dz + \int_x^a \tau_x(x, y) dx &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_y(x, y, z) dz + \int_y^b \tau_y(x, y) dy &= 0, \\ \int_{-h}^h \sigma_x(x, y, z) z dz - h \int_x^a \tau_x(x, y) dx &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\int_{-h}^h \sigma_y(x, y, z) z dz - h \int_y^b \tau_y(x, y) dy = A$$

$$\int_{-h}^h \tau_{xz}(x, y, z) dz = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{yz}(x, y, z) dz = 0.$$

2°. Из соотношений (2), (3), (4) следует

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \int_x^a \tau_x(x, y) dx - \nu \int_y^b \tau_y(x, y) dy \right\},$$
(5)

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \int_y^b \tau_y(x, y) dy - \nu \int_x^a \tau_x(x, y) dx \right\},$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) dz, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\alpha_1}{2h^2} \int_{-h}^h T(z) z dz.$$
(6)

Подставляя значения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ из (1) в (5) и принимая $z = -h$, получим

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \varepsilon - \lambda^2 \int_x^a u(x, y) dy + \nu \lambda^2 \int_y^b v(x, y) dy,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \varepsilon - \lambda^2 \int_y^b v(x, y) dy + \nu \lambda^2 \int_x^a u(x, y) dx,$$
(7)

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\beta}{Eh}}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) \left(1 - \frac{3z}{h}\right) dz.$$
(8)

Систему интегро-дифференциальных соотношений (7) можно привести к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \lambda^2 (1 - \nu^2) u,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda^2 (1 - \nu^2) v,$$
(9)

со следующими граничными условиями

$$u = \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \quad \text{при } y = b$$
(10)

$$v = \frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \quad \text{при } x = a \quad (11)$$

$$u = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (12)$$

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \quad \text{при } x = a \quad (14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \quad \text{при } y = b \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (17)$$

Причем (12) и (13) написаны из условия симметрии.

Система дифференциальных уравнений (9) разбивается на два самостоятельных уравнения вида:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \lambda^4 (1 - \nu^2) u = 0. \quad (18)$$

Итак, окончательно, поставленная задача формулируется так: определить функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ в прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (18) и краевым условиям (10)–(17).

3°. По методу Г. А. Гринберга [4] решение уравнения (18) ищем в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \Phi_n(x), \quad (19)$$

где $\Phi_n(x)$ — решения дифференциального уравнения

$$\Phi''(x) + \alpha_n^2 \Phi(x) = 0,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(a) = 0.$$

Они имеют вид:

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \alpha_n x, \quad (20)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (21)$$

Умножая (18) на $\Phi_n(x)$, интегрируя по x от нуля до a , учитывая преобразование

$$\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Phi_n(x) dx = \varepsilon \Phi_n(a) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] - \alpha_n^2 \int_0^a u(x, y) \Phi_n(x) dx$$

и значение

$$u_n(y) = \int_0^a u(x, y) \Phi_n(x) dx, \quad (22)$$

вытекающее из разложения (19), получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции:

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} - \gamma_n^2 u_n = - \frac{(1+\nu) \varepsilon \lambda^2 \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2}, \quad (23)$$

где

$$\gamma_n^2 = \frac{\alpha_n^2 + (1-\nu^2) \lambda^2}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \lambda^2. \quad (24)$$

Граничные условия полученного уравнения следуют из (22), (16) и (10)

$$u_n(y) = \frac{\varepsilon \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \quad \text{при } y = b \quad (25)$$

$$\frac{du_n}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Решая дифференциальное уравнение (23) при краевых условиях (25), получим:

$$u_n(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\varepsilon (-1)^{n+1}}{(\alpha_n^2 + \lambda^2) \gamma_n^2} \left\{ (1+\nu) \lambda^2 + \left[\gamma_n^2 - (1+\nu) \lambda^2 \right] \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right\} \quad (26)$$

В, наконец, из (19), (20) и (26) будем иметь

$$u(x, y) = \frac{2\varepsilon}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha_n^2 + \lambda^2) \gamma_n^2} \left\{ (1+\nu) \lambda^2 + \left[\gamma_n^2 - (1+\nu) \lambda^2 \right] \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right\} \sin \alpha_n x. \quad (27)$$

Из (24) следует

$$\lambda \sqrt{1-\nu^2} \leq \gamma_n \leq \lambda \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Принимая $\gamma_n = \lambda$, из (27) получим

$$u(x, y) = \frac{2\varepsilon}{a} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \sin \alpha_n x. \quad (28)$$

Разлагая функцию $\operatorname{sh} \lambda x$ в ряд Фурье по системе функции $\{\sin \alpha_n x\}$, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \sin \alpha_n x = \frac{a}{2\lambda} \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}. \quad (29)$$

Итак,

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon}{\lambda} \left[1 + \gamma \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}. \quad (30)$$

Принимая $\gamma_{in} = \lambda / \sqrt{1 - \gamma^2}$ получим

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon}{(1 - \gamma)\lambda} \left[1 - \gamma \frac{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{1 - \gamma^2} y}{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{1 - \gamma^2} b} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}. \quad (31)$$

Легко убедиться, что расхождения между полученными верхними и нижними оценками $u(x, y)$ весьма незначительны.

