ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ 10, № 1, 1957 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p

В работе [3] Д. Е. Меньшов доказал следующую теорему.

Теорема. Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который сходится по мере на $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$ и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Сходимость по мере к функции, которая может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры, Д. Е. Меньшов определяет следующим образом.

Последовательность конечных почти всюду на $[a, b]$ измеримых функций

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

сходится по мере на сегменте $[a, b]$ к измеримой функции $f(x)$, если почти всюду на $[a, b]$ выполняется равенство

$$f_n(x) = g_n(x) + \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $g_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ измеримы и конечны почти всюду на $[a, b]$, причем

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ и последовательность функций $\varphi_n(x)$ $n = 1, 2, \cdots$ сходится по мере к нулю на данном сегменте.

Д. Е. Меньшов дал также естественное определение верхнего и нижнего пределов по мере последовательности почти везде конечных измеримых функций $\{f_n(x)\}$, определенных на отрезке $[a, b]$ (см. [3], стр. 4).

*Измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$**,

* $F(x)$ может равняться бесконечности на множестве положительной меры.

есть верхний предел по мере на $[a, b]$ *последовательности* $\{f_n(x)\}$, *если* $F(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$a. \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \left\{E[f_n(x) > \varphi(x)]\cdot E[\varphi(x) > F(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$.

$$b. \limsup_{n\to\infty} \operatorname{mes} \left\{E[f_n(x) > \psi(x)]\cdot E[F(x) > \psi(x)]\right\} > 0$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$ *и такой, что* $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Функция $G(x)$, *определенная почти всюду на* $[a, b]$, *называется нижним пределом по мере на* $[a, b]$ *последовательности* $\{f_n(x)\}$, *если* $G(x)$ *измерима и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\alpha. \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \left\{E[f_n(x) < \tau(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\tau(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$.

$$\beta. \limsup_{n\to\infty} \operatorname{mes} \left\{E[f_n(x) < \chi(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\right\} = 0$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, *определенной почти всюду на* $[a, b]$ *и такой, что* $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Далее Д. Е. Меньшов показал, что если верхний и нижний пределы последовательности $\{f_n(x)\}$ совпадают с некоторой измеримой функцией $f(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на $[a, b]$ к этой функции и наоборот (см. [3], стр. 26—27).

Оказывается, что вышеуказанная теорема Д. Е. Меньшова о сходимости по мере тригонометрических рядов верна для любой системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций, определенных на некотором измеримом множестве $G\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, $p > 1$, а именно справедлива

Теорема 1. *Если* $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$, *то для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной на* G, *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

который сходится по мере на множестве G *к* $f(x)$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^*.$$

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\{\varphi_n(x)\}$ *система функций, определенных на*

---

* В частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ есть ортонормированный базис, теорема 1 сформулирована в заметке автора, опубликованной в ДАН СССР, 110, 4 (1956).

измеримом множестве $G \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}\, G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$, *то существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

у которого не все коэффициенты равны нулю и который сходится по мере на G *к нулю.*

При доказательстве этих теорем мы будем пользоваться другим определением сходимости по мере, которое эквивалентно определению, данному Д. Е. Меньшовым.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций сходится по мере на измеримом множестве $E_0 \subset G$, $\mathrm{mes}\, E_0 > 0$, к $+\infty$, если для любых, наперед заданных чисел $M > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить натуральное число $N(M, \varepsilon)$ такое, что при $n > N$ имеет место

$$\mathrm{mes}\, E_{(E_0)}[f_n(x) < M] < \varepsilon^*.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на множестве E_0 к $-\infty$, если последовательность $\{-f_n(x)\}$ сходится по мере на множестве E_0 к $+\infty$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная измеримая функция, определенная на множестве G. Пусть G_1, G_2, G_3 — множества тех точек на G, где $f(x)$ принимает, соответственно, конечные значения; значение $+\infty$ и значение $-\infty$.

Мы скажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций, определенных на G, сходится по мере на G к $f(x)$, если она сходится по мере к $f(x)$ на каждом из множеств G_1, G_2, G_3**.

Легко видеть, что в силу этого определения функция $f(x)$ будет одновременно верхним и нижним пределами по мере на множестве G последовательности $\{f_n(x)\}$*** (см. стр. 32). А это означает, что вышеуказанное определение сходимости по мере эквивалентно определению, данному Д. Е. Меньшовым.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Для этого понадобятся несколько лемм.

---

* Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на G, то мы будем обозначать через $E_{(E_0)}[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на E_0, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

Через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ будем обозначать множество всех точек из G, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

** Сходимость по мере на множестве G_1, где функция $f(x)$ принимает конечные значения, понимается в обычном смысле.

*** Понятия верхнего и нижнего пределов по мере Д. Е. Меньшов определил для отрезка $[a, b]$, но мы можем функции $f_n(x)$ и $f(x)$ положить равными нулю на $[0, 1] - G$, и тогда $f(x)$ будет одновременно верхним и нижним пределами по мере на $[0, 1]$ для $\{f_n(x)\}$.

§ 1. *Лемма* 1. *Пусть $\psi_0(x)$—произвольная функция, определенная на отрезке $\Delta \equiv (\alpha, \beta)$, принадлежащая классу $L_p(\Delta)$, $p>1$, и равная нулю вне некоторого множества E_0, $E_0 \subset \Delta$.*

Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ — произвольное конечное число функций, определенных на $\Delta \equiv (\alpha, \beta)$ и принадлежащих классу $L_q(\Delta)$, где

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда, для любых наперед заданных чисел $1>\varepsilon_0>0$ и $\varepsilon>0$, можно определить ограниченную функцию $f(x)$ и множество e, обладающие следующими свойствами:

1) $f(x)=0$ *при* $x \overline{\in} e$, *где* $e \subset E_0$ *и* $\operatorname{mes} e \leqslant \varepsilon_0 \cdot |\Delta|$;

2) $\displaystyle\int_\Delta |f(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}} \int_\Delta |\psi_0(x)|^p dx;$

3) $\displaystyle\left|\int_\Delta [\psi_0(x)-f(x)]\, \psi_k(x)\, dx\right| < \varepsilon,$

при $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Случай, когда $\psi_0(x)=0$ почти всюду на Δ, тривиален, так как тогда достаточно положить $f(x)\equiv 0$.

Пусть на некотором множестве положительной меры $\psi_0(x) \neq 0$. Разделим интервал Δ на N равных интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta$ и определим функции $\psi_i^{(N)}(x)$, $i=0, 1, \ldots, n$ следующим образом:

$$\psi_i^{(N)}(x)=\frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k} \psi_i(x)\, dx \quad x \in \Delta_k \tag{1.1}$$

$(k=1, 2, \ldots, N)$.

В силу того, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Delta |\psi_0(x)-\psi_0^{(N)}(x)|^p dx=0 \tag{1.2}$$

и

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Delta |\psi_i(x)-\psi_i^{(N)}(x)|^q dx=0 \ (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

(см. [1], стр. 12), и учитывая соотношение

$$\psi_0^{(N)}(x)\psi_i^{(N)}(x)-\psi_0(x)\psi_i(x)=\psi_0^{(N)}(x)[\psi_i^{(N)}(x)-\psi_i(x)]+\psi_i(x)[\psi_0^{(N)}(x)-\psi_0(x)],$$

получаем также

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\, dx=\int_\Delta \psi_0(x)\,\psi_i(x)\, dx \ (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

В самом деле, имеем

$$\left|\int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\, dx-\int_\Delta \psi_0(x)\,\psi_i(x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Delta |\psi_0^{(N)}(x)[\psi_i^{(N)}(x)-\psi_i(x)]|\,dx+\int_\Delta |\psi_i(x)[\psi_0^{(N)}(x)-\psi_0(x)]|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_\Delta|\psi_0^{(N)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Delta|\psi_i^{(N)}(x)-\psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\int_\Delta|\psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\cdot\left(\int_\Delta|\psi_0^{(N)}(x)-\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда, в силу (1.2) и (1.3), непосредственно следует (1.4), ибо, как легко видеть из (1.2), $\|\psi_0^{(N)}(x)\|$ равномерно ограничены для всех $N=1, 2, \ldots$.

Функции $f_N(x)$ определим следующим образом.

