ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 55, №2, 2002 Механика

УДК 539.3

# ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КРУГА

Аванян М. В., Баблоян А.А., Макарян В.С.

Մ. Վ. Ավանյան, Ա. Հ. Բաբլոյան, Վ. Ս. Մակարյան

**Առաձգականության տեսության առաջին հիմնական խնդիրը բաղադրյալ շրջանի համար**

Դիտարկվում է երկու տարբեր նյութերից բաղկացած առաձգական շրջանի համար առաջին հիմնական խնդիրը, երբ երկու բաղադրիչ նյութերն իրարից բաժանվում են երկու շառավիղներով: Տարբեր նյութերի միջև տեղի ունի հպակցում առանց շփման:

Խնդրի լուծումը յուրաքանչյուր նյութի համար ներկայացվում է Ֆուրյեի շարքի և ինտեգրալների գումարի տեսքով. Շրջանի համաչափ բեռնավորման դեպքում անհայտ գործակիցների և խտությունների համար ստացվել են գծային հանրահաշվական հավասարումների երկու անվերջ համակարգեր և մեկ ինտեգրալ հավասարում կիսաառանցքի վրա: Ապացուցվում է, որ այդ անվերջ համակարգերը լիովին ռեգուլյար են: [1,2] եղանակով ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր Ֆուրյեի անհայտ գործակիցների և խտությունների համար: Լարումների և տեղափոխումների որոշման համար ստացվել են հաշվարկային պարզ բանաձևեր:

**M. V. Avanyan, A.A. Babloyan, V.S. Makaryan,**

**The First Basic Problem of the Theory Elasticity for Compound Circle**

Рассматривается первая основная задача для упругого круга из двух различных материалов, когда материалы разделены друг от друга двумя радиусами. Между различными материалами имеет место контакт без трения.

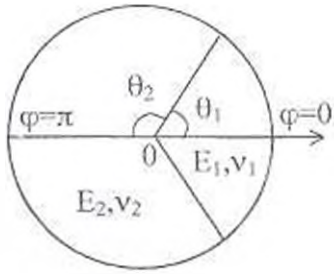
Решение задачи внутри каждого материала представляется в виде суммы интеграла и ряда Фурье. Для определения неизвестных коэффициентов и плотностей при симметричном нагружении круга получена совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и одного интегрального уравнения на полуоси. Доказывается, что эта совокупность уравнений вполне регулярна. Методом [1, 2] получены асимптотические формулы для неизвестных коэффициентов и плотностей Фурье. Окончательно, решение представлено только интегралами Фурье.

Известно, что плоская задача теории упругости сводится к определению бигармонической функции Эри $\Phi(r,\varphi)$. Если сделать замены $r = Re^{-t}$, $F(t,\varphi) = e^{-t}\Phi(r,\varphi)$, то напряжения будут выражаться через функцию $F$ по формулам [3–6]

$$r\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial F}{\partial t} + F,\quad r\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial F}{\partial t},\quad r\tau_{r\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\varphi} \tag{1}$$

Формулы для перемещений могут быть получены из закона Гука (плоское напряженное состояние) путем интегрирования

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\varphi,\quad E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \nu\sigma_r,\quad G\gamma_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} \tag{2}$$




Фиг. 1

Пусть упругий круг состоит из двух различных материалов в виде круговых секторов с упругими постоянными $E_p$, $\nu_p$ и углами растворов $2\theta_p$, соответственно ($p = 1,2$, $\theta_1 + \theta_2 = \pi$) (фиг.1). Внешняя нагрузка распределена симметрично относительно радиусов $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Между различными материалами имеет место полный контакт без трения. При этом функция $F(t,\varphi)$ должна удовлетворять:

а) дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial\varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 1\right)F = 0$$

б) граничным условиям

$$\sigma_{rp}(R,\overline{\varphi}_p) = f_p(\overline{\varphi}_p), \ \tau_{r\varphi p}(R,\overline{\varphi}_p) = 0 \qquad (0 \le \overline{\varphi}_p \le \theta_p, \ p = 1,2) \tag{3}$$

