ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №1, 2007 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УМЕНЬШЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Гнуни В. Ц., Казарян К. Б.

Ключевые слова: космический лифт, оптимизация, прочность.
Key words: space elevator, optimization, strength.

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան, Վ.Ց. Գնունի, Կ.Բ. Ղազարյան

Տիեզերական վերելակի ճոպանի մաքսիմալ լարվածության փոքրացման մի եղանակի մասին

Տիեզերական վերելակի նախագծի իրականացման հնարավորությունը կապված է մի շարք բարդ խնդիրների հետ: Դրանցից մեկը՝ ճոպանի որոշակի հատվածում շատ մեծ լարումների առաջացումն է , որոնք գերազանցում են ժամանակակից նյութերի ամրության սահմանը: Տվյալ հրապարակման նպատակն է լուծել ճոպանի գերլարված հատվածներում մաքսիմալ լարվածության փոքրացման խնդիրը՝ փոփոխելով ճոպանի ընդլայնական հատույթի մակերեսը:

S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, V.Ts. Gnuni , K. B. Ghazaryan

On some method of the space elevator maximum stress reduction

The possibility of the realization and exploitation of the space elevator project is connected with a number of complicated problems. One of them are large elastic stresses arising in the space elevator ribbon body, which are considerably bigger that the limit of strength of modern materials. This note is devoted to the solution of problem of maximum stress reduction in the ribbon by the modification of the ribbon cross-section area.

Возможность осуществления проекта космического лифта связана с рядом сложных проблем. Одна из проблем (появление очень больших напряжений в определенном участке троса [1], которые намного больше предела прочности современных материалов. Цель настоящей заметки – решить задачу уменьшения максимального напряжения в перенапряженных участках троса путем изменения площади поперечного сечения.

1. Известно, что на трос, спущенный из космоса на Землю, закрепленный одним из концов на Земле и со свободным концом в космосе, действует распределенная по длине троса нагрузка [1,2]

$$F(x)=\rho\, g_0\, h_0\, g(x), \qquad g(x)=\alpha(1+x)-(1+x)^{-2} \tag{1.1}$$

которая является суммой сил – центробежной и притяжения. В (1.1) приняты обозначения [2]

$$x=\frac{z}{R_0},\ \alpha=\frac{\omega^2 R_0}{g_0}\approx\frac{1}{288}, \quad 0\le z\le l \tag{1.2}$$

где R_0 – радиус Земли, ω–частота вращения Земли, g_0 – ускорение свободного падения на поверхности Земли, l–длина троса, ρ –плотность материала троса.

Функция $g(x)$ обладает следующими свойствами:

$$g(x)>0 \text{ при } x < x_0, \quad g(x)<0 \text{ при } x > x_0, \quad x_0 \approx 5,6 \tag{1.3}$$

Для троса с переменным поперечным сечением $S(x)$ напряжение $\sigma(x)$ определяется из уравнения

$$\frac{dS(x)\sigma(x)}{dx} + S(x)\, F(x) = 0 \tag{1.4}$$

При $S(x)=\text{const}$ имеем общеизвестную задачу определения напряжения в тросе и длину растянутого троса при условиях

$$\sigma(x)\geq 0, \quad \sigma(0) = \sigma(L_0) = 0, \quad L_0 = l/R_0 \tag{1.5}$$

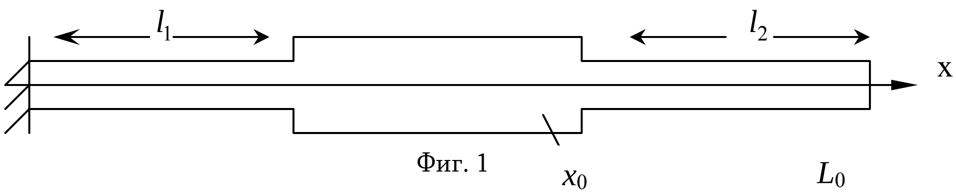
Приведенная общая задача имеет следующее общее решение :

$$\sigma(x)=\rho\, g_0\, R_0 \frac{x}{1+x}\left[1-\alpha\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)\right], \; L_0 \approx 22,5 \tag{1.6}$$

