ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 539.3; 62.50

ОБ УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Айрапетян В.В., Гукасян А.А.

Վ.Վ.Հայրապետյան, Ա.Ա. Ղուկասյան
Առաձգական էլեմենտներով թռչող սարքի մի մոդելի ղեկավարվող շարժման մասին

Աշխատանքում բերվում է առաձգական էլեմենտներով (սալերով) թռչող սարքի մի մոդելի նկարագրությունը: Սալերի տեղափոխության փոքրության և կողմնորոշման համակարգի մասին որոշակի ենթադրությունների դեպքում ստացված են շարժման գծային և սալերի առաձգական տատանումների հավասարումները: Բերված է ղեկավարման մի կիբեռնետիկական սխեմա, որը հաշվի է առնում թռչող սարքի առաձգական հատկությունները:

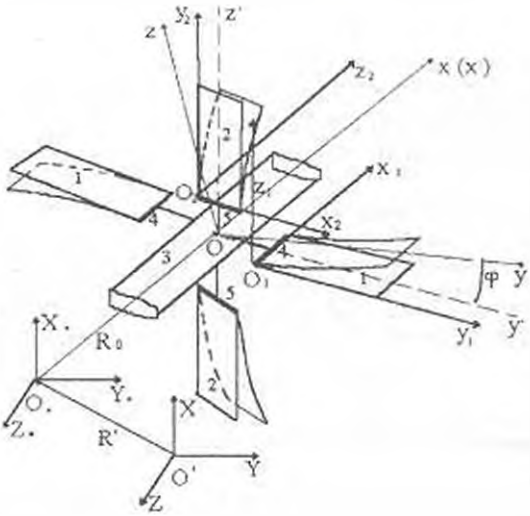
V.V. Hayrapetyan, A.A. Ghukasyan
On controlled motion of one model of an aircraft with elastic elements

В работе приводится описание одной модели летательного аппарата (ЛА) с упругими элементами типа пластин. При некоторых предположениях относительно малости смещений пластин и системы ориентации получены линейные уравнения движения ЛА и уравнения упругих колебаний пластин. Приведена одна кибернетическая схема управления, учитывающая упругие свойства ЛА.

1.Описание кинематической модели ЛА. Рассматривается управляемое движение упругого летательного аппарата (ЛА) в центральном гравитационном поле Земли. ЛА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело с закрепленными к нему упругими пластинами (фиг. 1). Пара пластин 1 перпендикулярна паре пластин 2. Края пластин жестко заделаны к абсолютно жестким стержням 4,5. Пластины однородные с толщиной h и размерами $(a \times b)$. Они характеризуются плотностью ρ, модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D. Радиус центрального тела обозначим через q.

Введем инерциальную систему координат $O_*X_*Y_*Z_*$ (фиг. 1). В зависимости от характера исследований в качестве системы $O_*X_*Y_*Z_*$ можно выбрать также какую-либо квазиинерциальную систему координат, ускорение и угловая скорость которой считаются пренебрежимо малыми. Например, начало координат O_* можно поместить в центре планеты, одну ось направить по оси вращения планеты, вторую и третью расположить в плоскости экватора. В другом случае одну ось совмещают с радиус-вектором перигея орбиты, вторую проводят по нормали к плоскости орбиты, а третью – параллельно трансверсали. В любом случае система $O_*X_*Y_*Z_*$ предполагается невращающейся и равномерно-перемещающейся [1]. Здесь мы введем еще одну систему координат $O'XYZ$, положение которой известно относительно $O_*X_*Y_*Z_*$ и в начале которой может находиться пункт наблюдения. Соответствующие оси систем $O_*X_*Y_*Z_*$ и $O'XYZ$

параллельны. Для описания кинематики ЛА вводится также связанная прямоугольная система координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс ЛА, а ось Ox направлена вдоль продольной оси ЛА.



Фиг.1

Будем рассматривать поступательное движение ЛА вдоль оси Ox и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат $O_*X_*Y_*Z_*$ относительно $O'XYZ$ определим радиус-вектором $\mathbf{R}'$, а положение центра масс ЛА относительно системы $O_*X_*Y_*Z_*$ $\mathbf{R}_0$. Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор $\mathbf{r}$. Абсолютное положение точек ЛА определяется вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \tag{1.1}$$

Для исследования упругих колебаний пластин 1,2 введем соответственно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, начала которых в связанной системе известны (фиг.1). Ориентация связанной системы Oxyz относительно $O'XYZ$ определяется тремя углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, называемые самолетными углами [2]. Матрица перехода между системами $Oxyz$ и $O'XYZ$ в нашем случае имеет следующий вид:

	X	Y	Z
x	c_1c_3	$c_1s_3+s_1s_2c_3$	$s_1s_3-c_1s_2c_3$
y	$-c_2s_3$	$c_1c_3-s_1s_2s_3$	$s_1c_3-c_1s_2s_3$
z	s_2	$-s_1c_2$	c_1c_2

где $\sin\theta_k = s_k$, $\cos\theta_k = c_k$, $k = 1,2,3$.

