ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 58, №3, 2005 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА СОСТАВНОГО КЛИНА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Агаларян О.Б., Таманян Г.Ю.

Հ. Բ. Աղալարյան, Գ. Յ. Թամանյան

Երկայնական սահքի խնդիր կամայական երկարությամբ և դիրքով շառավղային ճաք պարունակող բաղադրյալ սեպի համար տարբեր եզրային պայմանների առկայությամբ

Աշխատանքը նվիրված է. երկայնական սահքի պայմաններում տեղափոխությունների և լարումների դաշտի որոշմանը բաղադրյալ մարմնում, որը կազմված է երկու առաձգական անվերջ սեպերից և միացման գծի վրա պարունակում է շառավղային ճաք՝ արտաքին նիստերի վրա դրված երեք տիպի պայմանների առկայությամբ: Այդ դեպքում, արտաքին մակերևույթից ճաքի գագաթի գտնված հեռավորությունից կախված, ստացված ինտեգրալ հավասարումների լուծումների կառուցումը և հետազոտությունը սպառում է ճաքի դիրքի և երկարության բոլոր հնարավոր դեպքերը: Որոշված են միացման գագաթի շրջակայքի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող ասիմպտոտիկական բանաձևերը և համապատասխան եզակիության գործակիցները

O.B.Aghalaryan, G.Yu.Tamanyan

On the problem of longitudinal shear of compound wedge with the radial crack of unrestricted length under the different boundary conditions

In the article the problem of longitudinal shear of two wedges made from different materials that have arbitrary angles is considered. On the base of received solution are determined both, the behavior of stress field and the coefficients of stress concentration in depend on the values of external loads, wedges angles and boundary conditions.

Статья посвящена определению в условиях антиплоской деформации полей перемещений и напряжений в составном клине, который содержит на общей линии соединения радиальную трещину произвольной длины и расположения при различных граничных условиях. В зависимости от расстояния вершины трещины от внешней поверхности исследование и решение полученных интегральных уравнений исчерпывает всевозможные положения трещины. Выведены асимптотические выражения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины соединения клиньев.

В настоящей статье рассматривается задача продольного сдвига о двух клиньях, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Предполагается, что на общей грани составного клина содержится трещина произвольного расположения и длины. На внешних гранях принимаются три вида граничных условий: первый, когда обе грани свободны, второй, когда обе грани жестко защемлены, и третий, когда одна грань свободна, а вторая жестко защемлена. Для всех этих случаев внешние касательные нагрузки приложены к берегам трещины, которые равны по величине и противоположны по направлению. Задача решается при помощи интегрального преобразования Меллина и соответствующих интегральных уравнений. На основе полученного решения определяются как поведение поля напряжений, то есть показатель особенности напряжений в окрестностях угловой точки и в концах трещины, так и коэффициенты концентрации напряжений в зависимости от величин внешних нагрузок, углов раствора и граничных условий.

Из решенных краевых задач для составных тел отметим [1–4]. Необходимо подчеркнуть, что в случае приближения трещины к внешней поверхности решение соответствующего класса задач сталкивается с преодолением значительных математических трудностей [5].

1. Выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z), начало

которой находится на вершине соединения клиньев, а ось (Oz) направлена вдоль оси составного тела. Тогда, по определению продольного сдвига, из компонент вектора перемешений не равны нулю лишь компоненты перемещения $W_k = W_k(r,\varphi)(k=1,2)$ для первого и второго клиньев соответственно, поэтому уравнение равновесия и условие совместности принимают вид:

$$\frac{\partial\tau_{rz}^{(k)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi z}^{(k)}}{r\partial\varphi}+\frac{\tau_{rz}^{(k)}}{r}=0, \qquad \frac{\partial\gamma_{\varphi z}^{(k)}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{rz}^{(k)}}{\partial\varphi}+\frac{\gamma_{\varphi z}^{(k)}}{r}=0 \tag{1.1}$$

Эти уравнения необходимо решить со следующими граничными условиями: для первого случая

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,-\alpha_1)=0;\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,\alpha_2)=0 \text{ при } (0\le r\le\infty) \tag{1.2}$$