В центре каждого интервала Δ_k возьмем интервал длины $|\delta_k|=\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|$, $k=1, 2, \ldots, N$ и положим

$$f_N(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0|\Delta_k|}\displaystyle\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx & \text{при } x\in\delta_k\ (k=1, 2, \ldots, N),\\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,\displaystyle\sum_{k=1}^N\delta_k.\end{cases}\tag{1.5}$$

Легко видеть, что для любого $N=1, 2, \ldots$ имеет место неравенство:

$$\int_\Delta|f_N(x)|^p dx\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}}\int_\Delta|\psi_0(x)|^p dx.\tag{1.6}$$

В самом деле,

$$\int_\Delta|f_N(x)|^p\,dx=\sum_{k=1}^N\int_{\delta_k}\left|\frac{1}{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|}\cdot\int_{\Delta_k}\psi_0(x)dx\right|^p dx=$$

$$=\sum_{k=1}^N\frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\left|\int_{\Delta_k}\psi_0(x)dx\right|^p,$$

но

$$\left|\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx\right|\leqslant|\Delta_k|^{1/q}\left(\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\int_\Delta|f_N(x)|^p dx\leqslant\sum_{k=1}^N\frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\cdot|\Delta_k|^{p/q}\cdot\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^N\frac{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|\cdot|\Delta_k|^{p/q}}{\varepsilon_0^p\cdot|\Delta_k|^p}\cdot\int_{\Delta_k}|\psi_0(x)|^p\,dx=\frac{1}{\varepsilon_0^{p-1}}\int_\Delta|\psi_0(x)|^p\,dx.$$

Легко видеть также, что для любого N имеем:

$$\int_\Delta f_N(x)\psi_i^{(N)}(x)\,dx=\int_\Delta\psi_0^{(N)}(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx\tag{1.7}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

В самом деле,

$$\int_\Delta f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{\delta_k} f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{\delta_k}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|}\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{|\Delta_k|}\cdot\int_{\Delta_k}\psi_i^{(N)}(x)\,dx\right)\right]dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{|\delta_k|}{\varepsilon_0\cdot|\Delta_k|^2}\cdot\int_{\Delta_k}\psi_i^{(N)}(x)\,dx=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{|\Delta_k|}\int_{\Delta_k}\psi_0(x)\,dx\cdot\int_{\Delta_k}\psi_i^{(N)}(x)\,dx=$$

$$=\int_\Delta \psi_0^{(N)}(x)\cdot\psi_i^{(N)}(x)\,dx.$$

Из (1.4) и (1.7) вытекает:

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Delta f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx=\int_\Delta \psi_0(x)\,\psi_i(x)\,dx \tag{1.8}$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

С другой стороны, на основании (1.6) можно написать:

$$\left|\int_\Delta f_N(x)\,\psi_i^{(N)}(x)\,dx-\int_\Delta f_N(x)\,\psi_i(x)\,dx\right|\leqslant\left(\int_\Delta|f_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Delta|\psi_i^{(N)}(x)-\right.$$

$$\left.-\psi_i(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0^{\frac{p-1}{p}}}\cdot\left(\int_\Delta|\psi_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Delta|\psi_0^{(N)}(x)-\psi_i(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9), учитывая (1.3), получаем:

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Delta f_N(x)\,\psi_i(x)\,dx=\int_\Delta \psi_0(x)\,\psi_i(x)\,dx \tag{1.10}$$

$$(i=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Определим теперь функции $f_N^*(x)$ следующим образом:

$$f_N^*(x)=\begin{cases} f_N(x), & \text{при } x\in E_0\cdot\delta_k \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,N),\\ 0, & \text{при } x\,\overline{\in}\,E_0\cdot\sum\limits_{k=1}^{N}\delta_k.\end{cases} \tag{1.11}$$

Ясно, что

$$|f_N^*(x)|\leqslant|f_N(x)| \quad (x\in\Delta). \tag{1.12}$$

Из (1.5) и (1.11) имеем:

$$f_N(x)-f_N^*(x)=\begin{cases} f_N(x), & \text{при } x\in CE_0,\\ 0, & \text{при } x\in E_0.\end{cases} \tag{1.13}$$

Поэтому будем иметь:

$$\int_\Delta|f_N(x)-f_N^*(x)|^p\,dx=\int_{CE_0}|f_N(x)|^p\,dx. \tag{1.14}$$

Так как в силу (1.1) и (1.5) имеем

$$f_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}\psi_0^{(N)}(x), \text{ при } x \in \delta_k \ (k=1, 2, \ldots, N), \\ 0, \text{ при } x \overline{\in} \sum_{k=1}^{N} \delta_k, \end{cases} \tag{1.15}$$

то

$$|f_N(x)|^p \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^p} |\psi_0^{(N)}(x)|^p, \ (x \in \Delta).$$

Учитывая, что

$$\int_\Delta |\psi_0^{(N)}(x) - \psi_0(x)|^p \, dx \to 0, \quad \text{при } N \to \infty,$$

и что $\psi_0(x) = 0$ на CE_0 (см. условие леммы), получаем:

$$\int_{CE_0} |\psi_0^{(N)}(x)|^p \, dx \to 0, \quad \text{при } N \to \infty.$$

Так как

$$\int_\Delta |f_N(x) - f_N^*(x)|^p \, dx = \int_{CE_0} |f_N(x)|^p \, dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^p} \int_{CE_0} |\psi_0^{(N)}(x)|^p dx,$$

то

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta |f_N(x) - f_N^*(x)|^p \, dx = 0. \tag{1.16}$$

Из (1.10) и (1.16) получаем

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Delta f_N^*(x) \cdot \psi_i(x) \, dx = \int_\Delta \psi_0(x) \, \psi_i(x) \, dx \tag{1.17}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Выберем N_0 настолько большим, чтобы

$$\left| \int_\Delta f_{N_0}^*(x) \, \psi_i(x) \, dx - \int_\Delta \psi_0(x) \, \psi_i(x) \, dx \right| < \varepsilon \tag{1.18}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Легко видеть, что ограниченная функция $f(x) = f_{N_0}^*(x)$ и множество $e = \left(\sum_{k=1}^{N_0} \delta_k\right) E_0$ удовлетворяют условиям леммы 1. Условие 1 следует из (1.11) и из того, что $|\delta_k| = \varepsilon_0 |\Delta_k|$. Условие 2 следует из (1.6) и (1.12), а условие 3 следует из (1.18). Тем самым доказательство леммы закончено.

§ 2. *Лемма 2* (*основная*). *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций,* *определенных на измеримом множестве* $G \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $P > 1$.

Пусть $f(x) \in L_p(G)$ — *не эквивалентная нулю функция, равная нулю вне некоторого множества* $E_0 \subset G$*.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно определить функцию* $F(x) \in L_p(G)$ *и множество* e_0, *обладающие следующими свойствами:*

α) $F(x) = f(x)$ при $x \in ce_0 = G - e_0$, $e_0 \subset E_0$ и $\operatorname{mes} e_0 < \varepsilon$;

β) $|a_n| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, где числа a_n суть коэффициенты разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$;

γ) для любого множества $e \subset G - e_0$

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e, \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots,^{**}$$

где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ суть частные суммы разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

При доказательстве леммы 2 мы будем пользоваться следующими свойствами нормированных базисов пространства $L_p(G)$:

1) Произвольная функция $\psi(x) \in L_p(G)$, в смысле сходимости в среднем порядка P на множестве G, единственным образом представляется в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

При этом

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, чтобы какова бы ни была функция $\psi(x) \in L_p(G)$, для которой

$$\| \psi(x) \|_G = \left(\int_G |\psi(x)|^p dx \right)^{1/p} < \delta,$$

имело место неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon, \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots,$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ есть разложение функции $\psi(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Свойство 1) непосредственно следует из определения базисов и из того, что, по предположению, $\{\varphi_n(x)\}$ есть нормированный базис, т. е. $\| \varphi_n(x) \|_G = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

---

* В частности, может быть $E_0 = G$.

** $\| f(x) \|_e = \left(\int_e |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

В самом деле, так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ в $L_p(G)$ сходится к $\psi(x)$, то $\|a_n \varphi_n(x)\|_G = |a_n| \cdot \|\varphi_n(x)\|_G = |a_n| \to 0$, при $n \to \infty$.

Свойство 2) легко следует из известных свойств базисов в пространстве Банаха.

В самом деле, пусть E — пространство типа B с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$

Пусть E_1 — линейная система, элементами которой являются всевозможные числовые последовательности $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$, такие, что ряд $\Sigma \eta_i e_i$ сходится.

Введем в E_1 норму, полагая

$$\|y\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\|.$$

Тогда пространство E_1 будет пространством типа B ([2], стр. 221). Каждому $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in E$ соответствует единственный элемент $y_x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$. Обратно, каждому элементу $y = \{\eta_i\} \in E_1$ соответствует единственный элемент $x_y \in E$, а именно

$$x_y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i.$$

Таким образом, определен оператор $x = A_0 y$, взаимно-однозначно отображающий E_1 на E. Легко видеть, что оператор A_0 аддитивен. Кроме того, оператор A_0 ограничен, ибо

$$\|A_0 y\| = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \right\| \leqslant \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| = \|y\|.$$

Следовательно, A_0 есть линейный оператор, отображающий E_1 на E взаимно-однозначно.

По теореме Банаха существует обратный оператор $y = A_0^{-1} x$, который также является линейным ([2], стр. 223).

Выполнение свойства 2) непосредственно вытекает из ограниченности оператора A_0^{-1}. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, если $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|A_0^{-1}\|}$, то для любого $x \in E$, где $\|x\| < \delta$, будет иметь место неравенство:

$$\|y\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| = \|A_0^{-1}\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$ есть разложение элемента x по базису $e_1, e_2, \ldots$.

Прежде чем приступить к доказательству леммы 2, отметим еще один факт.

Существует последовательность $\{\psi_n(x)\}$ функций из $L_q(G)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, которая вместе с системой $\{\varphi_n(x)\}$ образует биортогональную систему, т. е.

$$\int_G \varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при } m=n, \\ 0, & \text{при } m\neq n \end{cases}$$

(см. [2], стр. 223, 224).

