ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 57, №4, 2004 Механика

УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Անհամասեռ սալերի և գլանային թաղանթների տատանումների մասին

Ուսումնասիրվում են ըստ բարձրության մասնակիորեն անհամասեռ սալերի և գլանային թաղանթների տատանումների մի քանի խնդիրներ: Գծային տատանումների խնդիրը սալի համար դիտարկվում է անհամասեռ առաձգամածուցիկության դեպքում (անհամասեռ սոսք): Առաձգական սալի և գլանի համար խնդիրները դիտարկվել են երկրաչափորեն ոչ գծային դրվածքով: Հետաքրքիր է, որ անհամասեռությունը կարող է փոխել տատանումների և ալիքների տարածման բնույթը «կոշտ» և «փափուկ» ձևերով.

L.A.Movsisyan
About Vibrations of Nonhomogeneous Plates and Cylindrical Shells

Исследуются одномерные колебания пластин и цилиндрической оболочки, когда по толщине имеется неоднородность. Она может быть как естественной, так и в случае, когда объект находится в температурном поле, вследствие чего свойство материала изменяется. В последнем случае особенно чувствительны изменения вязкоупругих свойств. В вязкоупругой постановке изучаются линейные колебания, а в упругой – нелинейные.

1. Уравнения движения цилиндрической оболочки и компоненты деформаций возьмем по [1]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T}{R} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x,t) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

Теперь несколько слов о соотношениях вязкоупругости. Как известно [2,3], если вязкоупругие свойства меняются вследствие температуры, то для материалов, для которых верна температурно-временная аналогия, связь напряжение – деформация сохраняет свой вид, только вместо времени ставится приведенное время. Так вот, в выражении связи

$$\bar{E}\nu = E\left(\nu - \gamma\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\nu(\tau)d\tau\right) \tag{1.3}$$

t заменяется на t' (будем изучать экспоненциальное ядро). Если предположить, что материал находится в стационарном температурном поле и имеется только изменение температуры по высоте, приведенное время t' через t выразится [3]

$$t' = \psi(z)t \tag{1.4}$$

Если предположить, что в (1.3) t заменено на t' и учесть, что принимается гипотеза прямых нормалей, естественно разложить $\psi(z)$ и $\bar{e}^{\alpha a_0 \psi(z)(t-\tau)}$ в ряды по z и довольствоваться линейным приближением.

Тогда окончательно для усилия T и момента M получим

$$\begin{aligned} T &= I_1\varepsilon + I_2\kappa - \int_{-\infty}^{t} b\left[(I_1 + I_2 A)\varepsilon + (I_2 + I_3 A)\kappa\right]d\tau \\ M &= I_2\varepsilon + I_3\kappa - \int_{-\infty}^{t} b\left[(I_2 + I_3 A)\varepsilon + I_3\kappa\right]d\tau \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$I_j = \frac{1}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2} E(z)z^{j-1}dz$$

$$A(t-\tau) = \frac{a_1}{a_0}\left(1 - \alpha a_0(t-\tau)\right) \tag{1.6}$$

$$b = \gamma a_0 e^{-\alpha a_0(t-\tau)}$$

Как видно из (1.6), так как роль коэффициента Пуассона невелика, его изменение не учитывается.

2. Рассмотрим линейные вязкоупругие колебания пластинки $(R \to \infty)$ для случая краевых условий:

$$w = M = T = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l \tag{2.1}$$

Подставляя (1.5) с учетом (1.2) в (1.1), будем искать решение системы в виде

$$u = \varphi(t)\cos\lambda x, \quad w = f(t)\sin\lambda x, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{l} \tag{2.2}$$

удовлетворящее условиям (2.1).

