

ЛЕЖАЩЕЙ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Агабекян П.В., Агаян К.А.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Ն.Լ. Աղաբեկյան

သတင်း

Հիմնադրվում է հաստիքային կյանախորհրդայն վերա դրված, ելվող տարբեր կյանատիկայ մոտեցիկ
բաղկացում, անվերջ եկամտի ծախսի կոմունալությունի խնդիրը: Չորսյելի ընդհանրացված ձևով խորքային և
խանդավախությունի միջոցի պոնորայում կոմունալում է խնդիրի փակ լուծումը:

P. V. Agabekyan, K. L. Agayan

Bending of an Infinite Non-homogeneous Beam, Lying on an Elastic Half-plane

Рассматривается контактный задача об изгибе бесконечной балки, состоящей из двух разнотипных полубесконечных частей, лежащих на границе упругой полуплоскости. При помощи обобщенного преобразования Фурье и метода факторизации построено явкнутое решение задачи.

Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой сдавливается бесконечной кусочно-однородной балкой, с модулем упругости $E(x) = E_1 \theta(-x) + E_2 \theta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Исследование ведется без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от границы упругой полуплоскости. Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Строится замкнутое решение задачи.

Рассмотренная здесь задача относится к достаточно хорошо изученной области теории контактных задач о взаимодействии тонкостенных элементов в виде балок, плит и накладок с линейноупругими основаниями. Не останавливаясь на подробностях, которые можно найти в [1], укажем лишь работы [2-6], тесно связанные с изучаемой здесь задачей. В [2, 3] получено замкнутое решение задач об изгибе бесконечной кусочно-однородной и полубесконечной плиты на упругом полупространстве. В [4] и [5] построено замкнутое решение задач о контактном взаимодействии бесконечной кусочно-однородной накладки и полубесконечной балки с упругой полуплоскостью. В [6] рассмотрена та же задача для полосы, что и в [5], но с учетом касательных контактных напряжений. Здесь решение задачи сведено к системе фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть, кусочно-однородная бесконечная балка вдавливается на границу упругой полуплоскости с помощью сил $P\delta(x+a)$ и $Q\delta(x-b)$, приложенных на балку. Ось Ox направлена по границе полуплоскости, а

Оу — по ее внутренней нормали. Тогда для двух полубесконечных частей балки будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} D_1 \frac{d^4 v}{dx^4} &= P\delta(x+a) - q(x), & -\infty < x < 0 \\ D_2 \frac{d^4 v}{dx^4} &= Q\delta(x-b) - q(x), & 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} v(-0) &= v(+0), \quad v'(-0) = v'(+0) \\ D_1 \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=-0} &= D_2 \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=+0} \\ D_1 \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=-0} &= D_2 \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=+0} \end{aligned} \quad (1')$$

где $v(x)$ — вертикальные перемещения балки, $q(x)$ — интенсивность нормальных контактных напряжений, $D_1 = E_1 J_z$, $D_2 = E_2 J_z$, J_z — момент инерции относительно оси Oz , перпендикулярной к плоскости $хоу$.

Введем функции

$$\begin{aligned} A^\pm(x) &= \theta(\pm x)A(x), \quad \bar{A}^\pm(\sigma) = \int_{\pm\infty}^\infty A^\pm(x)e^{i\sigma x} dx \\ A^+(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{A}^+(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \end{aligned}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. В дальнейшем функции типа $A^\pm(x)$ будем называть $(+)$ функцией, $A^-(x)$ — $(-)$ функцией. Причем известно, что $F^{-1}[\bar{A}^-(\sigma)\bar{B}^-(\sigma)]$ является $(+)$ функцией, а $F^{-1}[\bar{A}^+(\sigma)\bar{B}^-(\sigma)]$ — $(-)$ функцией. Здесь F — прямое, а F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Введем еще функцию $V(x) = \theta(-x)\frac{dV}{dx} + \theta(x)\frac{dV}{dx}$. Применяя к $V(x)$ операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, из (1) при помощи условий (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^3 V}{dx^3} &= -\frac{1}{D_1} q^-(x) - \frac{1}{D_2} q^+(x) + a_0 \delta(x) + a_1 \delta'(x) + \\ &+ \frac{P}{D_1} \delta(x+a) + \frac{Q}{D_2} \delta(x-b), \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Здесь } \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=+0} - \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=-0} = a_1$$

$$\text{где } a_1 = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) M_0$$

M_0 — изгибающий момент в точке $x = 0$.

$$\frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=+0} - \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x=-0} = a_1$$

$$\text{где } a_0 = \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) Q_0$$