в ) условиям гладкого контакта

$$\sigma_{\varphi 1}(r,\theta_1) = \sigma_{\varphi 2}(r,\theta_2), \ v_{\varphi 1}(r,\theta_1) = v_{\varphi 2}(r,\theta_2)$$

$$\tau_{r\varphi p}(r,\theta_p) = 0 \ (0 \le r \le R, \ p = 1,2) \tag{4}$$

г) условиям симметрии

$$\tau_{r\varphi 1}(r,0) = \tau_{r\varphi 2}(r,\pi) = 0, \ v_{\varphi 1}(r,0) = v_{\varphi 2}(r,\pi) = 0 \tag{5}$$

Внутри $p$-ого материала функцию $F_p(t,\varphi)$ представим в виде суммы ряда и интеграла Фурье

$$F_p(t,\overline{\varphi}) = \left(A_p + B_p t\right)e^{-t} + \frac{1}{\theta_p}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{kp}(t)\cos\alpha_{kp}\overline{\varphi}_p +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} C_p(\gamma)\Phi(\gamma,\overline{\varphi}_p)\cos\gamma t\,d\gamma, \ (p = 1,2) \tag{6}$$

где

$$\alpha_{kp} = \frac{k\pi}{\theta_p}, \ t = \ln\frac{R}{r}, \ \overline{\varphi}_1 = \varphi, \ \overline{\varphi}_2 = \pi - \varphi, \ 0 \le r \le R, \ 0 \le \overline{\varphi}_p \le \theta_p$$

$$\psi_{kp}(t) = (-1)^{p+1} X_{kp}\left[\frac{\exp\left[-(\alpha_{kp}-1)t\right]}{|\alpha_{kp}-1|} - \frac{\exp\left[-(\alpha_{kp}+1)t\right]}{\alpha_{kp}+1}\right] \tag{7}$$

$$\delta_p(\gamma)\Phi'_p(\gamma,\overline{\varphi}_p) = g'_p(\gamma,\overline{\varphi}_p), \ \delta_p(\gamma) = \mathrm{ch}\,2\gamma\theta_p - \cos 2\theta_p$$

$$g'_p(\gamma,\overline{\varphi}_p) = \mathrm{sh}\,\gamma\overline{\varphi}_p \cos\overline{\varphi}_p \,\mathrm{ch}\,\gamma\theta_p \sin\theta_p - \mathrm{ch}\,\gamma\overline{\varphi}_p \sin\overline{\varphi}_p \,\mathrm{sh}\,\gamma\theta_p \cos\theta_p$$

$$S_p(\gamma) = \mathrm{sh}\,2\gamma\theta_p + \gamma\sin 2\theta_p, \qquad (p = 1,2)$$

Удовлетворяя условиям (3)–(5), для определения неизвестных коэффициентов $X_{kp}$ и плотностей $C_p(\gamma)$ получим совокупность уравнений типа [1, 2]

$$X_{kp} = \frac{4\kappa_p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha_{kp}^2 - 1)\gamma Z(\gamma) d\gamma}{\left[\gamma^2 + (\alpha_{kp} - 1)^2\right]\left[\gamma^2 + (\alpha_{kp} + 1)^2\right]} + f_{kp}, \qquad (p = 1,2)$$

$$\Delta(\gamma) Z(\gamma) = \sum_{p=1}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\gamma^2 + 1)\alpha_{kp} X_{kp}}{\theta_p \left[\gamma^2 + (\alpha_{kp} - 1)^2\right]\left[\gamma^2 + (\alpha_{kp} + 1)^2\right]} + \frac{2(B_2 - B_1)}{\gamma^2 + 1} \qquad (8)$$

где использованы обозначения:

$$C_p(\gamma) = \kappa_p Z(\gamma), \; f_{kp} = \int_0^{\theta_p} f_p(\overline{\varphi}_p) \cos \alpha_{kp} \overline{\varphi}_p d\overline{\varphi}_p, \; \Delta_p(\gamma) = S_p(\gamma) / \delta_p(\gamma)$$

$$\Delta(\gamma) = \kappa_1 \Delta_1(\gamma) + \kappa_2 \Delta_2(\gamma), \; \Delta_0(\gamma) = \kappa_1 S_1(\gamma)\delta_2(\gamma) + \kappa_2 S_2(\gamma)\delta_1(\gamma),$$

$$\kappa_p = E_p / (E_1 + E_2), \; (p = 1,2) \qquad (9)$$

Из второго уравнения (8) следует, что неизвестная функция $Z(\gamma)$ имеет простые полюсы в точках $\xi_{kp} = (\pm \alpha_{kp} \pm 1)i \quad (p = 1,2, k = 0,1,2,\dots)$ и в точках $z_k = \gamma_k$, где $\gamma_k$ –корни трансцендентного уравнения $\Delta_0(\gamma) = 0$.