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\left\{\varphi - \int_{-\infty}^{t} b\left[\varphi - \frac{h^2}{12}A(t-\tau)\lambda f\right]d\tau\right\} = 0 \\ &\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2\left\{f - \int_{-\infty}^{t} b\left[f - \frac{1}{\lambda}A(t-\tau)\varphi\right]\right\} = q(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\omega^2 = \frac{I_1}{\rho h}\lambda^2, \qquad \Omega^2 = \frac{I_3}{\rho h}\lambda^4, \qquad q = \frac{2}{\rho h l}\int_0^l P\sin\lambda x dx$$

Как известно [2], при не очень высоких температурах изменяются только коэффициенты вязкости, т.е. в соотношениях (1.5) можно принять $I_2 = 0$, соответственно с этим в (2.3) они не фигурируют (только ради краткости записи). Наличие его не приводит ни к каким-либо принципиальным осложнениям по сравнению с тем, что приводится ниже.

При вынужденных колебаниях $q = q_0 e^{i\theta t}$ соответствующее решение (2.3) дается

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\theta t + \theta_2)}, \qquad f = f_0 e^{i(\theta t + \theta_1)} \tag{2.4}$$

здесь

$$f_0 = g_0\left(F^2 + \Phi^2\right)^{1/2}, \quad \varphi_0 = \frac{h^2\lambda}{12\Gamma_{1s}}\left(\Gamma_{2s} - \Delta\Gamma_{2c}\right) f_0$$

$$F = \Omega^2\left[1 - \Gamma_{1c} + \frac{h^2}{12\Gamma_{1s}}\left(\Gamma_{2c} - \Delta\Gamma_{2s}\right)\left(\Gamma_{2s} - \Delta\Gamma_{2c}\right)\right] - \theta^2$$

$$\Phi = \Gamma_{1s} - \frac{h^2}{12\Gamma_{1s}}\left(\Gamma_{2s}^2 - \Delta^2\Gamma_{2c}^2\right) \tag{2.5}$$

$$\Delta = \frac{\Gamma_{2s}\left|\omega^2\left(1 - \Gamma_{1c}\right) - \theta^2\right| + \Gamma_{1s}\Gamma_{2c}\omega^2}{\Gamma_{2c}\left|\omega^2\left(1 - \Gamma_{1c}\right) - \theta^2\right| - \omega^2\Gamma_{1s}\Gamma_{2s}}$$

$$\Gamma_{1c} = \gamma\alpha a_0^2 \vartheta^{-1}, \qquad \Gamma_{1s} = \gamma a_0 \theta \vartheta^{-1}, \qquad \vartheta = \theta^2 + \left(\alpha a_0\right)^2$$

$$\Gamma_{2c} = 2\frac{a_1}{a_0}\theta^2\Gamma_{1c}\vartheta^{-1}, \qquad \Gamma_{2s} = \frac{a_1}{a_0}\Gamma_{1s}\left(\theta + \alpha a_0\right)^2\vartheta^{-1}$$

При выводе (2.5) принималось, что разность между фазами $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ мала, так что $\cos\Delta = 1$ и $\sin\Delta = \Delta$.

Частоты и коэффициенты затухания свободных колебаний, следуя [2], выводятся в предположении, что трение очень мало, тогда, пренебрегая малыми членами, получим $\left(p = p_1 + ip_2\right)$

$$p_1 = \begin{cases} \omega, \\ \Omega, \end{cases} \qquad p_2 = \frac{p_1}{2}\Gamma_{1s}\left(p_1\right) \tag{2.6}$$

3. Нелинейные свободные колебания пластинки будем изучать в упругой постановке.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] - \beta_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\rho h}{I_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\beta_1\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \beta_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\} - \beta_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\rho h}{I_1}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

$$\beta_1 = \frac{I_2}{I_1}, \qquad \beta_2 = \frac{I_3}{I_1}$$

Обычно [1] при изучении поперечных колебаний инерционным членом в первом уравнении (1.1) пренебрегается, так как собственная частота продольных колебаний на порядок выше, чем изгибные. Оказывается, что при неоднородности эти разности еще больше увеличиваются [4], так что здесь он также пренебрегается. Рассмотрим случай шарнирного закрепления краев

$$u = w = M = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \tag{3.2}$$

Тогда решение (3.1) будем искать как

$$w = f \sin \lambda x, \qquad u = \varphi \sin 2\lambda x \tag{3.3}$$

Система (3.1) решается методом Галеркина. Первое уравнение дает

$$\varphi = -\frac{1}{8}\lambda f^2 + \frac{2}{3l}\beta_1 f, \qquad T = I_1\left(\frac{1}{4}f^2\lambda^2 - \frac{2\beta_1\lambda}{l}f\right) \tag{3.4}$$