Q_0 — перерезывающая сила при $x = 0$

Условия равновесия балки запишутся в виде

$$\int q(x) dx = P + Q, \quad \int x q(x) dx = bQ - aP \quad (3)$$

Далее, применяя в (2) обобщенное преобразование Фурье, будем иметь

$$i\sigma \bar{V}(\sigma) = -\frac{1}{D_1} \bar{q}^+(\sigma) - \frac{1}{D_2} \bar{q}^-(\sigma) + a_0 - i\sigma a_1 + \frac{P}{D_1} e^{-i\sigma a} + \frac{Q}{D_2} e^{i\sigma b} \quad (4)$$

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем

$$\frac{du_z(x, 0)}{dx} = \frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s)}{s-x} ds, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (5)$$

где $u_z(x, 0)$ — вертикальные перемещения граничных точек упругой полуплоскости, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона упругой полуплоскости. Условие контакта между балкой и полуплоскостью имеет вид

$$\frac{du_z(x, 0)}{dx} = V(x), \quad (-\infty < x < \infty) \quad (6)$$

Применив к (5) и (6) преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, получим

$$\bar{V}(\sigma) = -\frac{(1-\nu)/\text{sgn}(\sigma)}{\mu} \bar{q}(\sigma) \quad (7)$$

где $\bar{q}(\sigma) = \bar{q}^+(\sigma) + \bar{q}^-(\sigma)$. Далее, подставив (7) в (4), получим искомое разрешающее функциональное уравнение.

$$(\lambda_1^3 + |\sigma|^3) \bar{q}^+(\sigma) + (\lambda_2^3 + |\sigma|^3) \bar{q}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (8)$$

где

$$\lambda_1 = [\mu(1-\nu)D_1]^{1/3}, \quad \lambda_2 = [\mu(1-\nu)D_2]^{1/3}$$

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda_1^3 P e^{-i\sigma b} + \lambda_2^3 Q e^{i\sigma a} + \frac{\mu}{1-\nu} (a_0 - i\sigma a_1)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8). Для решения этого уравнения запишем его заново в виде

$$\bar{K}(\sigma) \bar{q}^+(\sigma) + \bar{q}^-(\sigma) = \bar{f}_1(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (9)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\lambda_2^3 + |\sigma|^3}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3}, \quad \bar{f}_1(\sigma) = \frac{\bar{f}(\sigma)}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3}$$

Теперь приступим к решению уравнения (9) [5,7]. Для этого факторизуем $\bar{K}(\sigma)$, представив ее в виде

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) \bar{K}^-(\sigma) \quad (10)$$

где $\bar{K}^+(\sigma)$ является преобразованием Фурье (+) функции, а $\bar{K}^-(\sigma)$ — (-) функции. Причем

$$\bar{K}^+(\sigma) = \exp(\bar{R}^+(\sigma)), \quad \bar{K}^-(\sigma) = \exp(\bar{R}^-(\sigma))$$

$$\bar{R}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} R(z) e^{i\sigma z} dz, \quad \bar{R}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 R(z) e^{i\sigma z} dz$$

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_2^3 + |\sigma|^3}{\lambda_1^3 + |\sigma|^3} \right) e^{-i\sigma z} d\sigma, \quad -\infty < z < \infty$$

Заметим, что из абсолютной интегрируемости $R(z)$ следует, что $\bar{R}^+(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $(\bar{K}^-(\sigma))^{-1}$ тоже является преобразованием Фурье (-) функций. Следовательно, $\bar{K}^+(\sigma) \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Далее, имея в виду (10), уравнение (9) запишем в виде

$$\bar{K}^-(\sigma) \bar{q}^+(\sigma) + \frac{\bar{q}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} \quad (11)$$

Представим $\bar{f}_1(\sigma)/\bar{K}^-(\sigma)$ в виде

$$\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \bar{\varphi}^+(\sigma) + \bar{\varphi}^-(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (12)$$

где

$$\bar{\varphi}^+(\sigma) = \int_0^{\infty} \varphi(u) e^{i\sigma u} du, \quad \bar{\varphi}^-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 \varphi(u) e^{i\sigma u} du$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} e^{-i\sigma u} d\sigma$$

Заметим, в котором нетрудно убедиться, что $\varphi(u)$ является абсолютно интегрируемой функцией, то есть $\bar{\varphi}^+(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Имея в виду (12), уравнение (11) запишется в виде

$$\bar{M}^+(\sigma) = \bar{K}^-(\sigma) \bar{q}^+(\sigma) - \bar{\varphi}^-(\sigma) = \bar{\varphi}^+(\sigma) - \frac{\bar{q}^-(\sigma)}{\bar{K}^-(\sigma)} = \bar{L}^-(\sigma), \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что $\bar{M}^+(x)$ и $\bar{L}^-(x)$ являются обобщенными функциями, сосредоточенные в нулевой точке, причем [8]

$$M^+(x) = L^-(x) = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(x) \quad (14)$$