Из (1), (2), (5), (30) и аналогичных выражений, получаемых для $v(x, y)$, имеем:

$$\begin{aligned} \tau_x(x, y) &= \frac{\beta \varepsilon}{\lambda} \left[1 + \gamma \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a}, \\ \tau_y(x, y) &= \frac{\beta \varepsilon}{\lambda} \left[1 + \gamma \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \gamma} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \varepsilon_1 T(z) \right] - \\ &- \frac{E \varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left[1 + \gamma \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y, z) &= \frac{E}{1 - \gamma} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z - \varepsilon_1 T(z) \right] - \\ &- \frac{E \varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left[1 + \gamma \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda a} \right) \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} \right). \end{aligned}$$

Написав условия равновесия бесконечно малого элемента блока и пренебрегая $\tau_{xy}(x, y, z)$, находим

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z) &= \int_z^h \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dz, \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= \int_z^h \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} dz. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (33) в (34), получим значения касательных напряжений в произвольной точке блока

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 + \frac{3z}{h} \right) \tau_x(x, y), \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 + \frac{3z}{h} \right) \tau_y(x, y). \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрируя первое уравнение (5) от нуля до x и используя условие $U(0, y, z) = 0$, будем иметь

$$U(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) x - \\ - \frac{1}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \int_0^x \left\{ \int_0^a \tau_x(x, y) dx + \nu \int_0^b \tau_y(x, y) dy \right\} dx.$$

Подставляя здесь значения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ из (32), получим

$$U(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) x - \\ - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(x - \frac{\text{sh}\lambda x}{\lambda \text{ch}\lambda a}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] - \nu x \right\}. \quad (36)$$

Аналогично, из второго уравнения (5) имеем

$$V(x, y, z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) y - \\ - \frac{\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(y - \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] - \nu y \right\}; \quad (37)$$

4°. При равномерном распределении температуры в блоке из (32), (33), (36) и (37) следует

$$\tau_x(x, y) = \frac{\beta z_1 T_0}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] \frac{\text{sh}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}, \\ \tau_y(x, y) = \frac{\beta z_1 T_0}{\lambda} \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] \frac{\text{sh}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}. \quad (38)$$

$$\varepsilon_x(x, y, z) = -\frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right), \\ \varepsilon_y(x, y, z) = -\frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 + \nu \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right). \quad (39)$$

$$U(x, y, z) = z_1 T_0 x - \\ - \frac{1}{4} E z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(x - \frac{\text{sh}\lambda x}{\lambda \text{ch}\lambda a}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda y}{\text{ch}\lambda b}\right)\right] - \nu x \right\}; \\ V(x, y, z) = z_1 T_0 y - \\ - \frac{1}{4} z_1 T_0 \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left\{ \left(y - \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}\right) \left[1 + \nu(1 + \nu) \left(1 - \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{ch}\lambda a}\right)\right] - \nu y \right\}. \quad (40)$$

Из выражения нормальных напряжений (39) вытекает, что

$$z_0 = \frac{1}{3} h$$

является уравнением нейтральной плоскости блока.

При данных значениях x и y нормальные напряжения по величине в нижнем крае блока в два раза больше, чем на верхнем. Наибольших значений эти напряжения в горизонтальных направлениях достигают при $x = 0$, $y = 0$. Наибольшие напряжения $\tau_x(x, y)$ и $\tau_y(x, y)$ достигаются соответственно при $x = a$ и $y = b$.

Горизонтальные перемещения точки нейтральной плоскости суть

$$U\left(x, y, \frac{1}{3}h\right) = \alpha_1 T_0 x, \quad V\left(x, y, \frac{1}{3}h\right) = \alpha_1 T_0 y.$$

§ 2. Термонапряженное состояние прямоугольного бетонного блока (полосы) с учетом ползучести

1°. В постановке задачи, аналогичной предыдущему параграфу, исследуем напряженное состояние прямоугольного блока с учетом ползучести бетона. Принимаем следующее условие на контакте

$$\begin{aligned} \tau_x^*(x, y, t) &= \beta u^*(x, y, t), \\ \tau_y^*(x, y, t) &= \beta v^*(x, y, t). \end{aligned} \quad (41)$$

Связь между деформациями и напряжениями имеет следующий вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(t)}{\partial x} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_x^*(t) - \nu \sigma_y^*(t)] - \\ &\quad - \int_0^t [\sigma_x^*(\tau) - \nu \sigma_y^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \\ \frac{\partial V^*(t)}{\partial y} &= \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_y^*(t) - \nu \sigma_x^*(t)] - \\ &\quad - \int_0^t [\sigma_y^*(\tau) - \nu \sigma_x^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (42)^*$$

где

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

$$E(\tau) = E_0 [1 - e^{-\alpha \tau}], \quad \varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0,$$

E — модуль мгновенной деформации бетона при $t \rightarrow \infty$, α , C_0 , A_1 и γ — параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

Взамен (3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, y, z, t)}{\partial x} &= A^*(x, y, t) + B^*(x, y, t)z, \\ \frac{\partial V^*(x, y, z, t)}{\partial y} &= C^*(x, y, t) + D^*(x, y, t)z. \end{aligned} \quad (43)$$

* Здесь компоненты напряжений и перемещений являются функциями также от x, y, z , а температурная функция — от z , но для краткости записи эти аргументы опущены.

Выпишем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^h \tau_x^*(t) dz + \int_x^a \tau_x^*(t) dx &= 0, \\
 \int_{-h}^h \tau_y^*(t) dz + \int_y^b \tau_y^*(t) dy &= 0, \\
 \int_{-h}^h \sigma_x^*(t) z dz - h \int_x^a \tau_x^*(t) dx &= 0, \\
 \int_{-h}^h \sigma_y^*(t) z dz - h \int_y^b \tau_y^*(t) dy &= 0, \\
 \int_{-h}^h \tau_{xz}^*(t) dz &= 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{yz}^*(t) dz = 0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

После некоторых преобразований из (44), используя (42) и (43), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U^*(t)}{\partial x} &= \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left\{ \int_x^a \left[\frac{\tau_x^*(t)}{E(t)} - \right. \right. \\
 &- \left. \left. \int_{\tau}^t \tau_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dx + \nu \int_y^b \left[\frac{\tau_y^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau}^t \tau_y^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dy \right\},
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^*(t)}{\partial y} &= \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)z - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \left\{ \int_y^b \left[\frac{\tau_y^*(t)}{E(t)} - \right. \right. \\
 &- \left. \left. \int_{\tau}^t \tau_y^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dy + \nu \int_x^a \left[\frac{\tau_x^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau}^t \tau_x^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dx \right\}.
 \end{aligned}$$