а из второго получим

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2\left(1 + a_1 f + a_2 f^2\right)f = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{I_1}{\rho h}\Lambda, \qquad \Lambda = \left(\beta_2\lambda^2 - \frac{64}{9}\frac{\beta_1^2}{l^2}\right)\lambda^2 \tag{3.5}$$

$$a_1 = -\frac{2}{3}\frac{\beta_1\lambda^3}{l}\Lambda^{-1}, \quad a_2 = \frac{1}{4}\lambda^4\Lambda^{-1}$$

Появление члена с a_1 вследствие неоднородности интересно само по себе (член с f^2) и его роль существенна в значении нелинейной частоты. Нелинейная частота для уравнения (3.5) имеет вид [5]

$$\omega = \omega_0\left(1 + Aa^2\right), \qquad A = \frac{3}{8}a_2 - \frac{5}{12}a_1^2 \tag{3.6}$$

В [1], следуя другой работе, приводится не совсем точное выражение для нелинейной частоты цилиндрической оболочки, уравнение которой имеет такой же вид, как (3.5) (с.118, формула (2.198)).

Возьмем характерный случай неоднородности

$$E(z) = \bar{E}\left(1 + \frac{2z}{h}\delta\right), \qquad \bar{E} = \frac{E_1 + E_2}{2}, \qquad \delta = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$$

$$\beta_1 = \frac{h}{6}\delta, \quad \beta_2 = \frac{h^2}{12} \tag{3.7}$$

Легко видеть, что при всем изменении δ $\left(0 \le \delta \le 1\right)$ коэффициент A в (3.6) всегда положителен, как и в случае однородной пластинки, т.е. геометрической нелинейности соответствует "жесткая" характеристика.

4. При изучении распространения нелинейных волн в (3.1) инерционный член, как и в [6], удерживается. Кстати, в [6] удержание этого члена привело к интересному результату. Оказывается, в нелинейном дисперсионном соотношении (аналог (3.6)) нелинейный коэффициент отрицательный, что существенно при изучении характера распространения волн модуляции.

Решение (3.1) в этом случае ищется как

$$u = u_0 + \underline{u_1 e^{i\tau}} + u_2 e^{2i\tau} + \text{к.с.} \tag{4.1}$$

$$w = w_1 e^{i\tau} + \underline{w_2 e^{2i\tau}} + \text{к.с.}, \quad \tau = kx - \omega t$$

Подчеркнутые члены для однородного случая отсутствуют.

Подставляя (4.1) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, из первого уравнения получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = k^2\left(w_1\overline{w}_1 + 4w_2\overline{w}_2\right)(1+4H), \qquad u_1 = ik(1+H)(\beta_1 w_1 + 2\overline{w}_1 w_2)$$

$$\overline{u}_1 = -ik(1+H)(\beta_1\overline{w}_1 + 2w_1\overline{w}_2), \qquad u_2 = \frac{1}{4}ik(1+H)\left(8\beta_1 w_2 - w_1^2\right) \tag{4.2}$$

$$\overline{u}_2 = \frac{1}{4}ik(1+H)\left(\overline{w}_1^2 - 8\beta_1\overline{w}_2\right), \qquad H = \frac{h^2k^2}{12}\left(1 - \frac{1}{3}\delta^2\right)$$

При получении (4.2) члены высшего порядка пренебреглись по сравнению с основными (например, $w_2\overline{w}_2 \ll w_1\overline{w}_1$ и т.д.) а $u_0(x)$ – так называемое среднее течение – определялось из условия [7].

