

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Баблоян А.А., Мкртчян А.М.

Ա. Ա. Բաբլոյան, Ա. Մ. Մկրտչյան

Բաղադրյալ արիթմետիկ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման մի մեթոդի մասին

Աշխատանքում, կոնկրետ օրինակի վրա, նկարագրվում է բաղադրյալ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման մի մեթոդ, որը հիմնված է կշռով օրոգոնմալ ֆունկցիաների համակարգի օգտագործման վրա, երբ կշիռը կտոր առ կտոր հասարակուն ֆունկցիա է

A.A.Babloyan, A.M.Mkrtyan

On one method of torsion problems solution for composite prismatic rods

В данной работе на конкретном примере излагается метод решения задачи кручения составного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, когда составляющие материалы разделены друг от друга взаимно перпендикулярными плоскостями, параллельными боковым граням стержня. Метод решения основывается на использовании ортогональных с весом функций, когда весовая функция кусочно постоянна.

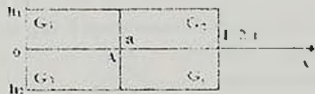
В конце работы получены формулы для касательных напряжений с выделенными характерными особенностями.

Методы решения и подробная литература по задачам кручения составных призматических стержней содержатся в [1-8].

1. Постановка задачи и сведение к бесконечным системам

Рассмотрим задачу о кручении составного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, состоящего из четырех различных материалов с модулями сдвига G_1, G_2, G_3, G_4 соответственно (фиг. 1).

Поверхности раздела материалов являются две взаимно ортогональные плоскости, параллельные боковым граням стержня.



Фиг. 1

Как известно [1], это задача сводится к определению внутри прямоугольника непрерывного решения уравнения

$$\Delta U(x, y) = -2G(x, y), \quad U|_r = 0 \quad (1)$$

где Δ двумерный оператор

Лапласа, а функция $G(x, y)$ кусочно постоянна и имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} G_1(x) & (y > 0) \\ G_2(x) & (y < 0) \end{cases}, \quad G_p(x) = \begin{cases} G_{2p-1} & (0 < x < a) \\ G_{2p} & (a < x < l) \end{cases}$$

Требуется, чтобы на линиях раздела различных материалов функции $U(x, y)$ и $G^{-1}(x, y) \frac{\partial U}{\partial n}$, где n — нормаль к линиям контакта, были непрерывными.

В дальнейшем, для простоты, будем рассматривать только случай, когда одна из линий раздела материалов (например, вертикальная) проходит через центр поперечного сечения стержня.

Пользуясь результатами работы [2], решение задачи для рассматриваемого случая в каждой подобласти ($y > 0$) или ($y < 0$) представим в виде ряда Фурье по ортогональной с весом $G_p^{-1}(x)$ системе функций

$$\begin{aligned} & \{\sin \lambda_k x, G_p(x) \sin \mu_k x\} \\ U_p(x, y) = & U_{p0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{kp} \operatorname{sh} \lambda_k y + B_{kp} \operatorname{sh} \lambda_k (h_p - |y|)] \sin \lambda_k x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [C_{kp} \operatorname{sh} \mu_k y + D_{kp} \operatorname{sh} \mu_k (h_p - |y|)] G_p(x) \sin \mu_k x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2a}, \quad 0 \leq x \leq 2a, \quad p = 1; 2$$

где $0 < y < h$ при $p = 1$ и $-h_2 < y < 0$ при $p = 2$, а функция $U_{p0}(x)$ — частное решение уравнения (1) при $y(-1)^{p-1} > 0$

$$U_{p0}(x) = \begin{cases} G_{2p-1} x(a-x + G_{2p} a^2 \varepsilon_p^{-1}), & (0 \leq x \leq a) \\ G_{2p} (2a-x)(x-a + G_{2p-1} a^2 \varepsilon_p^{-1}), & (a \leq x \leq 2a) \end{cases} \quad (3)$$