Таким образом, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x)\in L_p(G)$, то имеем:

$$a_n=\int_G f(x)\,\psi_n(x)\,dx.$$

Доказательство леммы 2. Функцию $f(x)$, фигурирующую в формулировке леммы 2, и функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x), \cdots$, образующие биортогональную систему с последовательностью $\{\varphi_n(x)\}$, положим равными нулю на множестве $[0,1]-G$. Пусть $0<\varepsilon<1$. Возьмем $\delta>0$ такое, что $\delta<\varepsilon$ и для любой функции $\psi(x)\in L_p(G)$, для которой $\|\psi(x)\|_G<\delta$, имеет место

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) \right\|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad (n=1,2,\cdots), \tag{2.1}$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$ есть разложение функции $\psi(x)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$, т. е. имеем:

$$a_i=\int_G \psi(x)\,\psi_i(x)\,dx \quad (i=1,2,\ldots).$$

Это всегда можно сделать в силу свойства 2) (стр. 38).

Из неравенства (2.1), в силу нормированности системы $\{\varphi_n(x)\}$, непосредственно следует, что для выбранного $\delta>0$ будет иметь место также неравенство:

$$|a_n|=\left|\int_G \psi(x)\,\psi_n(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что можно найти конечное число неперекрывающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, лежащих на $[0,1]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\operatorname{mes} \Delta_k \cdot G > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\operatorname{mes} G = \operatorname{mes} \left(\sum_{k=1}^{m} \Delta_k \right) G, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Delta_k} |f(x)|^p \, dx < \frac{\delta^{2p}}{2^{p+1}} \quad (k = 1, 2, \cdots, m). \tag{2.4}$$

Очевидно, для этого достаточно разделить отрезок $[0, 1]$ на конечное число интервалов так, чтобы на каждом из них выполнялось неравенство (2.4), а потом из этих интервалов можно исключить те, пересечения которых с множеством G имеют меру нуль.

Зафиксируем натуральное число $n_1 \geqslant 1$. В силу леммы 1, где положено $\varepsilon_0 = \delta$ и вместо E_0 взято $E_0 \cdot \Delta_1$, можно определить на отрезке Δ_1 ограниченную функцию $f_1(x)$ и множество e_1, обладающие свойствами:

1°. $f_1(x) = 0$ при $x \overline{\in} e_1$, $e_1 \subset E_0 \cdot \Delta_1$ и $\operatorname{mes} e_1 \leqslant \delta \cdot |\Delta_1| < \varepsilon \cdot |\Delta_1|$*;

2°. $\displaystyle\int_{\Delta_1} |f_1(x)|^p \, dx \leqslant \frac{1}{\delta^{p-1}} \int_{\Delta_1} |f(x)|^p \, dx$;

3°. если $a_k^{(1)}$ определяется из равенства

$$a_k^{(1)} = \int_{\Delta_1} [f(x) - f_1(x)] \, \psi_k(x) \, dx = \int_{\Delta_1 G} [f(x) - f_1(x)] \, \psi_k(x) \, dx,$$

то

$$|a_k^{(1)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{при } k \leqslant n_1;$$

4°. $\displaystyle \| S_n^{(1)}(x) \|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2}$, при $n \leqslant n_1$, где

$$S_n^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Вне интервала Δ_1 полагаем $f_1(x) = 0$.

Условиям 3° и 4° можно удовлетворить в силу того, что n_1 фиксировано и по лемме 1 для фиксированного $\varepsilon_0 = \delta$ коэффициенты $a_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n_1$ можно сделать сколь угодно малыми.

Определим функцию $\Phi_1(x)$ следующим образом:

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in \Delta_1 G - e_1, \\ 0, & \text{при } x \in G - (\Delta_1 G - e_1). \end{cases}$$

Из определения функции $f_1(x)$ и коэффициентов $a_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ видно, что $a_k^{(1)}$ суть коэффициенты разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$ некоторой функции $Z_1(x) \in L_p(G)$, определяемой из равенства

---

* E_0 — множество, фигурирующее в формулировке леммы 2.

$$\chi_1(x)=\begin{cases} f(x)-f_1(x), \text{ при } x\in\Delta_1 G, \\ 0, \text{ при } x\in G-\Delta_1 G, \end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi(x)$ всюду на $G-e_1$, в силу 1°.

Поэтому можно взять число $n_2>n_1$ настолько большим, чтобы выполнялись также следующие условия:

5°. $|a_k^{(1)}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^2}$, при $k>n_2$;

6°. $\|S_n^{(1)}(x)-\Phi_1(x)\|_{(G-e_1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2^2}$, при $n>n_2$.

Условиям 5° и 6° можно удовлетворить в силу свойства 1) нормированных базисов (см. стр. 38).

Снова употребляя лемму 1, на отрезке Δ_2 определяем функцию $f_2(x)$ и множество e_2, обладающие свойствами:

1°. $f_2(x)=0$ при $x\overline{\in} e_2$, $e_2\subset E_0\cdot\Delta_2$ и $\operatorname{mes} e_2\leqslant\delta\cdot|\Delta_2|<\varepsilon\cdot|\Delta_2|$;

2°. $\int\limits_{\Delta_2}|f_2(x)|^p dx\leqslant\frac{1}{\delta^{p-1}}\int\limits_{\Delta_2}|f(x)|^p dx$;

3°. если $a_k^{(2)}$ определяется из равенства

$$a_k^{(2)}=\int\limits_{\Delta_2}[f(x)-f_2(x)]\psi_k(x)\,dx=\int\limits_{\Delta_2 G}[f(x)-f_2(x)]\psi_k(x)\,dx,$$

то

$$|a_k^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{2^3},\quad \text{при } k>n_2;$$

4°. $\|S_n^{(2)}(x)\|_G\leqslant\frac{\varepsilon}{2^3}$, при $n\leqslant n_2$, где

$$S_n^{(2)}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k^{(2)}\varphi(x)\quad(n=1, 2,\cdots).$$

Вне интервала Δ_2 полагаем $f_2(x)=0$.

Условиям 3° и 4° можно удовлетворить, ибо n_2 фиксировано, и в силу леммы 1 при фиксированном $\varepsilon_0=\delta$ коэффициенты $a_k^{(2)}$, $k=1,2,\cdots, n_2$ можно сделать сколь угодно малыми.

Положим

$$\Delta_2'=\Delta_1+\Delta_2 \quad \text{и} \quad e_2'=e_1+e_2. \tag{2.5}$$

Функцию $\Phi_2(x)$ определим следующим образом:

$$\Phi_2(x)=\begin{cases} f(x), \text{ при } x\in\Delta_2' G-e_2', \\ 0, \text{ при } x\in G-(\Delta_2' G-e_2'). \end{cases} \tag{2.6}$$

Из определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и коэффициентов $a_k^{(1)}$ и $a_k^{(2)}$ видно, что числа $a_k^{(1)}+a_k^{(2)}$ суть коэффициенты разложения по системе $\{\varphi_n(x)\}$, некоторой функции $\chi_2(x)\in L_p(G)$, определяемой из равенства

$$\chi_2(x)=\begin{cases} f(x)-[f_1(x)+f_2(x)], \text{ при } x\in\Delta_2'G, \\ 0, \qquad \text{ при } x\in G-\Delta_2'G. \end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi_2(x)$ всюду на множестве $G-e_2'$ в силу 1° (стр. 42). Поэтому можно взять $n_3>n_2$ настолько большим, чтобы выполнялись также следующие условия:

5°. $|a_k^{(1)}+a_k^{(2)}|<\frac{\varepsilon}{2^3}$, при $k>n_3$;

6°. $\| S_n^{(1)}(x)+S_n^{(2)}(x)-\Phi_2(x)\|_{(G-e_2')}<\frac{\varepsilon}{2^3}$, при $n>n_3$,

где полагаем:

$$S_n^{(1)}(x)+S_n^{(2)}(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k^{(1)}+a_k^{(2)})\varphi_k(x).$$

Пусть теперь функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k_0-1}(x)$, числа $n_1<n_2<\ldots<n_{k_0-1}$ и множества $e_1, e_2, \ldots, e_{k_0-1}$ уже определены, где $f_i(x)\in L_p(G)$, $f_i(x)=0$, при $x\in e_i$, $e_i\subset E_0\cdot\Delta_i$ и,

$$\operatorname{mes} e_i\leqslant\delta\cdot|\Delta_i|<\varepsilon|\Delta_i|, \quad (i=1, 2, \ldots, k_0-1, \quad k_0\leqslant m).$$

Пусть множества Δ_i', e_i' и функции $\Phi_i(x)$ определены следующим образом:

$$\Delta_i'=\sum_{j=1}^{i}\Delta_j, e_i'=\sum_{j=1}^{i}e_j \quad (1\leqslant i\leqslant k_0-1),$$

$$\Phi_i(x)=\begin{cases} f(x), \text{ при } x\in\Delta_i'G-e_i'; \\ 0, \text{ при } x\in G-\Delta_i'G-e_i'. \end{cases} \tag{2.7}$$