где $\delta^{(0)}(x) = \delta(x)$, а $\delta^{(k)}(x)$ — производные функции Дирака $\delta(x)$.
Применив к (14) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\bar{M}^*(\sigma) = \bar{L}^*(\sigma) = \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k$$

то есть

$$\begin{aligned} \bar{K}^*(\sigma) \bar{q}^*(\sigma) - \bar{\varphi}^*(\sigma) &= \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k \\ \bar{\varphi}^*(\sigma) - \frac{\bar{q}^*(\sigma)}{\bar{K}^*(\sigma)} &= \sum_{k=0}^n b_k \sigma^k \end{aligned} \quad (15)$$

Если учесть, что $\bar{q}^*(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ (из абсолютной интегрируемости $q(x)$) и поведении функций $\bar{K}^*(\sigma)$, $\bar{\varphi}^*(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, будем иметь, что $b_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Тогда, как следует из (15), искомое решение задачи будет иметь вид

$$\bar{q}^*(\sigma) = \bar{\varphi}^*(\sigma) / \bar{K}^*(\sigma), \quad \bar{q}^*(\sigma) = \bar{\varphi}^*(\sigma) \bar{K}^*(\sigma)$$

или же

$$\bar{q}(\sigma) = \bar{\varphi}^*(\sigma) / \bar{K}^*(\sigma) + \bar{\varphi}^*(\sigma) \bar{K}^*(\sigma) \quad (16)$$

В случае однородной бесконечной балки, то есть при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получим

$$\bar{q}(\sigma) = \frac{\lambda^3 (P e^{-\sigma a} + Q e^{i \sigma b})}{\lambda^3 + |\sigma|^3} \quad (17)$$

которое совпадает с решением Шехтера, приведенным в [1].

Заметим, что уравнения равновесия балки (3) можно записать в виде

$$\bar{q}(0) = P + Q, \quad \bar{q}'(0) = i(bQ - aP)$$

при помощи которых определяются неизвестные постоянные a_0 и a_1 .

$\bar{q}(\sigma)$, как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $q(x)$, является непрерывной функцией и стремится к нулю при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Кроме того, как следует из (16), $\bar{q}(\sigma)$ имеет порядок $1/|\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Из сказанного следует, что $\bar{q}(\sigma)$ является абсолютно интегрируемой функцией. Отсюда следует, что $q(x)$ является непрерывной функцией для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Более того, из (16) можно получить следующие асимптотические представления для контактных напряжений:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-1} q(x) &= [\bar{\varphi}^*(0) \Gamma(4) (1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3) - 6A \pi^{-1} (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2}] (\lambda_1 x)^{-3} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \\ &\quad \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \lambda_1^{-1} q(x) &= [-6A \pi^{-1} - \Gamma(4) (1 - \lambda_1^3 / \lambda_2^3) (A + \bar{\varphi}^*(0)) (\lambda_1 / \lambda_2)^{3/2}] (\lambda_1 x)^{-4} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \\ &\quad \text{при } x \rightarrow -\infty \\ q(x) &= q(0) + O(x \ln |x|) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (18)$$

где $A = P + Q(\lambda_2 / \lambda_1)^3 + a_0 \mu / \lambda_1^3 (1 - \nu)$, $\Gamma(x)$ — известная Гамма-функция.

В частном случае, для однородной балки, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, из (17) получим

$$\lambda^{-1} q(x) = -\frac{P+Q}{\pi} \Gamma(4)(\lambda_1 x)^{-4} + O[(\lambda_1 x)^{-5}] \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty$$

которое, как нетрудно видеть, совпадает с (18).

Знак $[-]$ в последней формуле показывает, что контактные давления меняют знак, то есть в случае свободно лежащей балки могут образоваться зоны отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. - М.: Наука, 1976.
2. Попов Г.Я. О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба, лежащей на упругом полупространстве неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости. - Изв. Вузов. Математика, №1, 1957 и №3, 1958.
3. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. - ПММ, 1961, вып.1, т.25.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. - Уч. зап. ЕГУ, ест.н., 1979, №3.
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. - Изв. НАН РА, Механика, 1992, т.45, №1-2, с.11-26.
6. Кероян А.В. К контактной задаче для упругой полосы с упругой разнородной бесконечной накладкой. - Межвуз. сб. науч. тр. "Механика", Ереван, изд. ЕГУ, вып.8, 1991.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1971. 104 с.
8. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1972. 283 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.06.1998