Каждое слагаемое формулы (2) в отдельности удовлетворяет нулевым граничным условиям на отрезках $x = 0, 2a$ и условиям контакта на вертикальной линии раздела материалов $x = a$. Удовлетворяя граничным условиям на отрезках $y = h_1, y = -h_2$ и условиям контакта на горизонтальной линии раздела материалов $y = 0$, получим соотношения

$$A_{kp} \operatorname{sh} \lambda_k h_p = (-1)^p a_{kp}, \quad C_{kp} \operatorname{sh} \mu_k h_p = (-1)^p b_{kp}, \quad (4)$$

и бесконечные системы относительно безразмерных коэффициентов X_p, Y_p

$$\delta_{p2} X_p = \frac{\delta_0 G_0}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_p Y_k}{\mu_k^2 - \lambda_p^2} + a_p, \quad \delta_{p1} Y_p = \frac{\delta_0}{a^2 G_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_p X_k}{\lambda_k^2 - \mu_p^2} + \frac{b_p}{G_0} \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_1 (D_{p1} \operatorname{sh} \mu_p h_1 + b_{p1}) = \varepsilon_2 (D_{p2} \operatorname{sh} \mu_p h_2 + b_{p2}) = (-1)^p \mu_p^{-1} a^2 G_0 Y_p, \quad (6)$$

$$\omega_1 (A_{p1} - B_{p1} \operatorname{ch} \lambda_p h_1) = \omega_2 (A_{p2} + B_{p2} \operatorname{ch} \lambda_p h_2) = (-1)^p \lambda_p^{-1} a^2 X_p,$$

$$a_p = \frac{(-1)^p \lambda_p}{a^2} \left[a_{p1} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_p h_1} \right) - a_{p2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_p h_2} \right) \right],$$

$$b_p = \frac{(-1)^p \mu_p}{a^2} \left[b_{p1} \operatorname{th} \frac{\mu_p h_1}{2} + b_{p2} \operatorname{th} \frac{\mu_p h_2}{2} \right],$$

$$\delta_{p1} = \varepsilon_1^{-1} \operatorname{cth} \mu_p h_1 + \varepsilon_2^{-1} \operatorname{cth} \mu_p h_2, \quad \delta_{p2} = \omega_1^{-1} \operatorname{th} \lambda_p h_1 + \omega_2^{-1} \operatorname{th} \lambda_p h_2,$$

$$\delta_0 = \frac{4(G_1 G_4 - G_2 G_3)}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4)}, \quad 4G_0 = \sum_{k=1}^4 G_k,$$

$$\omega_p = \frac{a}{2} (G_{2p-1}^{-1} + G_{2p}^{-1}), \quad \varepsilon_p = \frac{a}{2} (G_{2p-1} + G_{2p})$$

При получении формул (4) и (5) было использовано разложение

$$U_{p0}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{kp} \sin \lambda_k x + b_{kp} G_p(x) \sin \mu_k x] \quad (0 \leq x \leq 2a), \quad (7)$$

$$b_{kp} \mu_k^3 \varepsilon_p = 2[1 - (-1)^k](G_{2p-1} - G_{2p}), \quad a_{kp} \lambda_k^3 \omega_p = 4, \quad p = 1; 2$$

После определения неизвестных x_k и y_k из системы (5) решение задачи можно представить в виде

$$U_p(x, y) = U_{p0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{p+k} \frac{a^2 X_k \operatorname{sh} \lambda_k (h_p - |y|)}{\lambda_k \omega_p \operatorname{ch} \lambda_k h_p} - a_{kp} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{ch} \lambda_k h_p} \right] \times$$

$$\times \sin \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{a^2 G_0 Y_k \operatorname{sh} \mu_k (h_p - |y|)}{\mu_k \varepsilon_p \operatorname{sh} \mu_k h_p} - b_{kp} \frac{\operatorname{ch} \mu_k \left(\frac{h_p}{2} - |y| \right)}{\operatorname{ch} \mu_k \frac{h_p}{2}} \right] \times$$

$$\times G_p(x) \sin \mu_k x \quad (8)$$

2. Исследование бесконечных систем.