Принимая в (45) $z = -h$ и учитывая (41), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u^*(t)}{\partial x} &= \varepsilon(t) - \nu^2(t) \int_x^a \left[u^*(t) - \int_{\tau}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dx + \\
 &+ \nu^2(t) \int_y^b \left[v^*(t) - \int_{\tau}^t v^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dy,
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\frac{\partial v^*(t)}{\partial y} = z(t) - \lambda^2(t) \int_y^b \left[v^*(t) - \int_{\tau_0}^t v^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dy + \\ + \lambda^2(t) \int_x^a \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] dx.$$

Система (46) приводится к системе двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 v^*(t)}{\partial x \partial y} = (1 - \gamma^2) \lambda^2(t) \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right] \quad (47) \\ \frac{\partial^2 v^*(t)}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x \partial y} = (1 - \gamma^2) \lambda^2(t) \left[v^*(t) - \int_{\tau_0}^t v^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right].$$

Полученную систему уравнений будем решать приближенно. Принимая в (47) $\gamma = 0$, получим два самостоятельных уравнения для $u^*(t)$ и $v^*(t)$ (выписываем только одно из них):

$$\frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial x^2} = \lambda^2(t) \left[u^*(t) - \int_{\tau_0}^t u^*(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau \right]. \quad (48)$$

2°. Двукратным дифференцированием уравнения (48) по t , после некоторых преобразований, приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 u^*(t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 u^*(t)}{\partial x^2 \partial t} - \lambda^2(t) \frac{\partial^2 u^*(t)}{\partial t^2} - \lambda^2(t) m(t) \frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = 0, \quad (49)$$

где

$$m(t) = \gamma [1 + z(t) E(t)] - \frac{E'(t)}{E(t)}. \quad (50)$$

Из условия симметрии имеем

$$u^*(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (51)$$

В первом уравнении (46), принимая $x = a$ и $\gamma = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial x} = z(t) \quad \text{при } x = a. \quad (52)$$

Принимая в первом уравнении (48) $t = \tau_0$, получим

$$\frac{\partial^2 u^*(\tau_0)}{\partial x^2} - \lambda^2(\tau_0) u^*(\tau_0) = 0.$$

Решение последнего уравнения при граничных условиях

$$u^*(x, \tau_0) = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$\frac{\partial u^*(x, \tau_0)}{\partial x} = \varepsilon(\tau_0) \quad \text{при } x = a$$

имеет вид

$$u^*(x, \tau_0) = \frac{\varepsilon(\tau_0)}{\lambda(\tau_0)} \frac{\operatorname{sh} \lambda(\tau_0) x}{\operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a} \quad (53)$$

Подставляя $t = \tau_0$ в выражение, полученное из дифференцирования по t уравнения (48), получим

$$\left. \frac{\partial^2 u^*(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right|_{t=\tau_0} - \lambda^2(\tau_0) \left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_0} - \lambda^2(\tau_0) \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) u^*(x, \tau_0) = 0.$$

Решая это неоднородное дифференциальное уравнение при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial x} \right|_{t=\tau_0} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u^*(x, t)}{\partial x \partial t} \right|_{t=\tau_0} = \varepsilon'(\tau_0) \quad \text{при } x = a,$$

получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial t} \right|_{t=\tau_0} = & \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) \lambda(\tau_0) x \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a}{(\lambda^2 \tau_0) \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a} \\ & - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) [1 + \lambda(\tau_0) a \operatorname{th} \lambda(\tau_0) a] \operatorname{sh} \lambda(\tau_0) x - 2 \varepsilon'(\tau_0) \operatorname{sh} \lambda(\tau_0) a}{2 \lambda(\tau_0) \operatorname{ch} \lambda(\tau_0) a}. \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения (49) при краевых (51), (52) и начальных условиях (53), (54).

Решая уравнения (49) по методу Г. А. Гринберга [4] при краевых и начальных условиях (51)–(54), будем иметь

$$u^*(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t)}{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \sin a_n x, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} u_n^*(t) = & \varepsilon(\tau_0) + \left[\varepsilon'(\tau_0) - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \varepsilon(\tau_0) \lambda^2(\tau_0)}{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \right] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau + \\ & + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma_n(\xi) d\xi} \frac{a_n^2 + \lambda^2(\tau_0)}{a_n^2 + \lambda^2(\xi)} [\varepsilon''(\xi) + \gamma \varepsilon'(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (56)$$

$$a_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (57)$$

$$\gamma_n(t) = \frac{\gamma x_n^2 + m(t)\lambda^2(t)}{x_n^2 + \lambda^2(t)}. \quad (58)$$

3°. Подставляя (55) в (41), находим

$$\tau_x^*(x, t) = \frac{2\beta}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t)}{x_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \sin x_n x. \quad (59)$$

Принимая в первом уравнении (45) $\gamma = 0$, подставляя выражение $\frac{\partial U^*}{\partial x}$ в первое уравнение (42), и преобразуя, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(t)} \left\{ \tau_x^*(t) + \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(t) dx \right\} = z_1(t) + z_2(t)z - z_1 T(t) + \\ + \int_{\tau_0}^t \left\{ \tau_x^*(\tau) + \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(\tau) dx \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Решая полученное интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра, находим

$$\begin{aligned} \tau_x^*(x, z, t) = L^* [z_1(t) + z_2(t)z - z_1 T(t) - \\ - \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_x^a \tau_x^*(x, t) dx], \end{aligned} \quad (60)$$

где L^* —следующий оператор:

$$\begin{aligned} L^*[Q(t)] = E(\tau_0) Q(\tau_0) + [Q'(\tau_0) - \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) Q(\tau_0)] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau + \\ + \int_{\tau_0}^t E(\tau) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} [Q'(\xi) + \gamma Q'(\xi)] d\xi, \\ \gamma(t) = \gamma [1 + \varphi(t) E(t)]. \end{aligned}$$

Подстановка (59) в (60) дает

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(x, z, t) = L^* [z_1(t) + z_2(t)z - z_1 T(z, t) - \\ - \frac{\beta}{ah} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t)}{x_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \frac{\cos x_n x}{\alpha_n}]. \end{aligned} \quad (61)$$

По формуле

$$\tau_{xz}^*(t) = \int_z^h \frac{\partial \sigma_x^*(t)}{\partial x} dz$$

и (61) определяем компоненты касательных напряжений

$$\tau_{xz}^*(x, z, t) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau_x^*(x, t). \quad (62)$$

Используя разложения (29), легко показать, что при $t = \tau_0$ упруго-мгновенные решения и решения с учетом ползучести совпадают.