Выберем число $n_{k_0}>n_{k_0-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись условия:

A) $$\left|\int\limits_{\Delta_{k_0-1}'}[f(x)-\sum_{i=1}^{k_0-1}f_i(x)]\psi_n(x)\,dx=\right|\sum_{i=1}^{k_0-1}\int\limits_{\Delta_i}[f(x)-f_i(x)]\psi_n(x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{k_0-1}\int\limits_{\Delta_i G}[f(x)-f_i(x)]\psi_n(x)\,dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{k_0-1}a_n^{(i)}\right|<\frac{\varepsilon}{2^{k_0}}, \text{ при } n>n_k,$$

где

$$a_n^{(i)}=\int\limits_{\Delta_i G}[f(x)-f_i(x)]\psi_n(x)\,dx=\int\limits_{\Delta_i G}[f(x)-\sum_{j=1}^{k_0-1}f_j(x)]\psi_n(x)\,dx; \tag{2.8}$$

B) $\| S_n^{(1)}(x)+S_n^{(2)}(x)+\ldots+S_n^{(k_0-1)}(x)-\Phi_{k_0-1}(x)\|_{(G-e_{k_0-1}')}\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{k_0}}$,

при $n>n_{k_0}$, где множества e_{k_0-1}', Δ_{k_0-1}' и $\Phi_{k_0-1}'(x)$ определяются из (2.6) и (2.7) при $i=k_0-1$, и

$$S_n^{(1)}(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)}\varphi_k(x). \tag{2.9}$$

Условию А) можно удовлетворить в силу того, что коэффициенты разложения по нормированному базису стремятся к нулю.

Условию В) можно удовлетворить в силу того, что

$$S_n^{(1)}(x)+S_n^{(2)}(x)+\ldots+S_n^{(k_0-1)}(x)$$

есть частная сумма разложения по базису $\{\varphi_n(x)\}$ некоторой функции $\chi_{k_0-1}(x)\in L_p(G)$, определяемой из равенства

$$\chi_{k_0-1}(x)=\begin{cases} f(x)-\sum_{l=1}^{k_0-1} f_l(x), & \text{при } x\in\Delta'_{k_0-1}G, \\ 0, & \text{при } xG\in-\Delta'_{k_0-1}G, \end{cases}$$

и совпадающей с $\Phi_{k_0-1}(x)$ всюду на множестве $G-e'_{k_0-1}$. Теперь, после того как число n_{k_0}, удовлетворяющее условиям А) и В), выбрано, применяя лемму 1, определим ограниченную функцию $f_{k_0}(x)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

C) $f_{k_0}(x)=0$ при $x\overline{\in}e_{k_0}$, $e_{k_0}\subset\Delta_{k_0}E_0$ и $\operatorname{mes} e_{k_0}<\delta\cdot|\Delta_{k_0}|<\varepsilon|\Delta_{k_0}|$;

D) $\int\limits_{\Delta_{k_0}}\left|f_{k_0}(x)\right|^p dx<\frac{1}{\delta^{p-1}}\int\limits_{\Delta_{k_0}}\left|f(x)\right|^p dx;$

E) $|a_n^{(k_0)}|<\frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$, при $n\leqslant n_{k_0}$,

где $$a_n^{(k_0)}=\int\limits_{\Delta_{k_0}G}[f(x)-f_{k_0}(x)]\psi_n(x)\,dx \quad (n=1,2,\ldots);$$

F) $\|S_n^{(k_0)}(x)\|_G<\frac{\varepsilon}{2^{k_0+1}}$, при $n\leqslant n_{k_0}$,

где $$S_n^{(k_0)}(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k^{(k_0)}\varphi_k(x) \quad (n=1,2,\ldots).$$

Условию F) можно удовлетворить, ибо n_{k_0} фиксировано, и, в силу леммы 1 для фиксированного $\varepsilon_0=\delta$, коэффициенты $a_k^{(k_0)}$, $k=1,2,\ldots,n_{k_0}$ можно сделать сколь угодно малыми.

Таким образом, функции $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_m(x)$ и числа $n_1<n_2<\ldots<n_m$ для каждого k_0, $2\leqslant k_0\leqslant m$ удовлетворяют условиям A), B), C), D), E), F), при этом $f_k(x)=0$, при $x\overline{\in}e_k\subset E_0\cdot\Delta_k\subset\Delta_k G$.

Положим

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{m} f_k(x),$$

$$F(x)=f(x)-\Phi(x), \quad (xG\in). \tag{2.9'}$$

$F(x)\in L_p(G)$, ибо $f(x)\in L_p(G)$ и $\Phi(x)$ ограничена.

Покажем, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям α), β), γ) леммы 2.

Условие α) выполнено, так как каждая из функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \cdots, m$ равна нулю вне e_k, $e_k \subset \Delta_k E_0 \subseteq \Delta_k G$, где $\operatorname{mes} e_k < \varepsilon \cdot |\Delta_k|$, и тогда $F(x)=f(x)$ всюду вне множества

$$e_0 = e'_m = \sum_{k=1}^{m} e_k \subset E_0, \ \operatorname{mes} e_0 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \varepsilon \cdot |\Delta_k| \leqslant \varepsilon.$$

Проверим условия β) и γ). Для этого заметим, что, в силу (29') и C) (стр. 44), имеет место равенство

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} = \left(\int_{\Delta_i G} |F(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\Delta_i G} |f(x) - f_i(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Отсюда получаем:

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} < \delta, \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{2.10}$$

В самом деле, имеем:

$$\int_{\Delta_i G} |f(x) - f_i(x)|^p \, dx \leqslant 2^p \int_{\Delta_i G} (|f(x)|^p + |f_i(x)|^p) \, dx.$$

В силу (2.4) и в силу свойства D), где $k_0 = i$, получаем

$$\int_{\Delta_i G} |f(x)|^p dx \leqslant \frac{\delta^{2p}}{2^{p+1}}, \ \int_{\Delta_i G} |f_i(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{\delta^{p-1}} \int_{\Delta_i G} |f(x)|^p dx \leqslant \frac{\delta^{p+1}}{2^{p+1}}.$$

Следовательно, так как $\delta < 1$, будем иметь:

$$\|F(x)\|_{\Delta_i G} \leqslant \left(\frac{\delta^{2p}}{2} + \frac{\delta^{p+1}}{2} \right)^{1/p} < \delta.$$

Неравенство (2.10) доказано.

Из неравенства (2.10) следуют следующие два неравенства:

$$|a_n^{(i)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

$$\|S_n^{(i)}(x)\|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.12}$$

где

$$a_n^{(i)} = \int_{\Delta_i G} [f(x) - f_i(x)] \psi_n(x) \, dx = \int_{\Delta_i G} F(x) \psi_n(x) \, dx, \tag{2.13}$$

$$S_n^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} \varphi_k(x), \tag{2.14}$$

ибо числа $a_n^{(i)}$ и функции $S_n^{(i)}(x)$ суть, соответственно, коэффициенты и частные суммы разложения некоторой функции по системе $\{\varphi_n(x)\}$, норма которой меньше δ (см. неравенства (2.1) и (2.2), стр. 40).

Теперь проверим условие β) леммы 2.

Так как интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ удовлетворяют условию (2.3), то можно написать

$$a_n = \int\limits_G F(x)\psi_n(x)\,dx = \int\limits_{(\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta_i)G} F(x)\psi_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Delta_i G} F(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Отсюда, в силу (2.13), имеем:

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}. \tag{2.15}$$

Пусть $n > n_m$. Можно написать:

$$|a_n| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{m-1} a_n^{(i)}\right| + |a_n^{(m)}|. \tag{2.16}$$

Для $n > n_m$ первое слагаемое в правой части неравенства (2.16) не превосходит $\frac{\varepsilon}{2^m}$, в силу свойства А), где положено $k_0 = m$. Далее, в силу (2.11), $|a_n^{(m)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ для всех n.

Таким образом, будет:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon, \text{ для всех } n > n_m,$$

и свойство β) для указанных n доказано.

Пусть $n \leqslant n_m$. Допустим, что $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, где предполагается $n_0 = 0$.

Очевидно, можно написать

$$|a_n| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k-2} a_n^{(i)}\right| + |a_n^{(k-1)}| + \sum_{i=k}^{m} |a_n^{(i)}|, \tag{2.17}$$

где в случае $k = 1$ исчезают первое и второе слагаемые, а в случае $k = 2$ исчезает первое слагаемое. Первое слагаемое в правой части неравенства (2.17) не больше $\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$ по условию А), где положено $k_0 = k - 1$ (при $k = 1$, 2 оно равно нулю).

Второе слагаемое не больше $\frac{\varepsilon}{2}$, в силу (2.11).

Третье слагаемое не превосходит сумму:

$$\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

в силу условия E), где, последовательно, полагаем

$$k_0 = k,\ k+1,\ .\ .\ .\ .\ ,\ m.$$

Итак, будем иметь

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^k} \leqslant \varepsilon,$$

и условие β) леммы 2 имеет место также при $n \leqslant n_m$. Условие β) доказано.

Проверим условие γ).