которые заменяются условиями $W_1(r,-\alpha_1)=0;W_2(r,\alpha_2)=0$, или $W_1(r,-\alpha_1)=0;$ $\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,\alpha_2)=0$ для второго и третьего случаев соответственно, α_k – углы растворов клиньев. На общей грани имеем условия непрерывности составляющих напряжений и перемещений:

$$\begin{cases} W_1(r,0)=W_2(r,0) \\ \tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0) \end{cases} \text{при } r\,\overline{\in}\,(a,b) \tag{1.3}$$

На берегах трещины заданы внешние нагрузки $\tau_0(r)$, то есть

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0)=\tau_0(r),\ r\in(a,b) \tag{1.4}$$

где a и b – координаты концов трещины.

Будем рассматривать первую граничную задачу, а для остальных задач приведем лишь окончательные результаты. Имея целью охватить случай произвольного расположения трещины на оси $(0,z)$, мысленно отделим клинья друг от друга, обозначив неизвестные касательные напряжения на интервалах $(0,a)$ и (b,∞) через $\tau_1(r)$ и $\tau_2(r)$ соответственно. Тогда построение решения первой краевой задачи для каждого клина при помощи интегрального преобразования Меллина [4] дает для неизвестных компонент перемещения следующие выражения:

$$\begin{gathered} W_k(r,\varphi)=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\cos\left(\alpha_k+(-1)^{k-1}\varphi\right)}{s\sin\alpha_k s}\times \\ \times\left[\int\limits_0^a\tau_1(t)t^s dt+\int\limits_b^\infty\tau_2(t)t^s dt+\int\limits_a^b\tau_0(t)t^s dt\right]r^{-s}ds \end{gathered} \tag{1.5}$$

здесь i – мнимая единица. Исходя из поведения поля напряжений в окрестности соединения и на бесконечности следует, что (c) находится в интервале $(-1+\delta<c<0;\ \delta>0)$.

Используя условие равенства перемещений: $W_1(r,0)=W_2(r,0)$ при $r\,\overline{\in}\,(a,b)$ приходим к уравнению относительно неизвестных касательных напряжений $\tau_1(r)$ и $\tau_2(r)$. С целью преобразования полученного уравнения в удобную форму, преобразуем первое условие (1.3) следующим образом: продифференцируем его по r и введем неизвестную функцию $\varphi(r)$ следующим образом:

$$\gamma_n^{(1)}-\gamma_n^{(2)}=\varphi_1(r)=\begin{cases}\varphi_1(r): & r\in(a,b)\\ 0\ : & r\,\overline{\in}\,(a,b)\end{cases}\tag{1.6}$$

$$G_2\tau_n^{(1)}(r,0)-G_1\tau_n^{(2)}(r,0)=G_1G_2\,\varphi_1(r)$$

Тогда, применяя преобразование Меллина к граничной задаче (1.1)–(1.6) и после обратного преобразования, получим для $\tau_k(r)$ следующие выражения:

$$\tau_k(r)=\int_a^b K_1(\zeta,r)\varphi_1(\zeta)d\zeta\tag{1.7}$$

где $$K_1(\zeta,r)=-\frac{2}{\pi(k_1+1)G_2r}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\alpha_1y\operatorname{sh}\alpha_2y\sin\left(\ln\frac{\zeta}{r}\right)ydy}{\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)y+k_2\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)}\tag{1.8}$$

$k_1={}^{G_1}\!/_{G_2}$; $k_2=\dfrac{1-k_1}{1+k_1}$; G_1,G_2 – модули сдвигов материалов.