Для определения вращения ЛА введем жестко связанную с ЛА систему координат $Ox'y'z'$. Ось совпадает с осью Ox, ось Oy' находится в плоскости недеформированных пластин 1, ось Oz' – в плоскости недеформированных пластин 2. Вращение ЛА определится углом φ (фиг.1).

Обозначая радиус-вектор произвольной точки пластины 1 через $\mathbf{r}_1$, а точки пластины 2 через $\mathbf{r}_2$ в системе $Oxyz$, имеем

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - b/2 \\ (q+l+y_1)\cos\varphi - w_1\sin\varphi \\ (q+l+y_1)\sin\varphi + w_1\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{r}_2=\begin{pmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_2 \\ (x_2-b/2)\cos\varphi-(q+l+y_2)\sin\varphi \\ (x_2-b/2)\sin\varphi+(q+l+y_2)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

где $w_1=w_1(t,x_1,y_1)$ и $w_2=w_2(t,x_2,y_2)$ — упругие перемещения точек пластин в системах $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ соответственно, а l — длина жесткого стержня, соединяющего пластину с основным телом.

Для удобства элементы матрицы перехода между системами $O'XYZ$ и Oxyz обозначим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_2c_3 & c_1s_3+s_1s_2c_3 & s_1s_3-c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3-s_1s_2s_3 & s_1c_3-c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

С учетом (1.2), (1.3) и предполагая, что радиус-вектор R_0 направлен по оси вращения ЛА, радиус-векторы точек пластин 1,2 соответственно (1.1) примут вид

$$\mathbf{R}_i=\begin{pmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X+a_{xx}R_0+a_{xx}r_{ix}+a_{yx}r_{iy}+a_{zx}r_{iz} \\ Y+a_{xy}R_0+a_{xy}r_{ix}+a_{yy}r_{iy}+a_{zy}r_{iz} \\ Z+a_{xz}R_0+a_{xz}r_{ix}+a_{yz}r_{iy}+a_{zz}r_{iz} \end{pmatrix},\quad i=1,2 \quad (1.4)$$

$\dot{\mathbf{R}}_i$ $i=1,2$ имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{R}}_i=\begin{pmatrix} a_{xx}\dot{R}_0+a_{xx}\dot{r}_{ix}+a_{yx}\dot{r}_{iy}+a_{zx}\dot{r}_{iz} \\ a_{xy}\dot{R}_0+a_{xy}\dot{r}_{ix}+a_{yy}\dot{r}_{iy}+a_{zy}\dot{r}_{iz} \\ a_{xz}\dot{R}_0+a_{xz}\dot{r}_{ix}+a_{yz}\dot{r}_{iy}+a_{zz}\dot{r}_{iz} \end{pmatrix},\quad i=1,2 \quad (1.5)$$

При вычислениях $\dot{\mathbf{R}}_i$ $i=1,2$ учитывается, что наблюдательный пункт неподвижен относительно системы $O.X.Y.Z.$, а $\theta_1,\theta_2,\theta_3=\text{const}$.

2. **Вывод уравнений движения и колебаний пластин.** Поступательное движение и вращение ЛА происходят за счет внешней силы **F**, направленной вдоль оси Ox и вращательного момента **M**, приложенной вокруг той же оси.

Кинетическая энергия движения ЛА имеет вид

$$T=\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{m_c}{2}\dot{\mathbf{R}}_0^2+\rho h\iint_\Omega \dot{\mathbf{R}}_1^2 d\Omega+\rho h\iint_\Omega \dot{\mathbf{R}}_2^2 d\Omega \quad (2.1)$$

где I — момент инерции основного тела 3 относительно оси Ox, $d\Omega$ — элемент площади срединной плоскости пластин, m_c — масса ЛА без пластин. Первое и второе слагаемые в (2.1) представляют собой кинетическую энергию вращательного и поступательного движений ЛА без пластин. Третий и четвертый слагаемые представляют кинетические энергии первой и второй пар пластин соответственно.