В силу (2.14) и (2.15) можно написать

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} S_n^{(i)}(x). \tag{2.18}$$

Пусть натуральное число n таково, что $n > n_m$. Пусть $e \subset G - e_0$. Можно написать

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \| S_n^{(m)}(x) \|_e.$$

Отсюда, в силу (2.12), имеем:

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.19). Имеем:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_e + \| \Phi_{m-1}(x) - f(x) \|_e. \tag{2.20}$$

Из определения функции $\Phi_{m-1}(x)$ (см. (2.7) при $k_0 = m$) непосредственно видно, что $|\Phi_{m-1}(x) - f(x)|^p \leqslant |f(x)|^p$, при $x \in G$.

Следовательно,

$$\| \Phi_{m-1}(x) - f(x) \|_e \leqslant \| f(x) \|_e. \tag{2.21}$$

С другой стороны, так как $e \subset G - e_0$ и $e'_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} e_k \subset \sum_{k=1}^{m} e_k = e_0$, то $e \subset G - e'_{m-1}$, и в силу условия B), где положено $k_0 = m$, будем иметь:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{m-1}(x) \right\|_{(G - e'_{m-1})} < \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{2.22}$$

Из (2.20), (2.21) и (2.22) следует:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m-1} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m} + \| f(x) \|_e. \tag{2.23}$$

Отсюда, в силу (2.19), будем иметь:

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \varepsilon + \| f(x) \|_e. \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e. \tag{2.25}$$

Итак, для $n > n_m$ свойство γ) выполняется.

Рассмотрим случай, когда $n \leqslant n_m$. Допустим, что $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, где предполагается $n_0 = 0$. Пусть $e \subset G - e_0$. Очевидно, при $k > 2$ можно написать

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e + \| S_n^{(k-1)}(x) \|_e + \\ + \sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e. \tag{2.26}$$

Так как $n \leqslant n_k$, то в силу условия F), где последовательно полагается $k_0 = k, k+1, \ldots, m$, будем иметь:

$$\sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e \leqslant \sum_{i=k}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_G \leqslant \sum_{i=k}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{2.27}$$

Далее, в силу (2.12), имеем:

$$\| S_n^{(k-1)}(x) \|_e \leqslant \| S_n^{(k-1)}(x) \|_G \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.28}$$

Оценим теперь первое слагаемое правой части неравенства (2.26). Можно написать

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e = \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) + \Phi_{k-2}(x) - f(x) \right\|_e.$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{i}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_e + \| \Phi_{k-2}(x) - f(x) \|_e. \tag{2.29}$$

Из определения функции $\Phi_{k-2}(x)$ (см. (2.7) непосредственно следует, что

$$| \Phi_{k-2}(x) - f(x) |^p \leqslant | f(x) |^p, \text{ для всех } x \in G.$$

Поэтому будем иметь:

$$\| \Phi_{k-2}(x) - f(x) \|_e \leqslant \| f(x) \|_e. \tag{2.30}$$

Далее, так как

$$e \subset G - e_0,\ e_{k-2} = \sum_{i=1}^{k-2} e_i \subset \sum_{i=1}^{m} e_i = e_0,$$

то $e \subset G - e_{k-2}$, и в силу условия B), где положено $k_0 = k - 1$, будем иметь

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_e \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - \Phi_{k-2}(x) \right\|_{(G-e'_{k-2})} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}, \tag{2.31}$$

ибо по условию $n > n_{k-1}$.

Из (2.29), (2.30) и (2.31) следует

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-2} S_n^{(i)}(x) - f(x) \right\|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \| f(x) \|_e. \tag{2.32}$$

Сравнивая (2.26), (2.27), (2.28) и (2.32), получаем

$$\| S_n(x) - f(x) \|_e \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + \frac{\varepsilon}{2^k} + \| f(x) \|_e < \varepsilon + \| f(x) \|_e. \tag{2.33}$$

Следовательно,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon + 2 \| f(x) \|_e, \tag{2.34}$$

где $n_{k-1} < n \leqslant n_k$, $k > 2$.

В случае, когда $k = 1, 2$, соответственно имеем:

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \sum_{i=1}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon \quad (k=1)$$

в силу условия F), где полагается последовательно $k_0 = 1, 2, \ldots, m$ и

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \| S_n^{(1)}(x) \|_e + \sum_{i=2}^{m} \| S_n^{(i)}(x) \|_e < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon \quad (k=2),$$

ибо первое слагаемое меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (2.12); а второе слагаемое меньше, чем $\sum_{i=2}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, в силу условия F), где последовательно полагается $k_0 = 2, 3, \ldots, m$.

Отсюда видно, что неравенство (2.34) выполнено также тогда, когда $k = 1, 2$; $n_{k-1} < n \leqslant n_k$.

Таким образом, условие γ) леммы 2 также имеет место для любого n, где $1 \leqslant n \leqslant m$.

Выполнение условия γ) доказано. Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует лемма 3.

Лемма 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G \subset [0, 1]$, $\text{mes}\, G > 0$ *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$.

Пусть $f(x) \in L_p(G)$ — *не эквивалентная нулю функция, равная нулю вне некоторого множества* $E_0 \subset G$, $\text{mes}\, E_0 < \text{mes}\, G$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно определить функцию* $F(x) \in L_p(G)$ *и множество* e_0, *обладающие следующими свойствами:*

α) $F(x) = f(x)$, *при* $x \in G - e_0$, $e_0 \subset E_0$ *и* $\text{mes}\, e_0 < \varepsilon$;

β) $|a_n| < \varepsilon$, для всех $n = 1, 2, \ldots$, где числа a_n суть коэффициенты разложения функции $F(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$;

γ) Для любого множества $e \subset G - E_0$,

$$\| S_n(x) \|_e \leqslant \varepsilon \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots, \text{ где}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x).$$

§ 3. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_m\}$, где

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty. \tag{3.1}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих базис в пространстве $L_p(G)$, $P > 1$ и $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, определенная на G.

Пусть бесконечная матрица действительных чисел $\| a_{mk} \|$ и измеримые множества $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m \subset \ldots$, принадлежащие некоторому множеству E_0, $E_0 \subset G$, определены так, что имеют место условия:

a) Для любого фиксированного m, $a_{mk} \to 0$, при $k \to \infty$;

b) $|a_{mk}| < \varepsilon_m$ для всех $k = 1, 2, \ldots$;

c) для произвольного фиксированного m ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \ldots + a_{mk}) \varphi_k(x)$$

сходится по мере на множестве E_m к $f(x)$, где

$$\operatorname{mes} E_m > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_m;$$

d) для произвольного фиксированного $m > 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m-1}} \leqslant \varepsilon_m \text{ для всех } n = 1, 2, \ldots$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{3.2}$$

сходится по мере к $f(x)$ на множестве E_0, где

$$a_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} \tag{3.3}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число.

Зафиксируем m_0 настолько большое, чтобы было

1) $\operatorname{mes} E_{m_0} > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4}$,

2) $\sum\limits_{m=m_0+1}^{\infty} \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{1/p}$.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)$ сходится по мере на множестве E_{m_0} к $f(x)$, то существует число $N(\varepsilon)$ настолько большое, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_{m_0})}\left[\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right]<\frac{\varepsilon}{4}\text{*},$$

для всех $n>N(\varepsilon)$.

Но так как $\operatorname{mes}(E_0-E_{m_0})<\frac{\varepsilon}{4}$, то для $n>N(\varepsilon)$ на множестве E_0 будет иметь место:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}+a_{2,k}+\ldots+a_{m_0k})\varphi_k(x)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right]<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Полагая

$$b_{m_0k}=\sum_{i=1}^{m_0} a_{ik}, \tag{3.6}$$

имеем

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n} b_{m_0k}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_{m_0k})\varphi_k(x), \tag{3.7}$$

где

$$a_k-b_{m_0k}=\sum_{i=m_0+1}^{\infty} a_{ik}.$$

Очевидно, для любого $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство:

$$\left\|\sum_{n=1}^{n}(a_k-b_{m_0k})\varphi_k(x)\right\|_{E_{m_0}}\leqslant\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\varphi_k(x)\right\|_{E_{m_0}}. \tag{3.8}$$

* Если $\Phi(x)$ определена на G и $G_0\subset G$, то через $E_{(G_0)}[\Phi(x)>\sigma]$ обозначаем множество тех точек из G_0, где $\Phi(x)>\sigma$, σ — произвольное число. Через $E[\Phi(x)>\sigma]$ обозначаем множество тех точек из всего множества G, где $\Phi(x)>\sigma$.