4°. В частном случае, когда $T(z, t) = T_0 = \text{const}$, формула (61) принимает следующий вид

$$\tau_x^*(x, z, t) = -\frac{2}{ah} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} u_n^*(t) \cos z_n x}{z_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \frac{z_n}{z_n}, \quad (63)$$

где

$$u_n^*(t) = \tau_0 T_0 \left[1 - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) (1 - e^{-\gamma_n(t-\tau_0)})}{z_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \frac{1}{\gamma_n} \right] \quad (64)$$

Причем в выражении γ_n принято

$$E(t) \approx \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t E(\tau) d\tau = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\gamma_0 t} - e^{-\gamma_0 t}}{\gamma(t - \tau_0)} \right],$$

$$\gamma(t) \approx \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t \gamma(\tau) d\tau = C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{\tau_0}}{t - \tau_0}. \quad (65)$$

Вид формул (59) и (62) остается неизменным, но под $u_n^*(t)$ понимается выражение (64). Из (62)–(64) следует, что компоненты напряжения в блоке по величине монотонно убывают, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к своим минимальным значениям.

5°. Здесь рассмотрен тот случай, когда распределение температуры в блоке меняется лишь по высоте. Однако вышесказанным путем легко можно получить решение и в том случае, когда имеем симметричное, относительно горизонтальных осей, распределение температуры. В таком случае к правым частям уравнений (9) и (47) соответственно прибавляются члены

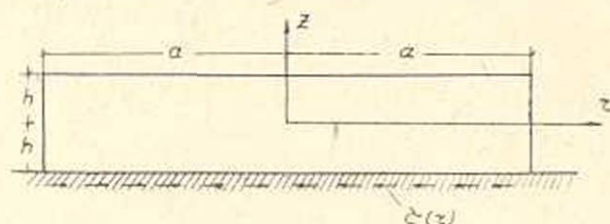
$$(1 + \nu) \frac{\partial \varepsilon(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1 + \nu) \frac{\partial \varepsilon(x, y, t)}{\partial y}.$$

Общий ход решения этой более общей задачи остается неизменным.

§ 3. Термо-упругое напряженное состояние круглого бетонного блока

1°. В этом параграфе рассматриваем напряженное состояние круглого бетонного блока (фиг. 2) высотой $2h$, радиусом $r = a$, лежащего на сплошном упругом основании, вызванное температурным воздействием $T = T(z, t)$, меняющимся по высоте и по времени. При таком законе распределения температуры возникающие в блоке тем-

пературные деформации будут осесимметричны, и, следовательно, компоненты напряжения и деформации не зависят от полярного угла.



Фиг. 2.

В основании блока возникают радиальные тангенциальные напряжения $\tau(r)$, которые будут препятствовать свободным температурным деформациям. Полагаем

$$\tau(r) = \beta u(r), \quad (66)$$

где $u(r)$ — радиальные перемещения точки основания блока.

Пренебрегая компонентом $\sigma_z(r, z)$, для остальных нормальных компонентов напряжения будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U(r, z)}{\partial r} + \nu \frac{U(r, z)}{r} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}, \\ \sigma_z(r, z) &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{U(r, z)}{r} + \nu \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha_1 T(z)}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (67)$$

Для поставленной осесимметричной задачи вводим гипотезу: коаксиальные круговые цилиндрические поверхности до деформации превращаются в коаксиальные круговые конические поверхности в течение деформации, т. е.

$$\frac{\partial U(r, z)}{\partial r} = A(r) + B(r)z, \quad (68)$$

где $A(r)$ и $B(r)$ — неизвестные пока функции от r .

Написав условия равновесия части блока ($r < \xi < a$, $-\varphi < \theta < \varphi$, $-h < z < h$) и сделав некоторые упрощения, получим уравнения равновесия блока в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_r^a \int_{-h}^h \sigma_r(r, z) r dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_r(r, z) dz + \int_r^a \tau(r) r dr &= 0, \\ \int_r^a \int_{-h}^h \sigma_z(r, z) z dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_z(r, z) z dz - h \int_r^a \tau(r) r dr &= 0, \\ \int_{-h}^h \tau_r(r, z) dz &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Из условия равновесия элемента блока $zrdrd\varphi$ находим

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_z^h \left[\frac{\partial \sigma_r(r, z)}{\partial r} + \frac{\sigma_r(r, z) - \sigma_\varphi(r, z)}{r} \right] dz. \quad (70)$$

2°. Интегрируя (68) при краевом условии

$$U(0, z) = 0, \quad (71)$$

получим

$$U(r, z) = \int_0^r [A(r) + B(r)z] dr. \quad (72)$$

Из (67), (68) и (69) следует уравнение

$$\int_r^a \left\{ \nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} - (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) \right\} dr + r \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + \nu \frac{U}{r} - (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) \right\} + \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_r^a \tau(r) r dr = 0. \quad (73)$$

Дифференцируя полученное уравнение по r , приходим к неоднородному дифференциальному уравнению Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} - U = \frac{1-\nu^2}{2Eh} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) r^2 \tau(r). \quad (74)$$

выражающему зависимость между радиальными перемещениями произвольной точки блока $U(r, z)$ и касательными напряжениями $\tau(r)$, действующими в контакте.