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx c\frac{\partial}{\partial x}$$

где c – групповая скорость основной изгибной волны

$$c = \frac{d\omega_0}{dk}, \qquad \omega_0^2 = \frac{I_1}{12\rho h}\left(1 - \frac{1}{3}\delta^2\right)k^4 \tag{4.3}$$

Выражение для w_2 получилось из второго уравнения, пренебрегая инерционным членом от него, и оно есть

$$w_2 = -\frac{3w_1^2}{2h^2}\beta_1 \tag{4.4}$$

Окончательно нелинейное дисперсионное соотношение выглядит как

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{I_1}{8\rho h}\left(9H - \frac{1}{24}\delta^2\right)k^4a^2 \tag{4.5}$$

$$4a^2 = w_1\overline{w}_1$$

Коэффициент при a^2 в однородном случае $(\delta = 0)$ отрицателен, а уже для $\delta > \left[18k^2h^2\left(1 + 6k^2h^2\right)^{-1}\right]^{1/2}$ меняет знак. А это зачит, что в первом случае имеется неустойчивость волн модуляции, как и для однородного случая, а во втором – устойчивость [7].

5. Свободные колебания цилиндрической оболочки изучаются при двух вариантах граничных условий. В первом – для шарнирно-закрепленного случая условия такие, как (3.2) и решение также ищется по (3.3). Для φ и T получатся

$$\varphi = -\frac{1}{8}\lambda f^2 + \frac{2f}{3l}\left(\beta + \frac{1}{R\lambda^2}\right)$$
$$T = I_1\left[\frac{1}{4}f^2\lambda^2 - \frac{2}{l}\left(\frac{\beta_1}{l} + \frac{1}{R\lambda}\right)f\right] \tag{5.1}$$

Уравнение для f имеет такой же вид, как (3.5) с коэффициентами

$$\omega_0^2 = \frac{I_1}{\rho h}\Delta$$
$$\Delta = \left(\frac{h^2}{12}\lambda^2 - \frac{64\beta_1^2}{9l^2}\right)\lambda^2 + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{R}\left(1 + \frac{16}{9l^2\lambda^2}\right) - 2\beta_1\left(\lambda^2 + \frac{24}{l^2}\right)\right]$$
$$a_1 = -\frac{\lambda}{l}\left(\frac{2\beta_1}{3}\lambda^2 + \frac{3}{R}\right)\Delta^{-1} \tag{5.2}$$
$$a_2 = \frac{1}{4}\lambda^4\Delta^{-1}$$

Нелинейная частота определится по (3.6) с новыми a_i, причем коэффициент A может быть как положительным, так и отрицательным. Это имеет место и для однородного материала – коэффициент $A > 0$ примерно при неравенстве $h/l > 0.5l/R$.

Интересен случай свободного шарнира. Тогда вместо условия $u = 0$ ставится $T = 0$. В этом случае надо вспомнить, что первое уравнение в (1.1) приведено для случая пологой оболочки, а точное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial M}{\partial x} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5.3}$$

Теперь, если принять $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx 0$ и учесть связи (1.5), получим

$$T = \frac{1}{R}M, \qquad \varepsilon = \frac{I_1 - RI_2}{RI_1 - I_2}\kappa$$
$$M = D\kappa, \qquad D = \frac{R\left(I_1 I_3 - I_2^2\right)}{RI_1 - I_2} \tag{5.4}$$

Уравнение движения при этом примет вид

$$\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{5.5}$$

которое для $f(t)$ дает

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2\left(1 + a_1 f\right) f = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{\rho h}\Lambda, \qquad \Lambda = \left(\lambda^2 - \frac{1}{R^2}\right)\lambda^2, \qquad a_1 = \frac{4\lambda^4}{3\pi R}\Lambda^{-1} \tag{5.6}$$

Нелинейная частота, определяемая по (3.6),

$$A = -\frac{5}{12}a_1 \tag{5.7}$$

т.е. в этом случае имеется "мягкая" характеристика – нелинейная частота меньше линейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
4. Мовсисян Л.А. К свободным колебаниям неоднородных пластин //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №3 – 4. С.42 – 49.
5. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
6. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. №3. С.3 – 6.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв.НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.34-41.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
20.07.2004