Потенциальная энергия ЛА состоит из потенциальных энергий упругой деформации[3] и гравитационных сил

$$U = D\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}-\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y_i}\right)^2\right]\right\}d\Omega + mgR_0 \quad (2.2)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$, ν – коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластин мало по сравнению с линейными размерами, а цилиндрическая жесткость на изгиб велика($D \sim \varepsilon^{-1}$, $w_i/\max(a,b) \sim \varepsilon$ $i=1,2$, $\varepsilon<<1$) [4]. Из этих предположений следует также, что $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$, $\dot{R}_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{R}_0 \sim \varepsilon$.

Для получения уравнений движения ЛА и колебаний пластин воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского[2]

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T + A - U)dt = 0 \quad (2.3)$$

где δT – вариация кинетической энергии, δU – вариация потенциальной энергии, δA – элементарная работа внешней силы F и внешнего момента M на виртуальных перемещениях $\delta R_0, \delta\varphi$. t_1, t_2 – соответственно начальное и конечное время движения, причем $\delta\varphi = \delta w_1 = \delta w_2 = \delta R_0 = 0$ при $t = t_1, t_2$. В выражениях $\delta T, \delta U, \delta A$, оставляя члены, порядок которых не превышает ε, получим следующие уравнения движения ЛА и колебаний пластин:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F + 2a_K\ddot{\varphi}\sin\varphi + 2d_1\rho h\ddot{\varphi}\cos\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_2)d\Omega - 2\rho h\iint_{\Omega}\ddot{w}_2 d\Omega -$$

$$-2d_1\rho h\dot{\varphi}^2\sin\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_2)d\Omega - 2a_K\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2d_1\rho h\iint_{\Omega}\ddot{w}_1\sin\varphi d\Omega \quad (2.4)$$

$$I\ddot{\varphi} + 2a_{\varphi 1}\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 2a_{\varphi 2}\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2a_{\varphi 3}\ddot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi - 2a_{\varphi 4}\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi -$$

$$-a_{\varphi 3}\dot{\varphi}^2\cos 2\varphi + 2d_2\rho h\sin^2\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_1(q+l+y_1)d\Omega +$$

$$+2\rho h\cos^2\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_1(q+l+y_1)d\Omega - 2a_{\varphi 5}\ddot{R}_0\sin\varphi - 2d_1\rho h\ddot{R}_0\cos\varphi\iint_{\Omega}(q+l+y_1)d\Omega -$$

$$-2d_1\rho h\sin\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_2(x_2-b/2)d\Omega - 2d_1\rho h\cos\varphi\iint_{\Omega}\ddot{w}_2(q+l+y_2)d\Omega = M(t) \quad (2.5)$$

$$\ddot{w}_1(d_2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1 = -d_2(q+l+y_1)\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - (q+l+y_1)\ddot{\varphi}\cos^2\varphi +$$

$$+d_3(q+l+y_1)\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + d_1\ddot{R}_0(\sin\varphi - \cos\varphi) \quad (2.6)$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g - d_1(q+l+y_2)\ddot{\varphi}\cos\varphi + d_1(x_2-b/2)\ddot{\varphi}\sin\varphi -$$

$$-d_1(q+l+y_2)\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + d_1(x_2-b/2)\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \quad (2.7)$$

с начальными и граничными условиями

$$R_0(t_0) = R_{00}, \dot{R}_0(t_0) = V_0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 \tag{2.8}$$

$$w_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^1(x_i, y_i), \dot{w}_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^2(x_i, y_i) \quad i = 1,2 \tag{2.9}$$

$$w_i(t, x_i, y_i)\Big|_{y_i=0} = 0; \quad \frac{\partial w_i(t, x_i, y_i)}{\partial y_i}\Bigg|_{y_i=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2}\right)\Bigg|_{y_i=a} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^2 \partial y_i}\right]\Bigg|_{y_i=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)\Bigg|_{x_i=0} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2 \partial x_i}\right]\Bigg|_{x_i=0} = 0; \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2}\right)\Bigg|_{x_i=b} = 0; \qquad \left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2 \partial x_i}\right]\Bigg|_{x_i=b} = 0; \qquad i = 1,2$$