Принимая в (73) $r = a$, наряду с (71), получим второе краевое условие

$$\left(r \frac{\partial U}{\partial r} + \nu U \right)_{r=a} = (1+\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) a. \quad (75)$$

Принимая в (74) $z = -h$ и учитывая допущение (66), приходим к уравнению Бесселя

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} - (1 + \lambda^2 r^2) u = 0, \quad (76)$$

причем

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(1+\nu)\beta}{Eh}}.$$

Решение дифференциального уравнения (76) при краевых условиях

$$u(0) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u}{\partial r} + \nu u \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon a,$$

вытекающее из (71) и (75) при $z = -h$, имеет вид

$$u(r) = \frac{(1 + \nu) a \varepsilon I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)}, \quad (77)$$

где $I_1(x)$ — бесселевы функции первого порядка от мнимого аргумента.

Согласно принятой гипотезе (68) $U(r, z)$ является линейной функцией от z . Следовательно, изрядом с $U(r, -h) = u(r)$ наличие второго значения $U(r, z_0) = u_0(r)$ полностью определяет функцию $U(r, z)$. Принимая в (74) $z = \frac{1}{3} h$, получим однородное уравнение Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_0}{\partial r} - u_0 = 0.$$

Решая полученное уравнение при краевых условиях

$$u_0(0) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu u_0 \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon_0 a,$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1}{2h} \int_{-h}^h T(z) \left(1 + \frac{z}{h} \right) dz,$$

находим

$$u_0(r) = \varepsilon_0 r. \quad (78)$$

Тогда решение исходного уравнения (74) будет

$$U(r, z) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) r + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{(1 + \nu) a \varepsilon I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)}. \quad (79)$$

3°. Подставляя выражение перемещения $U(r, z)$ из (79) в (67), получим компоненты нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = \frac{E}{1 - \nu} & \left[\frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) - \alpha_1 T(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{\lambda r I_0(\lambda r) - (1 - \nu) I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right], \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = \frac{E}{1 - \nu} & \left[\frac{3}{4} \varepsilon_0 \left(1 + \frac{z}{h} \right) - \alpha_1 T(z) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \frac{\lambda r I_0(\lambda r) + (1 - \nu) I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1 - \nu) I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right]. \end{aligned}$$

Из (66) и (77) следует

$$\tau(r) = \frac{(1+\nu)2\alpha z I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \quad (81)$$

Используя полученные формулы (80) или (67), из (70) получим

$$\tau_{rz}(r, z) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau(r). \quad (82)$$

Заметим, что при $r \rightarrow 0$ из (80) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_z(0, z) = \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{3}{4} z_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) - \right. \\ \left. - z_1 T(z) + \frac{1}{8} z \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \frac{(1+\nu)\lambda a z}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \right], \end{aligned} \quad (83)$$

причем при раскрытии встречающихся неопределенностей использованы правила Лопиталя.

4°. В частном случае, когда $T(z) = T_0 = \text{const.}$ формулы (79), (80), (81) напишутся в виде

$$U(r, z) = z_1 T_0 \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) r + \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \frac{(1+\nu)a I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \right], \quad (84)$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{1}{4} \frac{E z_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{\lambda r I_0(\lambda r) - (1-\nu)I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right],$$

$$\sigma_z(r, z) = -\frac{1}{4} \frac{E z_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{\lambda r I_0(\lambda r) + (1-\nu)I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \frac{a}{r} \right], \quad (85)$$

$$\tau(r) = \frac{(1+\nu)2\alpha z_1 T_0 I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \quad (86)$$

При $r \rightarrow 0$ из (83) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) = \sigma_z(0, z) = \\ = -\frac{1}{4} \frac{E z_1 T_0}{1-\nu} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\lambda a}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu)I_1(\lambda a)} \right]. \end{aligned} \quad (87)$$

Из (85) следует, что в рассматриваемом случае нейтральная плоскость блока определяется уравнением

$$z_0 = \frac{1}{3} h.$$

Анализируя формулы (84)–(87) заключаем, что $z_1(r, z)$ отлична от нуля везде в блоке, кроме нейтральной плоскости, а $\sigma_r(r, z)$ обращается в нуль как в указанной плоскости, так и в торцах блока $r=a$. По радиусу максимальные нормальные напряжения по величине достигаются при $r=0$. От центра вплоть до торцов эти напряжения монотонно уменьшаются. По высоте блока величины обеих компонент напряжения в два раза больше на основании, чем на верхнем крае. Как следует из (82) и (86), касательное напряжение по высоте достигает своего наибольшего значения при $z = -h$, а по радиусу — при

$r = a$. На нейтральной плоскости радиальные перемещения определяются формулой

$$U\left(r, \frac{1}{3} h\right) = \alpha_1 T_0 r.$$

Ниже приведены некоторые числовые значения касательных и нормальных компонент напряжения для основания блока при $h = \frac{1}{4} a = 1$ м, $\beta = 100$ кг/см³, $E = 1,1366$ кг/см², $\nu = \frac{1}{6}$.