В частном случае при $S(x)=\text{const}$ следует, что максимальное напряжение будет при $x = x_0$

$$\max_x \sigma(x)=\sigma(x_0)\approx 0,78\,\rho\, g_0\, R_0 \tag{1.7}$$

Теперь рассматриваем следующую задачу : при длине троса L_0 , определяемого из условия (1.6) утолщением троса в окрестности $L_0 > x_0 > l_1$, уменьшить максимальное напряжение в тросе по сравнению с (1.7) при ограничении $\sigma(x)\geq 0$. С этой целью принимается модель троса с кусочно-однородным поперечным сечением (фиг. 1).



Фиг. 1

где

$$S(x) = \begin{cases} S_1 \text{ при } 0 \leq x < l_1 & l_1 < x_0 \\ S_2 \text{ при } l_1 \leq x \leq L_0 - l_2 & l_2 < L_0 - x_0 \\ S_1 \text{ при } L_0 - l_2 < x < L_0 & \end{cases} \tag{1.8}$$

Интегрированием уравнения (1.4) для каждого из трех участков троса получается

$$\sigma(x)=\begin{cases} -\int\limits_0^x F(\xi)\,d\xi & 0\le x<l_1 \\ -\int\limits_{-l_1}^x F(\xi) & l_1\le x\le L_0-l_2 \\ \int\limits_{-L_0-l_2}^x F(\xi)\,d\xi & L_0-l_2<x\,L_0 \end{cases} \qquad (1.9)$$

2. Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условий равенств усилий при $x=l_1$ и $x=L_0-l_2$

$$S_1\sigma_1(l_1)=S_2\sigma_2(l_1), \qquad S_2\sigma_2(L_0-l_2)=S_1\,\sigma_3(L_0-l_2) \qquad (2.1)$$

или

$$-S_1\int\limits_0^{l_1}F(x)\,dx=S_2\,C_1, \quad S_2\left[-\int\limits_{l_1}^{L_0-l_2}F(x)-C_1\right]=S_1\,C_2 \qquad (2.2)$$

В промежутке $l_1\le x\le L_0-l_2$ максимальое значение напряжения достигается в точке $x=x_0$ $\left(F(x_0)=0\right)$

$$\max_x \sigma_2(x)=\sigma_2(x_0) \qquad (2.3)$$

В промежутке $0\le x\le l_1$, $L_0-l_2\le x\le L_0$ напряжения достигают максимальных значений на концах

$$\max_x \sigma_1(x)=\sigma_1(l_1), \quad \max_x \sigma_3(x)=\sigma_3(L_0-l_2) \qquad (2.4)$$

Задача оптимизации будет заключаться в том, чтобы выбором параметров C_1, C_2, γ минимизировать наибольшее значение напряжения из максимальных значений (2.3), (2.4)

Покажем , что условие такой оптимальности будет удовлетворено , если

$$\sigma_1(l_1)=\sigma_2(x_0)=\sigma_3(L_0-l_2) \qquad (2.5)$$

Условие равенства $\sigma_1(l_1)=\sigma_3(L_0-l_2)$ приводит к равенству

$$\int\limits_{l_1}^{L_0-l_2} g(x)\,dx=0 \qquad (2.6)$$

или

$$L_0-l_2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+l_1)^2+\frac{8}{\alpha(1+l_1)}}-3-l_1\right] \qquad (2.7)$$

Так как условие $\sigma_1(l_1)=\sigma_2(x_0)$ не содержит параметра l_2, то равенство (2.7) принимается, как формула для определения l_2 при заданном значении для l_1.