где

$$d_1 = \sin 2\theta_3 \sin^2\theta_2 \cos^2\theta_1 - \sin 2\theta_1 \sin\theta_2 \sin^2\theta_3$$

$$d_2 = 1 - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin\theta_2, \quad d_3 = 1 - d_2 = \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin\theta_2$$

$$a_R = d_1 \rho h \iint_\Omega (q + l + y_1 + x_2 - b/2)\, d\Omega$$

$$a_{\varphi 1} = d_2 \rho h \iint_\Omega [(q + l + y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2]\, d\Omega + \rho h \iint_\Omega (q + l + y_2)^2\, d\Omega$$

$$a_{\varphi 2} = d_2 \rho h \iint_\Omega (q + l + y_2)^2\, d\Omega - \rho h \iint_\Omega [(q + l + y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2]\, d\Omega$$

$$a_{\varphi 3} = 2 d_3 \rho h \iint_\Omega (x_2 - b/2)(q - l + y_2)\, d\Omega$$

$$a_{\varphi 4} = d_3 \rho h \iint_\Omega [(q + l + y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2 - (q + l + y_2)^2]\, d\Omega$$

$$a_{\varphi 5} = d_1 \rho h \iint_\Omega (x_2 - b/2 + q + l + y_1)\, d\Omega$$

В дальнейшем для аналитического исследования уравнений колебаний пластин, предполагается что ось O_1X_1 совпадает с осью вращения ЛА. При этом уравнения движения (2.4), (2.5) и уравнения колебаний пластин(2.6), (2.7) принимают следующий вид:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F - 2\rho h \iint_\Omega \ddot{w}_2\, d\Omega \tag{2.11}$$

$$2a_{\varphi 1}\ddot{\varphi}\rho h + 2\rho h \iint_\Omega \ddot{w}_1 (q + l + y_1)\, d\Omega + I\ddot{\varphi} = M(t) \tag{2.12}$$

$$\ddot{w}_1 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_1 = -\ddot{\varphi}(q + l + y_1) \tag{2.13}$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g \tag{2.14}$$

3.Решение краевой задачи и учет упругости пластин в системе управления ЛА. Краевую задачу (2.13),(2.14),(2.9),(2.10) можно представить в виде

$$\ddot{w}_i + \frac{D}{\rho h}\Delta^2 w_i = \Phi_i \qquad i = 1,2 \tag{3.1}$$

где $\Phi_1 = -\ddot{\varphi}(q + l + y_1)$, $\Phi_2 = -\ddot{R}_0 + g$.

В (3.1) можно перейти к безразмерным переменным, введя единицу времени и длины соответственно по формулам $\theta = (D_* / \rho_0 d)^{1/2}$, $d = (ab)^{1/2}$, где D_* – единица измерения жесткости на изгиб, а ρ_0 – единица измерения плотности.

Решение уравнения (3.1) с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи[3]

$$w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(t) X_{mi}(x_i) Y_n(y_i) \tag{3.2}$$

Функции $X_{mi}(x_i)$, $Y_n(y_i)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок, которыми аппроксимируются пластины. $X_{mi}(x_i)$ – собственная форма колебаний свободной балки, а $Y_n(y_i)$ – собственная форма колебаний балки, жестко заделанной на конце $y_i = 0$, и свободным на конце $y_i = a$.

Подставляя (3.2) в (3.1) и (2.9), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w_{mn}(t)$

$$\ddot{w}_{mn}(t) + k_{mn}^2 w_{mn}(t) = \Phi_{mn}[t] \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$w_{mni}(t_0) = \iint_{\Omega} F_i^1(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^1$$

$$\dot{w}_{mni}(t_0) = \iint_{\Omega} F_i^2(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^2 \tag{3.4}$$

где

$$k_{mni}^2 = \frac{D}{\rho h}\left[\lambda_n^4 + \mu_m^4 + 2\iint_{\Omega} X_{mi}''(x_i) Y_{ni}''(y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega\right]$$

$$\Phi_{mni}[t] = \iint_{\Omega} \Phi_i X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega \qquad i = 1,2$$

а λ_n, μ_m – собственные частоты балок. Решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) имеет вид

$$w_{mn}(t) = c_{mn}^1 \cos k_{mn} t + c_{mn}^2 \sin k_{mn} t + \frac{1}{k_{mn}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}(t - \tau) d\tau \tag{3.5}$$

где

$$c^1_{mni} = F^1_{mni}\cos k_{mni} t_0 + \frac{F^2_{mni}}{k_{mni}}\sin k_{mni} t_0, \quad c^2_{mni} = F^1_{mni}\sin k_{mni} t_0 + \frac{F^2_{mni}}{k_{mni}}\cos k_{mni} t_0$$