Свободные члены разложений (6) будем определять из уравнений

$$\left(2A_p - B_p\right)\theta_p - \frac{4\kappa_p(-1)^p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma Z(\gamma)}{\left(\gamma^2 + 1\right)^2} d\gamma = f_{0p}, \quad (p = 1,2) \qquad (10)$$

$$\theta_1 B_1 E_2 + \theta_2 B_2 E_1 = 0, \; E_2 a_1 = E_1 a_2, \; A_2 - A_1 = B_2 - B_1$$

Последнее равенство равносильно уравнению равновесия статики $\sum F_x = 0$.

Для полного определения постоянных $a_1$ и $a_2$, входящих в выражения перемещений, помимо условия (10), нужно еще «закрепить» произвольную точку рассматриваемого тела.

При получении (8) и (9) были использованы интегральные разложения по комбинациям тригонометрических функций [4, 5].

Докажем, что совокупность уравнений (8) вполне регулярна. Вычисляя суммы модулей коэффициентов при неизвестных, с точностью до бесконечно малых величин получим

$$\rho_1(X_p) = \frac{\kappa_p(\alpha_{kp}^2 - 1)}{\pi \alpha_{kp}} \ln \frac{\alpha_{kp} + 1}{\alpha_{kp} - 1}, \quad \rho_2(Z) \le \frac{2(\gamma^2 + 1)}{\pi\gamma} \operatorname{arcctg} \frac{\left|\gamma^2 - 1\right|}{2\gamma} \qquad (11)$$

Отсюда следует, что если из системы (8) путем исключения $X_{kp}$ получить интегральное уравнение для определения функции $Z(\gamma)$, то для ядра этого уравнения будем иметь оценку

$$\int_0^{\infty} \left|K(\gamma,\xi)\right| d\xi = \frac{1}{2}\left[\rho_1(X_1) + \rho_1(X_2)\right]\rho_2(Z) \le \frac{4(\kappa_1 + \kappa_2)}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2} \qquad (12)$$

Свободные члены систем (8) при возрастании аргумента стремятся к нулю. Следовательно, система (8) вполне регулярна.

Налагая незначительные ограничения на внешнюю нагрузку и пользуясь методом [1, 2], нетрудно доказать, что неизвестные коэффициенты и плотность имеют следующее асимптотическое поведение:

$$X_{kp} = k_p Z_0 \alpha_{kp}^{-1}, \quad Z(\gamma) = Z_0 \gamma^{-1}, \quad (k, \gamma >> 1) \tag{13}$$

Исследование показывает, что при граничных условиях (3) напряжения в точках пересечений линии контакта с границей круга остаются ограниченными [1, 2].

Вводим новую неизвестную функцию $Z_0(\gamma) = \Delta(\gamma) Z(\gamma)$ и подставим выражение этой функции из второго уравнения системы (6) в интегральную слагаемую формулы (8).

Из вышесказанного следует, что новая неизвестная функция $Z_0(\gamma)$ имеет простые полюсы только в точках $\xi_{kp} = (\pm \alpha_{kp} \pm 1) i$ $(p = 1,2, k = 0,1,2,\ldots)$. Поэтому после применения теории вычетов слагаемые, содержащие неизвестные коэффициенты $X_{kp}$, взаимно сокращаются и функции $F_p$ принимают следующий окончательный вид:

$$F_p(t, \overline{\varphi}_p) = (A_p + B_p t) e^{-t} + 2i\kappa_p \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} Выч\left[H_p(\gamma, t, \overline{\varphi}_p), \ \gamma = z_k\right] \tag{14}$$