Таблица 1

Значение $\tau(r)$, $\sigma_r(r, -h)$ и $\sigma_\varphi(r, -h)$, вычисленное по (85)–(87).

r/a	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$\frac{\tau(r)}{E\alpha_1 T_0}$	0,0000	0,0425	0,0905	0,1503	0,2301
$\frac{(1-\nu)\sigma_r(r, -h)}{E\alpha_1 T_0}$	0,5273	0,4995	0,4124	0,2534	0,0000
$\frac{(1-\nu)\sigma_\varphi(r, -h)}{E\alpha_1 T_0}$	0,5273	0,5143	0,4735	0,4009	0,2884

§ 4. Термонапряженное состояние круглого бетонного блока с учетом ползучести

1°. Задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, решим теперь с учетом свойства ползучести материала. Подобно предыдущим предположениям, в контакте блока и его основании будем полагать

$$\tau^*(r, t) = \beta u^*(r, t). \quad (88)$$

Зависимость между компонентами напряжения и деформации в произвольной точке блока $[\sigma_z^*(r, z, t) \approx 0]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} = & \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_r^*(t) - \nu \sigma_\varphi^*(t)] - \\ & - \int_0^t [\sigma_r^*(\tau) - \nu \sigma_\varphi^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\sigma}(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \frac{U^*(t)}{r} = & \alpha_1 T(t) + \frac{1}{E(t)} [\sigma_\varphi^*(t) - \nu \sigma_r^*(t)] - \\ & - \int_0^t [\sigma_\varphi^*(\tau) - \nu \sigma_r^*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\epsilon}(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично гипотезе о деформируемости круглых блоков, введенной в предыдущем параграфе, примем

$$\frac{\partial U^*(r, z, t)}{\partial r} = A^*(r, t) + B^*(r, t) z, \quad (90)$$

где $A^*(r, t)$ и $B^*(r, t)$ — неизвестные функции от r и t .

Уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\int_r^a \int_{-h}^h \varepsilon_r^*(t) dr dz + r \int_{-h}^h \varepsilon_r^*(t) dz + \int_r^a \tau_{rz}^*(t) r dr = 0, \quad \int_{-h}^h \tau_{rz}^*(t) dz = 0.$$

$$\int_r^a \int_{-h}^h \sigma_r^*(t) z dr dz + r \int_{-h}^h \sigma_r^*(t) z dz - h \int_r^a \tau_{rz}^*(t) r dr = 0. \quad (91)$$

Для касательного напряжения, аналогичным образом, получим формулу

$$\tau_{rz}^*(t) = \int_z^h \left[\frac{\partial \sigma_r^*(t)}{\partial r} + \frac{\sigma_r^*(t) - \sigma_z^*(t)}{r} \right] dz, \quad (92)$$

Интегрируя (90) при условии

$$U^*(0, z, t) = 0, \quad (93)$$

будем иметь

$$U^*(r, z, t) = \int_0^r [A^*(r, t) + B^*(r, t) z] dr. \quad (94)$$

Из (89), (90), (91) и (94) следует

$$\int_r^a \left\{ \nu \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} + \frac{U^*(t)}{r} - \right.$$

$$\left. - (1 + \nu) [\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) z] \right\} dr + r \left\{ \frac{\partial U^*(t)}{\partial r} + \nu \frac{U^*(t)}{r} - \right.$$

$$\left. - (1 + \nu) [\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) z] \right\} +$$

$$+ \frac{1 - \nu^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \int_r^a \left\{ \frac{\tau^*(t)}{E(t)} - \int_{-h}^h \tau^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right\} r dr = 0. \quad (95)$$

После дифференцирования по r приводим его к виду

$$r^2 \frac{\partial^2 U^*(r, z, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial U^*(r, z, t)}{\partial r} - U^*(r, z, t) =$$

$$= \frac{1 - \nu^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) r^2 \left\{ \frac{\tau^*(r, t)}{E(t)} - \int_{-h}^h \tau^*(r, z) \frac{\partial}{\partial z} \delta(t, z) dz \right\}. \quad (96)$$

Наряду с (93) из (95), принимая $r=a$, получим второе краевое условие

$$\left(r \frac{\partial U^*}{\partial r} + \nu U^* \right)_{r=a} = (1 + \nu) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) a. \quad (97)$$

Для основания блока уравнение (96) принимает вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 u^*(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial u^*(r, t)}{\partial r} - u^*(r, t) = \\ = \alpha^2(t) r \left[u^*(r, t) - \int_0^t u^*(r, \tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (98)$$

Краевые условия для полученного интегро-дифференциального уравнения следуют из (93) и (97)

$$u^*(0, t) = 0$$

$$\left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} + \nu u^* \right)_{r=a} = (1 + \nu) \varepsilon a. \quad (99)$$

2. Можно получить решение уравнения (98), приводя его к дифференциальным уравнениям четвертого порядка в частных производных, как это делалось в § 2 для соответствующего уравнения прямоугольного блока. Но здесь проведем решение несколько иным, и, как нам кажется, более эффективным путем.

Подставляя в уравнение (98)

$$u^*(r, t) = \Phi(r) \Psi(t)$$

и разделяя переменные, находим

$$\begin{aligned} \frac{r^2 \Phi''(r) + r \Phi'(r) - \Phi(r)}{r^2 \Phi(r)} = \\ = \frac{\alpha^2(t) \left[\Psi(t) - \int_0^t \Psi(\tau) E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau \right]}{\Psi(t)} = -\alpha^2, \end{aligned}$$

где α^2 — неопределенная, пока, положительная постоянная.

Решение уравнения

$$r^2 \Phi''(r) + r \Phi'(r) + [\alpha^2 r^2 - 1] \Phi(r) = 0 \quad (100)$$

при краевых условиях

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \\ a \Phi'(a) + \nu \Phi(a) &= 0, \end{aligned} \quad (101)$$

имеет вид

$$\Phi_n(r) = C_n J_1 \left(\frac{\rho_n}{a} r \right), \quad (102)$$

где $\rho_n = \alpha_n a$ — положительные корни уравнения

$$\rho J_1'(\rho) + \nu J_1(\rho) = 0, \quad (103)$$

Для удобства C_n выберем так, чтобы система собственных функций $\{\Phi_n(r)\}$ была нормированной, т. е.

$$C_n^2 = \frac{2 \left(\frac{\rho_n}{a} \right)^2}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) J_1^2(\rho_n)} \quad (104)$$

Решение (98) будем искать в виде ряда Дини [6]

$$u^*(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Phi_n(r), \quad (105)$$