Из (1.9) с учетом (1.1) и (2.2) имеем слуедующие выражения для $\sigma_1(l_1)$ и $\sigma_2(x_0)$

$$\sigma_1(l_1)=\rho g_0 R_0 \frac{l_1}{1+l_1}\left[1-\alpha\left(1+\frac{l_1}{2}\right)(1+l_1)\right]$$

$$\sigma_2(x_0)=\rho g_0 R_0 \frac{x_0-l_1}{(1+x_0)(1+l_1)}\left[1-\alpha\left(1+\frac{x_0+l_1}{2}\right)(1+x_0)(1+l_1)\right]+ \quad (2.8)$$

$$+\gamma\frac{l_1}{1+l_1}\left[1-\alpha\left(1+\frac{l_1}{2}\right)(1+l_1)\right]$$

где
$$\gamma=\frac{S_1}{S_2}<1$$

Из условий (2.5) получается следующее уравнение:

$$f(l,\gamma)\equiv\frac{x_0-l_1}{1+x_0}\left[1-\alpha\left(1+\frac{x_0+l_1}{2}\right)(1+x_0)(1+l_1)\right]-$$

$$-\gamma/l_1\left[1-\alpha\left(1+\frac{l_1}{2}\right)(1+l_1)\right]=0 \quad (2.9)$$

Производная $\sigma_1(l_1)$ по l_1 имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_1(l_1)}{\partial l_1}=\frac{1-\alpha(1+l_1)^3}{(1+l_1)^2}>0 \quad (l_1<x_0) \quad (2.10)$$

т.е. $\sigma_1(l_1)$ – возрастающая функция.

Производная же функции σ_2 по l_1

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial l_1}=\frac{(1-\gamma)\left[\alpha(1+l_1)^3-1\right]}{(1+l_1)^2}<0 \qquad (\gamma<1,\ l_1>x_0) \quad (2.11)$$

отрицательна, т.е. $\sigma_2(x_0)$ есть убывающая функция. Здесь учитывается равенство

$$\alpha(1+x_0)^3-1=0 \quad (2.12)$$

Следовательно, задача оптимизации будет решена, если из уравнения (2.9), которое получается из равенства $\sigma_1(l_1)=\sigma_2(x_0)$, определить параметр l_1 для различных значений γ. Уравнение (2.9) фактически является кубическим уравнением относительно l_1 и имеет один действительный корень в промежутке $0<l_1<x_0$. Действительно, нетрудно показать, что при значениях $\alpha^{-1}=288,\ x_0=5,6;\quad 0<\gamma<1$ имеют место неравенства

$$f(0,\gamma)>0,\ f(x_0,\gamma)<0 \tag{2.13}$$

Таблица 1

γ	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
l_1	5,6	2,643	1,930	1,533	1,276	1,093	0,957	0,851	0,767	0,698	0,640
l_2	16,9	12,616	10,867	9,634	8,818	7,924	7,295	6,761	6,273	5,911	3,741
$\tilde{\sigma}$	0,78	0,704	0,646	0,595	0,553	0,516	0,484	0,456	0,430	0,408	0,387

В табл. 1 приводятся вычисленные значения l_1, согласно решению уравнения (2.9) при различных значениях γ, а также l_2, найденные по формуле (2.7), и безразмерный параметр максимального значения напряжения

$$\tilde{\sigma}=\frac{\max\sigma(x)}{\rho g_0 R_0} \tag{2.14}$$

Из табл.1, в частности, видно, что если площадь поперечного сечения в промежутке, содержащем точку x_0, увеличить в десять раз, то максимальное напряжение можно уменьшить в два раза.

Литература

1. Edwards B. C., Westling E. A. – The Space Elevator. Houston: USA. 2002. - 280 p.
2. Ambartsumian S. A., Belubekyan M. V., Ghazaryan K. B. , Gnuni V.Ts. On Design Problem of Space Elevator Cable. // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 3. P. 189-196.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.01.2007