Учитывая, что $E_m \supset E_{m_0}$ при $m > m_0$ (см. стр. 50), в силу свойства d), где полагается $m = m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots$, будем иметь:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m_0}} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m_k} \varphi_k(x) \right\|_{E_{m-1}} < \varepsilon_m$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Поэтому для любого n имеет место неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right\|_{E_{m_0}} \leqslant \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^{1/p},$$

т. е. имеем

$$\int_{E_{m_0}} \left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi(x) \right|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{2^p} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда ясно, что множество тех точек из E_{m_0}, где

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2},$$

имеет меру меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{4}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Так как

$$\mathrm{mes}\,(E_0 - E_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{4},$$

то будем иметь

$$\mathrm{mes}\, E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Можно написать

$$\mathrm{mes}\, E_{(E_0)} [| S_n(x) - f(x) | > \varepsilon] =$$

$$= \mathrm{mes}\, E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} b_{m_0 k} \varphi_k(x) - f(x) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \varepsilon \right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{mes}\, E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} b_{m_0 k} \varphi_k(x) - f(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right] +$$

$$+ \mathrm{mes}\, E_{(E_0)} \left[\left| \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_{m_0 k}) \varphi_k(x) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Отсюда, принимая во внимание (3.6), в силу (3.5) и (3.9) получаем для любого $n > N(\varepsilon)$:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}[|S_n(x)-f(x)|>\varepsilon]<\varepsilon. \tag{3.10}$$

Таким образом, мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $N(\varepsilon)$ такое, что при $n>N(\varepsilon)$ будет иметь место условие (3.10), т. е. мы доказали, что ряд (3.2) сходится по мере на множестве E_0 к функции $f(x)$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$. В самом деле, пусть $\varepsilon>0$ — произвольное положительное число.

Возьмем m_0 настолько большое, чтобы было

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\varepsilon_m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из условия *a)* непосредственно видно, что при фиксированном m_0 можно взять число $N(\varepsilon)$ настолько большое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{m_0}a_{ik}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{при } k\geqslant N(\varepsilon).$$

Отсюда, а также учитывая равенство (3.3) и свойство b), получаем:

$$|a_k|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{m_0}a_{ik}\right|+\sum_{i=m_0+1}^{\infty}|a_{ik}|<\varepsilon.$$

Лемма 4 полностью доказана.

§ 4. Чтобы доказать теорему 1, докажем две теоремы, из которых теорема 1 легко следует.

Теорема 3. *Если $\{\varphi_k(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G\subset[0,1]$, $\operatorname{mes} G>0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L_p(G)$, $p>1$, то для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на G, существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

сходящийся к $f(x)$ по мере, причем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<+\infty. \tag{4.1}$$

Так как $f(x)$ почти везде конечна, то можно взять множество $E_1\subset G$ такое, что

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E'_1 > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_1}{2},$$

и чтобы функция $f(x)$ была ограничена на этом множестве.

Функцию $f_1(x)$ определим следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ при } x \in E'_1, \\ 0, \text{ при } x \in G - E'_1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Очевидно $f_1(x) \in L_p(G)$. Применяя лемму 3, можем определить функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $F_1(x) = f_1(x)$, вне некоторого множества e_1, где

$$e_1 \subset E'_1, \operatorname{mes} e_1 < \frac{\varepsilon_1}{2};$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, для всех $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x)\, \psi_k(x)\, dx^*.$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к $F_1(x)$, и так как в силу (4.2) и α), $F_1(x) = f(x)$ на множестве $E_1 = E'_1 - e_1$, то очевидно, он будет сходиться в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на множестве $E_1 = E'_1 - e_1$ к $f(x)$, причем

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_1 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_1.$$

Возьмем функцию $f(x) - F_1(x)$. Так как эта функция почти везде конечна, то можно взять множество $e_2 \subset G - E_1$ такое, что

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes}(E_1 + e_2) > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_2}{2},$$

и чтобы функция $f(x) - F_1(x)$ была ограничена на e_2.

Функцию $f_2(x)$ определим следующим образом:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - F_1(x), \text{ при } x \in e_2, \\ 0, \text{ при } x \in G - e_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Очевидно, $f_2(x) \in L_p(G)$ и $f_2(x) = 0$ на $E_1 \subset G - e_2$. Применяя лемму 3, мы можем определить функцию $f'_2(x) \in L_p(G)$ такую, что выполняются условия**:

---

* $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ суть функции, образующие биортогональную систему с системой $\{\varphi_k(x)\}$.

** В лемме 3 вместо E_0 взято e_2.

α) $f'_2(x) = f_2(x)$ всюду вне множества $e'_2 \subset e_2 \subset G - E_1$, где $\operatorname{mes} e'_2$ настолько мала, что множество $E_2 = E_1 + (e_2 - e'_2)$ имеет меру $\operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2$;

β) $|a_{2,k}| < \varepsilon_2$ ($k = 1, 2, \ldots$), где

$$a_{2,k} = \int_G f'_2(x) \psi_k(x)\, dx;$$

γ) $\| S_{2,n}(x) \|_{E_1} \leq \varepsilon_2$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, где

$$S_{2,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_{2,k} \varphi_k(x).$$

В силу определения чисел a_{1k} и $a_{2,k}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к $F_1(x)$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} \varphi_k(x) \tag{4,4}$$

сходится в среднем порядка p на G к $f'_2(x)$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k}) \varphi_k(x) \tag{4.5}$$

сходится в среднем порядка p на G к функции

$$F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x).$$

Легко видеть, что функция $F_2(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве $E_2 = E_1 + (e_2 - e'_2)$.

В самом деле, $F_1(x) = f(x)$ на множестве $E_1 = E'_1 - e_1$ в силу (4.2) и условия α). С другой стороны, $f'_2(x) = 0$ на E_1, ибо в силу (4.3) $f_2(x) = 0$ на $G - e_2$, $e_2 \subset G - E_1$ и так как, в силу α) $f'_2(x) = f_2(x)$, при $x \in G - e'_2$, где $e'_2 \subset e_2 \subset G - E_1$.

Следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x) = f(x)$ при $x \in E_1$. Остается проверить, что $F_2(x) = f(x)$, при $x \in (e_2 - e'_2) \subset G - E_1$. Это следует из того, что в силу (4.3) и условия α) (стр. 54) $f'_2(x) = f(x) - F_1(x)$ при $x \in e_2 - e'_2$ и, следовательно, $F_2(x) = F_1(x) + f'_2(x) = f(x)$, при $x \in e_2 - e'_2$.

Итак, ряд (4.5) сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_2(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве E_2.

Следовательно, ряд (4.5) сходится по мере на множестве E_2, $\operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2$ к функции $f(x)$.

Пусть теперь для некоторого натурального m определены ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\varphi_k(x), \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\varphi_k(x), \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}\varphi_k(x)$$

такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1,k} + a_{2,k} + \ldots + a_{mk})\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_m(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве $E_m \subset G$, где

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_m > \operatorname{mes} G - \varepsilon_m.$$

Возьмем функцию $f(x) - F_m(x)$. Эта функция почти везде конечна на G, причем на E_m она равна нулю.

Возьмем множество $e_{m+1} \subset G - E_m$ такое, что

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes}(E_m + e_{m+1}) > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_{m+1}}{2},$$

и чтобы функция $f(x) - F_m(x)$ была ограничена на множестве e_{m+1}.

Определим функцию $f_{m+1}(x)$ следующим образом:

$$f_{m+1}(x) = \begin{cases} f(x) - F_m(x), \text{ при } x \in e_{m+1}, \\ 0, \text{ при } x \in G - e_{m+1}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Очевидно, $f_{m+1}(x) \in L_p(G)$ и $f_{m+1}(x) = 0$ на E_m. Применяя лемму 3 к функции $f_{m+1}(x)$, мы можем определить функцию $f'_{m+1}(x) \in L_p(G)$ так, чтобы выполнялись условия:

α) $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x)$ всюду вне некоторого множества $e'_{m+1} \subset e_{m+1}$, где $\operatorname{mes} e'_{m+1}$ настолько мала, что, обозначая через $E_{m+1} = E_m + (e_{m+1} - e'_{m+1})$, имеем:

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_{m+1} > \operatorname{mes} G - \varepsilon_{m+1};$$

β) $|a_{m+1,k}| < \varepsilon_{m+1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{m+1,k} = \int_G f'_{m+1}(x)\psi_k(x)\,dx;$$

γ) $\| S_{m+1,n}(x) \|_{E_m} < \varepsilon_{m+1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ где

$$S_{n+1,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k}\varphi_k(x).$$

Тогда $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) = f(x) - F_m(x)$ на множестве $e_{m+1} - e'_{m+1} = E_{m+1} - E_m$, а так как $e_{m+1} \subset G - E_m$, $E_m \subset G - e_{m+1} \subset G - e'_{m+1}$, то в силу α) и (4.6): $f'_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) = 0$ на E_m.

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+1,k}\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к функции $f_{m+1}(x)$, равной нулю на E_m и равной $f(x)-F_m(x)$ на $E_{m+1}-E_m$, и так как, по предположению, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k}+a_{2,k}+\cdots+a_{mk})\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к функции $F_m(x)$, совпадающей с $f(x)$ на множестве E_m, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k}+a_{2,k}+\cdots+a_{mk}+a_{m+1,k})\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_{m+1}(x)$, совпадающей с $f(x)$ на E_{m+1},

$$E_{m+1}\supset E_m,\ \operatorname{mes} E_{m+1}>\operatorname{mes} G-\varepsilon_{m+1}.$$

Далее заметим, что в силу нормированности системы $\{\varphi_n(x)\}$, имеем для любого m

$$\lim_{k\to\infty} a_{mk}=0.$$

Таким образом, доказано существование бесконечной матрицы $\| a_{mk} \|$ и множеств $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_m\subset\ldots;\ E_m\subset G$, удовлетворяющих условиям леммы 4, где положено $E_0\equiv G$.