Подставляя (1.7) в уравнение равенства перемещений, после некоторых преобразований получим следующее уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_1(\zeta)$:

$$\int_a^b[K_{11}(\zeta,r)+K_{12}(\zeta,r)]\varphi_1(\zeta)d\zeta=f_1(r)\tag{1.9}$$

где $$K_{11}(\zeta,r)=\int_0^a K_1(\zeta,t)dt\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{s\sin(\alpha_1s)\sin(\alpha_2s)}\left(\frac{t}{r}\right)^s ds$$

$$K_{12}(\zeta,r)=\int_b^\infty K_1(\zeta,t)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{s\sin(\alpha_1s)\sin(\alpha_2s)}\left(\frac{t}{r}\right)^s ds\tag{1.10}$$

$$f_1(r)=-\int_a^b\tau_0(t)dt\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(1+k_1)\sin(\alpha_1+\alpha_2)s-(1-k_1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)s}{s(\cos(\alpha_1-\alpha_2)s-\cos(\alpha_1+\alpha_2)s)}\left(\frac{t}{r}\right)^s ds$$

При выводе уравнения (1.9) существенно было использовано условие уравновешенности внешних нагрузок. Заметим, что если (а) достаточно велико, а (в) достаточно мало, то из условия (1.4) для определения φ_1 получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\int_a^b K_1(\zeta,r)\varphi_1(\zeta)d\zeta=\tau_0(r)\tag{1.11}$$

где вид $K_1(\zeta,r)$ дан в (1.8).

В общем случае, когда $a\to0$ не следует, что скачок перемещения в точке, соответствующей началу координат, принимает конечное непулевое значение, подобно выходящей трещине. В действительности, исходя из непрерывного характера скачка перемещения, он принимает нулевое значение и соответствует тому случаю, когда на вершине клиньев действует сосредоточенная нагрузка. Этот случай является промежуточ -

ным между случаем, имеющим место при малых значениях параметра h и случаем, соответствующим наперед выходящему на внешнюю поверхность конца трещины, решение которого осуществляется иным путем [8], поскольку в этом случае метод интегральных преобразований не применим. Поэтому, необходимо подчеркнуть, что в рассматриваемом случае предельный переход ($a \to 0$) невозможен, в то время как в (1.9) он очевиден. Таким образом, указанные два класса задач исчерпывают всевозможные положения трещины. Уравнение (1.9) решается с использованием метода Ньютона−Канторовича, а (1.11)−с помощью выделения сингулярной части ядра и последующим применением метода ортогональных многочленов Чебышева.

С этой целью, проведя интегрирование по частям, с учетом условия $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, которые всегда достигнуты соответствующим выбором знаков перед слагаемыми в выражении введенной функции, получим

$$\int_a^b \varphi(t)t^s dt = -\frac{1}{s+1}\int_a^b t^{s+1}\varphi'(t)dt$$

После подстановки, принимая $c=0$, имея значение интеграла [5]

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}Ay}{y}\cos(vy)dy = -\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi v}{4A}\right|$$

Окончательно уравнение (1.11) запишется в виде

$$\frac{1}{\pi(1+k)}\int_a^b\left[-\ln\left|t^{\frac{\pi}{2A}} - r^{\frac{\pi}{2A}}\right| + R(t,r)\right]t\,\varphi'(t)dt = r\tau(r) \tag{1.12}$$

где

$$R(t,r) = K_1^{(1)}(r,t) + K_1^{(2)}(r,t) \tag{1.13}$$

$$K_1^{(1)}[t,r] = \int_0^\infty\left[\frac{y}{1+y^2}\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 y)\operatorname{sh}(\alpha_2 y)}{\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)y + k_1\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)y} - \frac{\operatorname{th}Ay}{y}\right]\cos\left(\ln\frac{t}{r}\right)ydy \tag{1.14}$$

$$K_1^{(2)}(t,r) = -\frac{2t}{\pi r(1+k)}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 y)\operatorname{sh}(\alpha_2 y)\sin(\ln\gamma y)dy}{\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)y + k_1\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)y}$$

$$A = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+k_1(\alpha_1-\alpha_2)}$$

При помощи замены переменных :

$$\xi = t^{c_0} - \left(a^{c_0} + b^{c_0}\right)/2, \qquad x = r^{c_0} - \left(a^{c_0} + b^{c_0}\right)/2 \tag{1.15}$$

интегральное уравнение приводится к симметричному интервалу $(-c,c)$, то есть

$$\frac{1}{\pi(1+k)}\int_{-c}^{c}\left[\ln\frac{1}{|x-\xi|} + R_1(\xi,x)\right]\varphi_1(\xi)d\xi = \tau_1(x) \tag{1.16}$$