где

$$u_n(t) = \int_0^a r u^*(r, t) \Phi_n(r) dr. \quad (106)$$

Видоизменяя уравнение (98), умножая члены обеих частей на $\Phi_n(r)$, интегрируя по r от нуля до a , сделав преобразование и используя (99), (100), (101), (106), приходим к следующему интегральному уравнению второго рода типа Вольтерра

$$u_n(t) = \frac{(1 + \nu) a \Phi_n(a) \varepsilon(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)} + \int_{\tau_0}^t u_n(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_n(t, \tau) d\tau, \quad (107)$$

где

$$\Omega_n(t, \tau) = \frac{E(t) \lambda^2(t) \vartheta(t, \tau)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)}.$$

Уравнение (107) преобразованием и двукратным дифференцированием приводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + \gamma_n(t) \frac{du_n(t)}{dt} = \frac{(1 + \nu) a \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)} [\varepsilon''(t) + \gamma_n'(t)], \quad (108)$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{\gamma \alpha_n^2 + m(t) \lambda^2(t)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(t)}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_n(\tau_0) &= \frac{(1 + \nu) a \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \varepsilon(\tau_0), \\ u_n'(\tau_0) &= \frac{(1 + \nu) a \Phi_n(a)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \left[\varepsilon'(\tau_0) - \frac{\gamma \tau_0 E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0)}{\alpha_n^2 + \lambda^2(\tau_0)} \varepsilon(\tau_0) \right]. \end{aligned} \quad (109)$$

Решая уравнение (108) при условиях (109) и подставляя найденное значение $u_n(t)$ в (105), будем иметь

$$u^*(r, t) = 2(1 + \nu) a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1\left(\frac{\rho_n}{a}\right)}. \quad (110)$$

где

$$u_n^*(t) = z(\tau_0) + \left[z'(\tau_0) - \frac{\gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2} \right] \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau + \\ + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_n(\tau) d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma_n(\xi) d\xi} \frac{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\xi) a^2} [z''(\xi) + \gamma z'(\xi)] d\xi. \quad (111)$$

Для определения радиального перемещения в произвольной точке $U^*(r, z, t)$ поступим так, как это сделали в предыдущем параграфе при определении $U(r, z)$. Принимая в (96), (93), (97) $z = -h$ и обозначая $U^*\left(r, \frac{1}{3}h, t\right) = u_0^*(r, t)$, получим однородное уравнение Эйлера

$$r^2 \frac{\partial^2 u_0^*(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_0^*(r, t)}{\partial r} - u_0^*(r, t) = 0,$$

при краевых условиях

$$u_0^*(0, t) = 0,$$

$$\left(r \frac{\partial u_0^*}{\partial r} + \gamma u_0^* \right)_{r=a} = (1 + \gamma) \varepsilon_0 a,$$

решение которого имеет вид

$$u_0^*(r, t) = \varepsilon_0(t) r. \quad (112)$$

Тогда

$$U^*(r, z, t) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \varepsilon_0(t) r + \\ + \frac{(1 + \gamma) a}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{[\rho_n^2 - 1 + \gamma^2] [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1\left(\frac{\rho_n}{a}\right)}. \quad (113)$$

3°. Для определения нормальных компонент напряжений над исходить из соотношений (89). Непосредственная подстановка $U^*(r, z, t)$ из (113) в (89) приводит к более сложным выражениям. Поэтому при помощи уравнения (107) формуле (113) дадим следующий вид

$$U^*(r, z, t) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \varepsilon_0(t) r + \frac{(1 + \gamma) z(t) a}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(a) \Phi_n(r)}{z_n^2} - \\ - \frac{\gamma(1 - \gamma^2)}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(r)}{a_n^2} \left[\frac{u_n(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t u_n(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \gamma(t, \tau) d\tau \right]. \quad (114)$$

Разлагая r в ряд Дини по системе функций $\{\Phi_n(r)\}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(a) \Phi_n(r)}{x_n^2} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{r}{a}. \quad (115)$$

Подставляя значения ряда (115) в (114), а последнего в первое уравнение (42) и делая некоторые перестановки, получим интегральное уравнение Вольтерра

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, z, t) + \frac{\beta}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n'(r) + \frac{\nu}{r} \Phi_n(r)}{x_n^2} u_n(t) = \\ = \frac{E(t)}{1-\nu} \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] + \\ + E(t) \int_0^t \left[\sigma_r^*(r, z, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n'(r) + \frac{\nu}{r} \Phi_n(r)}{x_n^2} u_n(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

решение которого окончательно можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, z, t) = \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] - \\ - \frac{\beta a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) - \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n(t). \quad (116) \end{aligned}$$

Из второго уравнения (42) и (114)–(115) аналогичным путем получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^*(r, z, t) = \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha_1 T(z, t) \right] - \\ - \frac{\beta a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) + \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n(t). \quad (117) \end{aligned}$$

Остается определить $\sigma_{rz}^*(r, z, t)$. Из соотношений (42) и (96) следует

$$\frac{\partial \sigma_r^*(t)}{\partial r} + \frac{\sigma_z^*(t) - \sigma_r^*(t)}{r} = \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \tau^*(t), \quad (118)$$

где

$$\tau^*(r, t) = 2\beta a(1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2 u_n^*(t)}{(\rho_n^2 + 1 - \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1(\rho_n)} \quad (119)$$

Подставляя (118) в (92), находим

$$\tau_{rz}^*(r, z, t) = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 + \frac{3z}{h}\right) \tau^*(r, t).$$

Отметим, что последняя формула получается также из (116), (117) в (92).