где $z_k$ –корни трансцендентного уравнения $\Delta_0(\gamma) = 0$, а функции $H_p(\gamma, t, \overline{\varphi}_p)$ определяются формулами

$$H_p(\gamma, t, \overline{\varphi}_p) = \frac{Z_0(\gamma) \delta_q(\gamma) g_p(\gamma, \overline{\varphi}_p)}{\Delta_0(\gamma)} e^{i\gamma t}, \quad (p = 1,2; \ p + q = 3) \tag{15}$$

Из последних двух формул следует, что напряженное состояние в достаточно обширной окрестности центра круга характеризуется только корнями $\Delta_0(\gamma)$. При этом введенные ранее постоянные $X_{kp}$ (первая сумма в (6)) являются только промежуточными величинами, так как они не входят в окончательные расчетные формулы (14) и (15). Эти величины можно исключить также из бесконечных систем (8) и получить оттуда интегральное уравнение для определения функции $Z(\gamma)$, норма которого не превышает 0.41.

В частном случае, когда $\theta_1 = \theta_2 = \pi / 2$ (гладкий контакт двух полукругов при симметричном нагружении), окончательное решение задачи дается формулами

$$\alpha_{kp} = \alpha_k = 2k, \ \gamma_k = 2k - 1, \ \delta_p(\gamma) = \operatorname{ch}\gamma\pi + 1, \ S_p(\gamma) = \operatorname{sh}\gamma\pi, \ (p = 1; 2)$$

$$\Delta(\gamma) = \Delta_p(\gamma) = \operatorname{th}\frac{\gamma\pi}{2}, \ \Delta_0(\gamma) = (\operatorname{ch}\gamma\pi + 1)\operatorname{sh}\gamma\pi$$

$$H_p(\gamma, t, \overline{\varphi}_p) = (-1)^{p-1} \frac{Z_0(\gamma)\left(\gamma \operatorname{ch}\gamma\overline{\varphi}_p \cos\overline{\varphi}_p + \operatorname{sh}\gamma\overline{\varphi}_p \sin\overline{\varphi}_p\right)}{2(\gamma^2 + 1)\operatorname{ch}(\pi\gamma/2)} e^{i\gamma t}$$

$$\begin{aligned} F_p(t, \overline{\varphi}) = {} & (A_p + B_p t) e^{-t} + \frac{\kappa_p}{2\pi}\Big[Z_0(i) e^{-t} \cos 2\overline{\varphi} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Z_0(i\gamma_k)\left[\gamma_k \cos\gamma_k\overline{\varphi}\cos\overline{\varphi} + \sin\gamma_k\overline{\varphi}\sin\overline{\varphi}\right]}{k(k-1)} e^{-\gamma_k t}\Big] \end{aligned} \tag{16}$$

Для этого случая бесконечные системы (8) представляются в виде

$$\kappa_2\left(X_{k1}-f_{k1}\right)=\kappa_1\left(X_{k2}-f_{k2}\right) \tag{17}$$

$$X_{k1}+X_{k2}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(4k^2-1\right)\gamma\,\mathrm{cth}(\gamma\pi/2)Z_0(\gamma)}{\left[\gamma^2+(2k-1)^2\right]\left[\gamma^2+(2k+1)^2\right]}d\gamma+f_{k1}+f_{k2}$$

$$Z_0(\gamma)=\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\left(\gamma^2+1\right)k\left(X_{k1}+X_{k2}\right)}{\left[\gamma^2+(2k-1)^2\right]\left[\gamma^2+(2k+1)^2\right]}+\frac{2\left(B_2-B_1\right)}{\gamma^2+1}$$

Решение этой же задачи, когда внешняя нагрузка распределена кососимметрично относительно лучей $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, может быть получено аналогичным образом.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова Думка. 1978. 264 с.
2. Улитко Н.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка. 1979. 262 с.
3. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.:Наука. 1984. 258 с.
4. Баблоян А.А., Макарян В.С. Парные интегральные уравнения, содержащие тригонометрические функции. // Изв. НАН Армении. Механика. Т. 49. №2. 1996. С. 8-18.
5. Баблоян А.А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. // Изв. АН Арм. ССР. сер. физ.-мат. н. 1962. Т. 15. №1. С. 87-101.
6. Макарян В.С., Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1990. Т. 43. №2. С. 3-11.



Ереванский госуниверситет
архитектуры и строительства



Поступила в редакцию
06.03.2002