Следовательно, упругие колебания пластин ЛА во время движения определяются выражением

$$w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty}[c^1_{mni}\cos k_{mni} t + c^2_{mni}\sin k_{mni} t +$$
$$+ \frac{1}{k_{mni}}\int_{t_0}^{t}\Phi_{mni}[\tau]\sin k_{mni}(t-\tau)d\tau]X_{mi}(x_i)Y_{ni}(y_i) \quad (3.6)$$

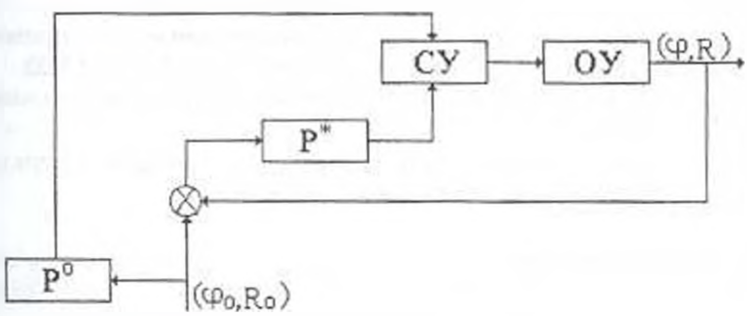
Выражение (3.6) используется при введении колебательного эффекта в систему управления ЛА, поскольку при управлении упругими ЛА появляются дополнительные отклонения от программного движения. Для коррекции программного движения ЛА необходимо в системе управления ввести дополнительный регулятор с обратной связью, который вырабатывает управляющие силы и моменты, в зависимости от упругих колебаний пластин. Эти силы и моменты в задачах кинематического управления в данном случае определяются из (2.11), (2.12) в виде

$$F^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega$$

$$M^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega$$

где $w_i(t, x_i, y_i)$, $i = 1,2$ определяются из (3.6).

На фиг.2 схематично представлена кибернетическая схема управления ЛА с упругими свойствами



Фиг.2

P^0 – регулятор жесткой модели ЛА; P^*-регулятор, учитывающий упругий эффект ЛА; СУ-система управления; ОУ-объект управления

4. О сходимости полученных рядов. В уравнениях (3.1) Φ_i $(i = 1,2)$ являются обобщенными управляющими воздействиями из класса кусочно-непрерывных и ограниченных функций, коэффициенты Фурье которых имеют порядок $\frac{1}{m^{2+\alpha} n^{2+\alpha}}$, $\alpha > 0.5$, следовательно, левые части уравнений (3.1) тоже являются ограниченными функциями и должны принадлежать классу L^2. Мы должны показать, что ряды (3.6) и их смешанные производные четвертого порядка по x_i, y_i, а также вторая производная по t сходятся с квадратом. Как видно из (3.1), $w_i(t, x_i, y_i)$ четырежды дифференцируемы по x_i, y_i и дважды дифференцируемы по t. Так как левые части уравнений (3.1) принадлежат классу L^2, то функции $F_i^1(x_i, y_i)$, $F_i^2(x_i, y_i)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\partial^4 F_i^1 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, \ \partial^4 F_i^2 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, \ k, l = \overline{0, 4}; \quad k + l = 4 \qquad (4.1)$$

С другой стороны μ_m, λ_n зависят от m, n линейно [5]. Ряды коэффициентов Фурье функций (4.1) удовлетворяют неравенству Бесселя [6] и должны иметь порядок $\frac{1}{m^{k+\alpha} n^{l+\alpha}}, \alpha > 0.5; \ k, l = \overline{0, 4}; \quad k + l = 4$. Тогда коэффициенты Фурье функции $F_i^1(x_i, y_i)$, $F_i^2(x_i, y_i)$ будут иметь порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$. Следовательно, коэффициенты c_{mn}^1, c_{mn}^2 (3.5) имеют порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$, где $\alpha > 0.5$.

Таким образом, из постановки задачи следует, что ряды (3.6) и их производные по t, x_i, y_i сходятся с квадратом и их предельные функции принадлежат классу L^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. -М.:Машиностроение, 1987. 232с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика.-М.:Наука, 1977. 736с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.:Наука, 1968. 559с.
4. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки.-Изв.АН Арм. ССР. Механика, 1990, N°4, с.13-23.
5. Вибрации в технике. Под ред. В.В. Болотина.-М.:Машиностроение, т.1, 1978. 352с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. —М.:Наука. 1968. 496с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 28.06.1999