При $r \rightarrow 0$ из (116) и (117) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(0, z, t) = \sigma_z^*(0, z, t) = & \frac{1}{1-\nu} L^* \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \varepsilon_0(t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \varepsilon(t) - \alpha T(z, t) \right] - \\ & - \frac{3a^2(1+\nu)^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{(\rho_n^2 + 1 - \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t). \end{aligned}$$

Разлагая $I_1(\lambda r)$ в ряд Дини по собственным функциям $\left\{ J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) \right\}$ и определяя значения интеграла

$$\int_0^r r I_1(\lambda r) J_1(\alpha_n r) dr = \frac{\lambda r I_0(\lambda r) J_1(\alpha_n r) - \alpha_n r J_0(\alpha_n r) I_1(\lambda r)}{\alpha_n^2 + \lambda^2},$$

по методу определения интегралов Ломелля, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho_n^2}{(\rho_n^2 + \lambda^2 a^2) (\rho_n^2 + 1 - \nu^2)} \frac{J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{J_1(\rho_n)} = \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda a I_0(\lambda a) - (1-\nu) I_1(\lambda a)} \quad (120)$$

Используя разложение (120), из (114), (116) и (117) заключаем, что при $t = \tau_0$ упруго-мгновенное решение (§ 3) и решение с учетом ползучести (§ 4) совпадают.

4°. В частном случае, когда $T(z, t) = T_0 = \text{const.}$ из (116), (117) и (111) следует

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^*(r, z, t) = \\ = -\frac{3a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) - \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 + 1 - \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t), \end{aligned}$$

$$\sigma_n^*(r, z, t) =$$

$$-\frac{3a^2(1+\nu)}{h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n J_0\left(\frac{\rho_n}{a} r\right) + \frac{1-\nu}{r} J_1\left(\frac{\rho_n}{a} r\right)}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t); \quad (121)$$

$$u_n^*(t) = \alpha_1 T_0 \left[1 - \frac{\gamma_0^2(\tau_0) E(\tau_0) \lambda^2(\tau_0) a^2}{\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2} \frac{1 - e^{-\gamma_n(t-\tau_0)}}{\gamma_n} \right]. \quad (122)$$

Причем при получении последней формулы использованы приближенные формулы (65).

Вид формулы (119) остается неизменным, но под $u_n^*(t)$ следует понимать (122).

При $r \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma_r^*(0, z, t) = \tau_z^*(0, z, t) =$$

$$-\frac{3a^2(1+\nu)^2}{2h} \left(1 - \frac{3z}{h}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{(\rho_n^2 - 1 + \nu^2) [\rho_n^2 + \lambda^2(\tau_0) a^2]} u_n^*(t).$$

Приведем результаты численных примеров для тех же значений параметров, использованных в § 3. Постоянные ползучести возьмем следующие: $\alpha = 0,03 \frac{1}{\text{день}}$, $\gamma = 0,026 \frac{1}{\text{день}}$, $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$, $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5} \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$ день, $\tau_0 = 28$ день.

Таблица 2

Величины затухания напряжения по формулам (119), (121) и (122)

r/t	$\frac{\tau_z^*(r, t)}{\tau_z^*(r, 28)}$			$\frac{\tau_r^*(r, -h, t)}{\tau_r^*(r, -h, 28)}$			$\frac{\tau_z^*(r, -h, t)}{\tau_z^*(r, -h, 28)}$		
	0	90	∞	60	90	∞	60	90	∞
0	—	—	—	0,7442	0,6873	0,6562	0,7442	0,6873	0,6562
a	0,7442	0,7048	0,6750	—	—	—	0,7477	0,6842	0,6528

5°. Здесь рассматривался случай, когда температура изменяется только по высоте блока и по времени. Аналогичным путем можно решить задачу и в тех случаях, когда температура меняется симметрично относительно оси блока. В таком случае в правых частях уравнений (76) и (98) прибавляется член

$$(1 + \nu) r^2 \frac{\partial^2 (r, z, t)}{\partial r^2},$$

а в остальном ход решения остается неизменным.

Некоторые задачи о термонапряженном состоянии бетонных блоков за пределом упругости рассмотрены в работах [7, 8].

Институт математики и
механики АН АрмССР

Поступило 20 IV 1957

Մ. Ա. Զադոյան

ԲԵՏՈՆԵ ԲԼՈԿՆԵՐԻ ԶԵՐՄԱՆԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԷՃԱԿԸ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաշվածում ասումնադրվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի և գլանի ձև ունեցող բետոնե բլոկների լարվածային վիճակը, երբ ջերմաստիճանը փոփոխվում է կամախականորեն՝ ըստ բարձրության և ժամանակի: Շոշափող լարումները, որոնք առաջանում են բլոկի և նրա հիմքի միացման մակերևույթում, քնդունված են (1—3) համեմատական հարկզոնական տեղափոխումներին:

Օգտագործելով հարթ հատվածքների քնդհանրացած հիպոթեզը, տրված են համասարակշռության հավասարումները ինակդրալ իմաստով, ինչպես զուտ առաձգական, այնպես էլ սողքի հաշվառման դեպքերում:

Մասնավորապես գլանաձև բլոկի դեպքում, սողքի հաշվառումով, խնդիրը բերվում է II կարգի ինակդրո-գիֆերենցիալ հավասարման (98), որի լուծումը տրվում է Դինիի շարքերի միջոցով (105):

Բերված են թվային օրինակներ հաստատուն ջերմաստիճանի դեպքի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольных блоках. Известия АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, т. 8, № 4, 1955.
2. Маслов Г. Н. Элементарные статические расчеты сооружений на температурные изменения. Известия НИИП, т. 26, 1940.
3. Ишлинский А. Ю. и Думанский А. В. О закономерностях растрескивания коры деревьев. ДАН СССР, т. 84, 1952.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, 1948.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести, 1952.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1 и 2, 1949.
7. Задоян М. А. Упруго-пластическое состояние прямоугольных бетонных блоков при равномерном распределении температуры. ДАН АрмССР, т. 23, № 5, 1956.
8. Задоян М. А. Об одной задаче предельного состояния бетонных блоков. ДАН АрмССР, т. 24, № 5, 1957.