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x),$$

где

$$a_k=\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk}$$

сходится по мере на G к функции $f(x)$, причем

$$\lim_{k\to\infty} a_k=0.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — *система функций, определенных на измеримом множестве* $G\subset[0, 1]$, $\operatorname{mes} G>0$ *и образующих нормированный базис в* $L_p(G)$, $p>1$. *Пусть* $f(x)$ — *измеримая функ-*

ция, равная $+\infty$ *на множестве* $E_0 \subset G$ *и нулю на* $G - E_0$; *тогда существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся по мере на G *к* $f(x)$, *причем*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Возьмем функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in E_0, \\ 0, \text{ при } x \in G - E_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \tag{4.8}$$

Применяя лемму 2, определим функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую следующими свойствами:

α) $F_1(x) = \chi(x)$, всюду на $G - e_1$, где

$$e_1 \subset E_0, \ \operatorname{mes} e_1 < \frac{\varepsilon_1}{2};$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, для всех $k = 1, 2, \cdots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x) \psi_k(x) \, dx;$$

γ) для любого $e \subset G - e_1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \varphi_k(x) \right\|_e \leqslant \varepsilon_1 + 2 \| \chi(x) \|_e = \varepsilon_1 + 2 (\operatorname{mes} e \cdot E_0)^{1/p}$$

для всех $n = 1, 2, \cdots$,

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на $G - e_1$ к функции $\chi(x)$.

Так как

$$\operatorname{mes} [G - E_0 (G - e_1)] \leqslant \operatorname{mes} (G - E_0) + \operatorname{mes} [G - (G - e_1)] \leqslant \operatorname{mes} (G - E_0) + \frac{\varepsilon_1}{2},$$

то будет

$$\operatorname{mes} E_0 (G - e_1) > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{4.9}$$

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\varphi_k(x)$$

сходится по мере на множестве $E_0\,(G-e_1)$ к $\chi(x)$, т. е. к 1, то можно взять число n_1 настолько большое, что для точек множества $E_0(G-e_1)$ будем иметь при $n>n_1$

$$\operatorname{mes} E_{(E_0\cdot(G-e_1))}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\,\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes}[E_0\cdot(G-e_1)]-\frac{\varepsilon_1}{2}. \qquad (4.10)$$

Отсюда, принимая во внимание (4.9), получаем

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\,\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes} E_0-\varepsilon_1 \qquad (4.11)$$

при $n>n_1$.

Вновь применяя лемму 2, определим $F_2(x)\in L_p(G)$, обладающую следующими свойствами:

α) $F_2(x)=\chi(x)$, при $x\in G-e_2$, где

$$e_2\subset E_0,\ \operatorname{mes} e_2<\frac{\varepsilon_2}{2};$$

β) $|a_{2,k}|<\varepsilon_2$, при $k=1,\,2,\cdots$, где

$$a_{2,k}=\int_G F_2(x)\,\psi_k(x)\,dx;$$

γ) для любого множества $e\subset G-e_2$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\,\varphi_k(x)\right\|_e\leqslant\varepsilon_2+2\,\|\chi(x)\|_e=\varepsilon_2+2\,(\operatorname{mes} e\,E_0)^{1/p},$$

$$(n=1,\,2,\cdots);$$

δ) $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\,\varphi_k(x)\right\|_G\leqslant\varepsilon_2$ при $n\leqslant n_1$.

Условию δ) можно удовлетворить, так как число n_1 фиксировано, и в силу леммы 2 коэффициенты $a_{2,k}$ можно сделать сколь угодно малыми.

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\ \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на множестве $G-e_2$ к функции $\chi(x)$, где

$$\operatorname{mes}(G-e_2)>\operatorname{mes} G-\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{mes}[(G-e_2)E_0] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{4.12}$$

Следовательно, можно взять число $n_2 > n_1$ настолько большое, что при $n \geqslant n_2$ будет иметь место неравенство

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\,\varphi_k(x) > \frac{1}{2}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_2. \tag{4.13}$$

Продолжая этот процесс, мы определим бесконечную матрицу действительных чисел $\| a_{ik} \|$ и последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, где $n_i < n_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots$ такие, что выполняются следующие условия:

A) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ik} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$;

B) $|a_{ik}| < \varepsilon_i$ $(k = 1, 2, \cdots;\ i = 1, 2, \cdots)$;

C) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_i(x)$, совпадающей с $\chi(x)$ на $G - e_i$, где $e_i \subset E_0$ и $\operatorname{mes} e_i < \frac{\varepsilon_i}{2}$, причем выполняется неравенство:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\varphi_k(x) > \frac{1}{2}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon_i, \text{ при } n \geqslant n_i;$$

D) если $e \subset G - e_i$, то для любого $n = 1, 2, \cdots$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_i + 2\,\| \chi(x) \|_e = \varepsilon_i + 2\,(\operatorname{mes} e\cdot E_0)^{1/p};$$

E) для любого $i > 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon_i, \text{ при } n \leqslant n_{i-1}.$$

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x), \tag{4.14}$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}. \tag{4.15}$$

Докажем, что ряд (4.14) удовлетворяет условиям теоремы 4.

Сначала покажем, что ряд (4.14) сходится по мере на E_0 к $+\infty$, т. е. что для любых $M>0$ и $\varepsilon>0$ найдется целое число $N(M, \varepsilon)$ такое, что при $n>N(M,\varepsilon)$ имеет место

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) < M\right] < \varepsilon. \tag{4.16}$$

Итак, пусть $M>0$, $\varepsilon>0$ — произвольные числа. Зафиксируем i_0 настолько большое, чтобы было

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^p. \tag{4.17}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k}\, \varphi_k(x), \tag{4.18}$$

где

$$b_{i,k} = \sum_{i=1}^{i_0} a_{ik}. \tag{4.19}$$

Так как i_0 фиксировано, то ряд (4.18) сходится в среднем порядка p на G к функции

$$\Phi_{i_0}(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_{i_0}(x),$$

ибо этот ряд есть разложение функции $\Phi_{i_0}(x)$ по базису $\{\varphi_n(x)\}$.

Из сходимости в среднем порядка p ряда (4.18) следует, что нормы частных сумм этого ряда равномерно ограничены. Следовательно, существует $M_0>0$ настолько большое, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\varphi_k(x) < -M_0\right] < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.20}$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

Возьмем $N(M, \varepsilon) = n_{i_0+p_0}$, где

$$p_0 > 2(M + M_0) + 2 + 6\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}. \tag{4.21}$$

Пусть $n \geqslant N(M, \varepsilon)$. Допустим, что $n_i \leqslant n < n_{i+1}$, $i > i_0 + p_0$.

Рассмотрим сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x). \tag{4.22}$$

Положим

$$c_{ik} = \sum_{s=i_0+1}^{i+1} a_{sk}. \tag{4.23}$$

В силу (4.15), (4.19) и (4.23) можно написать

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\varphi_k(x), \tag{4.24}$$

где

$$d_{ik}=a_k-(b_{i,k}+c_{ik})=\sum_{s=i+2}^{\infty} a_{sk}. \tag{4.25}$$

Возьмем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x).$$

Напишем ее в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\varphi_k(x)=\sum_{s=i_0+1}^{i}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k}\varphi_k(x). \tag{4.26}$$

Для каждой из сумм

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x),\ \ i_0+1\leqslant s\leqslant i$$

имеем, в силу условия C),

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}\right]>\operatorname{mes} E_0-\varepsilon_s, \tag{4.27}$$

ибо $n\geqslant n_i>n_{i-1}>\cdots>n_{i_0+1}$.

Отсюда следует:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{s=i_0+1}^{i}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>\frac{1}{2}(i-i_0)\right]>\operatorname{mes} E_0-\sum_{s=i_0+1}^{i}\varepsilon_s.$$

Из (4.17) и из того, что

$$i-i_0\geqslant p_0\geqslant 2(M+M_0)+2+6\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p},$$

получаем

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{s=i_0+1}^{i}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\varphi_k(x)>M+M_0+1+3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right]>$$

$$>\operatorname{mes} E_0-\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{p}. \tag{4.28}$$

С другой стороны, в силу условия D), (4.17) и включения $G\subset[0,1]$ имеем

$$\int\limits_{(G-e_{i+1})} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k} \varphi_k(x) \right|^p dx < 3^p,$$

где

$$\operatorname{mes}(G - e_{i+1}) > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} > \operatorname{mes} G - \frac{\varepsilon}{8}, \ (i > i_0).$$

Поэтому множество тех точек из $G - e_{i+1}$, где

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k} \varphi_k(x) < -3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p},$$

имеет меру меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{8}$.