где

$$\varphi_1(\xi)=\frac{2A}{\pi}(\xi+d)^{\frac{1}{c_0}-\frac{1}{2}}\varphi(\xi(t)),\ \tau_1(x)=-G_2(x+d)^{\frac{1}{c_0}-\frac{1}{2}}\tau(r(x))$$

$$R_1(\xi,x)=R[r(x)t(\xi)],\quad C_0=\pi/2A$$

Разлагая искомое решение в ряд по собственным функциям сингулярного уравнения (1.10):

$$\varphi_1(\xi)=\frac{1}{\sqrt{c^2-\tau^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_n T_n\left(\frac{\xi}{c}\right) \tag{1.17}$$

и используя свойства ортогональных полиномов Чебышева первого рода, приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных X_n:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}K_{mn}^{(1)}X_n=B_m^{(1)}\ \ (m=1,2...) \tag{1.18}$$

где $K_{mn}^{(1)}=\dfrac{2m}{\pi^2}\displaystyle\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}\dfrac{R_1(\xi,x)T_n\left(\frac{\xi}{c}\right)T_m\left(\frac{x}{c}\right)}{\sqrt{c^2-\xi^2}\sqrt{c^2-x^2}}d\xi dx,\quad B_m^{(1)}=m\displaystyle\int_{-c}^{c}\dfrac{\tau_1(x)dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$

При этом, условие $\int_a^b\varphi(t)dt=0$, с учетом того, что скачок компонентов перемещения в концах трещины равен нулю, приводит к нулевому значению коэффициента X_0.

Квазиполная регулярность бесконечной системы доказывается аналогично [6, 7]. Решая последнюю систему и имея $\varphi(t)$, коэффициенты интенсивностей касательных напряжений, возникающих вне трещины, на ее продолжении определяются по выражениям:

$$K_{III}^{(1)}(a)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to a}\sqrt{r-a}\frac{\partial w_k(r,0)}{\partial r},\quad K_{III}^{2}(b)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to b}\sqrt{b-r}\frac{\partial w_k(r,0)}{\partial r}$$

Далее для определения асимптотики компонент перемещения и напряжения в окрестности точки соединения, после использования обратного преобразования Меллина, теоремы о вычетах, леммы Жордана, получим:

$$W_k^{(1)}(r,\varphi)=K_{III}^{(1)}F_1(r,\varphi)r^{-s_1},\ \tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(1)}G_k\frac{\partial F_1(r,\varphi)}{\partial\varphi}r^{-s_1-1} \tag{1.19}$$

$$\tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(1)}G_kF_1(r,\varphi)r^{-s_1-1}$$

где

$$F_1(r,\varphi)=\begin{cases}-\dfrac{G_2\cos(\alpha_1+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_1s_1)} & \text{при}-\alpha_1<\varphi<0\\ \dfrac{G_1\cos(\alpha_2+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_2s_1)} & \text{при } 0<\varphi<\alpha_2\end{cases} \tag{1.20}$$

$$K_{III}^{(1)}=\frac{\sin(\alpha_1 s_1)\sin(\alpha_2 s_1)\int\limits_a^b \varphi_1(t)t^{s_1}\,dt}{(G_1+G_2)(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)s_1+(G_1-G_2)(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)s_1}$$

s_1 — первый отрицательный корень уравнения:

$$\Delta_1(s)=(k_1+1)\sin(\alpha_1+\alpha_2)s+(k_1-1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)s=0$$

Отметим, что последнее уравнение совпадает с уравнением, полученным в работе [2], где рассматривается задача о кручении составного призматического стержня. Эти задачи в асимптотическом смысле эквивалентны [8]. Приведем окончательные асимптотические выражения компонентов перемещения и напряжения второй и третьей задач в окрестности вершины соединения клиньев. Для второй задачи они имеют вид:

$$W_k^{(2)}(r,\varphi)=K_{III}^{(2)}F_2(r,\varphi)r^{-s_1},\quad \tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(2)}G_k\frac{\partial F_2(r,\varphi)}{\partial\varphi}r^{-s_1-1} \tag{1.21}$$

$$\tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(1)}G_kF_2(r,\varphi)r^{-s_1-1}$$