Но так как

$$\operatorname{mes}(G - e_{i+1}) > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{8},$$

то будем иметь

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{i+1,\,k} \varphi_k(x) \geqslant -3\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{1/p}\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4} (i > i_0). \quad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29), учитывая равенство (4.26), получаем:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \varphi_k(x) > M + M_0 + 1\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.30)$$

Из (4.20) и (4.30) следует:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)}\left[\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \varphi_k(x) > M + 1\right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{3}{4}\varepsilon. \quad (4.31)$$

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x).$$

Учитывая равенство (4.25), легко видеть, что справедливо неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \sum_{s=i+2}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{sk} \varphi_k(x) \right\|_G. \quad (4.32)$$

Так как $n < n_{i+1}$, то в силу условия E) имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_{sk} \varphi_k(x) \right\|_G \leqslant \varepsilon_s \quad s \geqslant i + 2.$$

Следовательно, из (4.17) и (4.32) получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \right\|_G < \sum_{s=i+2}^{\infty} \varepsilon_i < \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^p \quad (i \geqslant i_0). \tag{4.33}$$

т. е.

$$\int_G \left| \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \right|^p dx < \frac{\varepsilon}{8} \qquad (i \geqslant i_0).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes} E \left[\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) \leqslant -1 \right] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, будем иметь

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} \left[\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \varphi_k(x) > -1 \right] > \operatorname{mes} E_0 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.34}$$

Из (4.31) и (4.34), принимая во внимание (4.24), получаем:

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} [S_n(x) > M] \geqslant \operatorname{mes} E_0 - \varepsilon. \tag{4.35}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\operatorname{mes} E_{(E_0)} [S_n(x) < M] < \varepsilon, \text{ при } n \geqslant N(M, \varepsilon) = i_0 + p_0.$$

Итак, мы доказали, что ряд (4.14) сходится по мере на множестве E_0 к $+\infty$.

Чтобы закончить доказательство теоремы 4, остается показать, что ряд (4.14) на множестве $G + E_0$ сходится по мере к нулю.

Для этого достаточно заметить, что построенная нами матрица $\| a_{ik} \|$ удовлетворяет условиям леммы 4 для функции $\chi(x)$, множества $G - E_0$ и последовательности множеств $\{E_m\}$, где $E_m = G - E_0$, $m = 1, 2, \ldots$.

В самом деле, условия a) и b) леммы 4 непосредственно следуют из условий A) и B) (стр. 60).

Условие c) леммы 4 следует из условия C) (стр. 60), ибо в силу (4.7) $\chi(x) = 0$ при $x \in G - E_0$.

Условие d) леммы 4 следует из условия D), где положено $e = G - E_0$, ибо $e_i \subset E_0$ для любого $i = 1, 2, \ldots$

Таким образом, ряд (4.14) сходится по мере на $G - E_0$ к нулю.

Коэффициенты этого ряда стремятся к нулю также в силу леммы 4.

Теорема 4) доказана.

Из теоремы 4 непосредственно следует

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} G > 0$ и образующих нормированный базис в $L_p(G)$, $p > 1$.

Пусть $f(x)$ — измеримая функция, равная $-\infty$ на множестве $E_0 \subset G$ и нулю на $G - E_0$.

Тогда существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся по мере на G к $f(x)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Теорема 1 является непосредственным следствием теорем 3, 4, 5.

Теперь докажем теорему 2.

Пусть $f_1(x) \in L_p(G)$ — не эквивалентная нулю функция, обращающаяся в нуль на множестве $E_1 \subset G$, где

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_1 > G - e_1, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1.$$

Применяя лемму 3, мы можем определить не эквивалентную нулю функцию $F_1(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами*:

α) $F_1(x) = f_1(x)$, при $x \in G - e_1$, где

$$e_1 \subset G - E_1, \ \operatorname{mes} e_1 < \varepsilon_1;$$

β) $|a_{1k}| < \varepsilon_1$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{1k} = \int_G F_1(x)\, \psi_k(x)\, dx.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}\, \varphi(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к функции $F_1(x)$, обращающейся в нуль на множестве E_1.

Положим

$$0 < \delta \leq \max_k \{|a_{1k}|\} \tag{4.36}$$

и возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ так, чтобы было:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k < \delta. \tag{4.37}$$

Применяя лемму 3 к функции $-F_1(x)$, найдем $f_2(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $f_2(x) = -F_1(x)$, при $x \in G - e_2$, где

$$e_2 \subset G - E_1, \ \operatorname{mes} e_2 < \varepsilon_2;$$

* Для того, чтобы функция $F_1(x)$ была отлична от нуля на множестве положительной меры, достаточно взять в лемме 3

$$\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2} \operatorname{mes} E\,[f_1(x) \neq 0]\right\}.$$

β) $|a_{2,k}| < \varepsilon_2$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{2,k} = \int_G f_2(x) \psi_k(x)\, dx;$$

$$\gamma)\ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} \varphi_k(x) \right\|_{E_1} < \varepsilon_2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k}) \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, к некоторой функции $F_2(x) \in L_p(G)$, обращающейся в нуль на множестве $E_2 = G - e_2$, где

$$E_2 \supset E_1, \ \operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} G - \varepsilon_2.$$

Предположим теперь, что построены ряды.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \varphi_k(x), \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k} \varphi_k(x), \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \varphi_k(x),$$

обладающие тем свойством, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \cdots + a_{mk}) \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p на G к некоторой функции $F_m(x)$, обращающейся в нуль на множестве E_m, где

$$\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E_m > \operatorname{mes} G - \varepsilon_m.$$

Применяя лемму 3 к функции $-F_m(x)$, мы можем определить функцию $f_{m+1}(x) \in L_p(G)$, обладающую свойствами:

α) $f_{m+1}(x) = -F_m(x)$, при $x \in G - e_{m+1}$, где

$$e_{m+1} \subset G - E_m, \ \operatorname{mes} e_{m+1} < \varepsilon_{m+1};$$

β) $|a_{m+1,k}| < \varepsilon_{m+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$a_{m+1,k} = \int_G f_{m+1}(x) \psi_k(x)\, dx;$$

$$\gamma)\ \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k} \varphi_k(x) \right\|_{E_m} < \varepsilon_{m+1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} + a_{2,k} + \cdots + a_{m+1,k}) \varphi_k(x)$$

сходится в среднем порядка p, а следовательно и по мере, на G к некоторой функции $F_{m+1}(x) \in L_p(G)$, обращающейся в нуль на некотором множестве E_{m+1}, где

$$E_{m+1} \supset E_m, \ \operatorname{mes} E_{m+1} > \operatorname{mes} G - \varepsilon_{m+1}.$$

Таким образом, нами будут построены бесконечная матрица $\| a_{ik} \|$ и последовательность множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m \subset \ldots$, которые удовлетворяют условиям леммы 4, где положено $E_0 = G$ и $f(x) \equiv 0$.

Возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \tag{4.38}$$

где

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}. \tag{4.39}$$

Тогда по лемме 4 ряд (4.38) сходится по мере на G к нулю и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Из условий β) и из соотношений (4.36), (4.37) и (4.39) непосредственно видно, что не все a_n равны нулю.

Теорема 2 доказана.

Институт математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 XI 1956

Ա. Ա. Թալալյան

L_p ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶԻՍՆԵՐԻ ՇԱՐՔԵՐԸ ԸՍՏ ՉԱՓԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՎԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Թեորեմ 1. *Եթե G դրական չափի սահմանափակ բազմության վրա որոշված $\{\varphi_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հանդիսանում է նորմավորված բազիս $L_p(G), p > 1$ տարածության մեջ, ապա G բազմության վրա որոշված ցանկացած $f(x)$* չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

* $f(x)$ *ֆունկցիան կարող է հավասարվել $+\infty$ կամ $-\infty$ դրական չափի բազմության վրա։*

շարք, որը G բազմության վրա ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, ընդ որում

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0։$$

Թեորեմ 2. *Եթե G դրական չափի սահմանափակ բազմության վրա որոշված $\{\varphi_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հանդիսանում է բազիս $L_p(G)$, $p>1$ տարածության մեջ, ապա գոյություն ունի այնպիսի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

շարք, որը G բազմության վրա ըստ չափի զուգամիտում է զերոյի և որի ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զերոյի, ընդ որում

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0։$$

Ըստ չափի զուգամիտությունը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

Սահմանում՝ *G դրական չափի բազմության վրա որոշված $\{f_n(x)\}$ չափելի համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների հաջորդականությունը ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$ չափելի ֆունկցիային, եթե գոյություն ունեն $\{g_n(x)\}$ և $\{\alpha_n(x)\}$ չափելի ու համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիաների հաջորդականություններ այնպես, որ*

$$f_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x),$$

որտեղ

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$$

համարյա ամենուրեք G-ի վրա և $\{\alpha_n(x)\}$ հաջորդականությունը G-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է զերոյի։

Թեորեմ 1-ը ապացուցված է եղել Մենշովի կողմից այն մասնավոր դեպքում, երբ $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմը համընկնում է $\{\cos nx, \sin nx\}$ սիստեմի հետ [3]։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaczmarz* und *Steihaus*. Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow (1935).
2. *Люстерник Л. А.* и *Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.
3. *Меньшов Д. Е.* О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды математического института им. В. А. Стеклова, XXXIII (1950). On convergence in measure of trigonometric series. *Men'sov D. E.* Amer. Math. Soc. Translation, № 105, 1954, 76 pp.