где

$$F_2(r,\varphi)=\begin{cases}-\dfrac{G_2\cos(\alpha_1+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_1 s_1)} & \text{при } -\alpha_1<\varphi<0\\[2ex] -\dfrac{G_1\cos(\alpha_2+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_2 s_1)} & \text{при } 0<\varphi<\alpha_2\end{cases}$$

$$K_{III}^{(2)}=\frac{2\sin(\alpha_2 s_1)\cos(\alpha_1 s_1)\int\limits_a^b \varphi_2(t)t^{s_1}\,dt}{(G_1+G_2)(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2)s_1+(G_1-G_2)(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)s_1}$$

s_1 — первый отрицательный корень уравнения:

$$(k_1+1)\sin(\alpha_1+\alpha_2)s+(k_1-1)\sin(\alpha_1-\alpha_2)s=0.$$

А для третьей задачи

$$W_k^{(3)}(r,\varphi)=K_{III}^{(3)}F_3(r,\varphi)r^{-s_1},\quad \tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(3)}G_k\frac{\partial F_3(r,\varphi)}{\partial\varphi}r^{-s_1-1} \tag{1.22}$$

$$\tau_{\varphi z}^{(k)}(r,\varphi)=K_{III}^{(3)}G_kF_3(r,\varphi)r^{-s_1-1}$$

где

$$F_3(r,\varphi)=\begin{cases}-\dfrac{G_2\cos(\alpha_1+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_1 s_1)} & \text{при } -\alpha_1<\varphi<0\\[2ex] -\dfrac{G_1\cos(\alpha_2+\varphi)s_1}{\sin(\alpha_2 s_1)} & \text{при } 0<\varphi<\alpha_2\end{cases}$$

$$K_{III}^{(3)}=\frac{2\sin(\alpha_2 s_1)\cos(\alpha_1 s_1)\int\limits_a^b \varphi_3(t)t^{s_1}\,dt}{(G_1+G_2)(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2)s_1+(G_1-G_2)(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)s_1}$$

s_1 — первый отрицательный корень уравнения:

$$(k_1+1)\cos(\alpha_1+\alpha_2)s+(k_1-1)\cos(\alpha_1-\alpha_2)s=0 \qquad (1.23)$$

В обоих случаях неизвестная функция $\varphi_2(t)$ определяется или из соответствующих сингулярных уравнений, или из уравнений типа уравнения (1.9). Окончательный вид бесконечных алгебраических систем, а также коэффициентов интенсивностей в концах трещины, для этих случаев не очень отличаются от соответствующих выражений для первой задачи. Вопросы, связанные с явлением малонапряженности для этих случаев, изучены в [9], где в частности, для третьего случая получено, что если $G_1 < G_2$, то каковы бы ни были значения α_1 и α_2 ($\alpha_1+\alpha_2<\pi/2$), всегда можно выбрать такое значение параметра G_1/G_2, что в вершине соединения клиньев напряжения бесконечно увеличиваются. Такое явление для первой и второй краевой задачи не имеет места. Это означает, что прочность составного тела можно повысить, если численное значение модуля сдвига клина с защемленной гранью выбрать достаточно большим по сравнению с численным значением модуля второго клина. Проведя численный анализ полученных основных механических величин, можно определить количественное взаимоотношение коэффициентов интенсивностей и показателя особенностей для различных серий физических и геометрических величин и на их основе сделать практические важные выводы для прочностных свойств составного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Proc. fifth U.S. National Congress of Appl. Mech., 1966.
2. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1987.
3. Боджи Д.В. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов. //Прикладная механика.1973. № 4.
4. Александров В. М. Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. 1986.
5. Мазья В.Г. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 1.
6. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1972. Т. 25. № 2. С. 15–36.
7. Акопян В.Н. Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, ослабленного трещинами. // Докл. НАН РА. 1992. Т. 93. № 4.
8. Агаларян О.Б. К задаче кручения осесимметричного упруго–пластического тела с трещиной. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1978. Т. 31. № 6. С. 36–41.
9. Агаларян О.Б. Всесоюзная конференция по неоднородным структурам. Тезисы докладов. Львов. 1987.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.12.2001