Ясно, что бесконечные системы (5) не регулярны. Для сведения этих систем к регулярному виду сначала путем исключения неизвестных $X_p(Y_p)$, получим бесконечную систему только для определения $Y_p(X_p)$

$$X_p + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{pn} X_n = \alpha_p, \quad Y_p + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_{pn} Y_n = \beta_p; \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

где

$$\tilde{a}_{pm} = \frac{\delta_0^2 \lambda_p}{a^4 \delta_{p2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_p \delta_{k1}^{-1}}{(\lambda_p^2 - \mu_k^2)(\lambda_m^2 - \mu_k^2)}, \quad \tilde{b}_{pm} = \frac{\delta_0^2 \mu_p}{a^4 \delta_{p1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \delta_{k2}^{-1}}{(\lambda_k^2 - \mu_p^2)(\lambda_k^2 - \mu_m^2)},$$

$$\alpha_p = \frac{\delta_0 \lambda_p}{a^2 \delta_{p2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \delta_{k1}^{-1}}{\mu_k^2 - \lambda_p^2} + \frac{a_p}{\delta_{p2}}, \quad \beta_p = \frac{\delta_0 \mu_p}{a^2 G_0 \delta_{p1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \delta_{k2}^{-1}}{\lambda_k^2 - \mu_p^2} + \frac{b_p}{G_0 \delta_{p1}}, \quad (10)$$

Используя представление

$$\frac{\lambda_p}{\delta_{p2}(\lambda)} = \frac{1}{2\tilde{\omega}_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \xi_m h_1 \cos^2 \xi_m h_2}{\lambda^{-2} \tilde{\omega}_m (\xi_m^2 + \lambda^2)}, \quad (11)$$

где

$$\delta_{p2}(\lambda) = \omega_1^{-1} \operatorname{th} \lambda h_1 + \omega_2^{-1} \operatorname{th} \lambda h_2,$$

$$\tilde{\omega}_m = \frac{h_1}{2\omega_1} \cos^2 \xi_m h_2 + \frac{h_2}{2\omega_2} \cos^2 \xi_m h_1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

и α_m — положительные корни уравнения

$$\omega_1^{-1} \operatorname{tg} \xi_m h_1 + \omega_2^{-1} \operatorname{tg} \xi_m h_2 = 0, \quad \xi_m > 0, \quad \xi_0 = 0, \quad (12)$$

нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \delta_{k2}^{-1}}{(\lambda_k^2 - \mu_k^2)(\lambda_k^2 - \mu_p^2)} = \frac{a^2 \delta_{p2}}{4\mu_p \delta_{p2}(\mu_p)} =$$

$$- \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m \cos^2 \xi_m h_1 \cos^2 \xi_m h_2 \operatorname{th} \xi_m a}{(\xi_m^2 + \mu_p^2)(\xi_m^2 + \mu_p^2) \tilde{\omega}_m}, \quad (13)$$

где δ_{pn} — символ Кронекера

Из (10) и (13) следует, что $b_{pp} > 0$, а $b_{pn} < 0$ ($p \neq n$).

Аналогичным образом доказывается, что $a_{pp} > 0$, а $a_{pn} < 0$ ($p \neq n$). Поэтому, если в бесконечных системах (9) перенести диагональные элементы в левую сторону, а недиагональные в правую и представить их в виде

$$X_p = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} a_{pn}^* X_n + \alpha_p^*, \quad Y_p = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} b_{pn}^* Y_n + \beta_p^*, \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где

$$a_{pm}^* = -\tilde{a}_{pm} (1 + \tilde{a}_{pp})^{-1}, \quad b_{pm}^* = -\tilde{b}_{pm} (1 + \tilde{b}_{pp})^{-1},$$

$$\alpha_p^* = -\alpha_p (1 + \tilde{a}_{pp})^{-1}, \quad \beta_p^* = -\beta_p (1 + \tilde{b}_{pp})^{-1}, \quad (p \neq n) \quad (15)$$

то нетрудно убедиться, что системы (14) вполне регулярны.

Действительно, из (6), (10) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} |a_{pn}^*| &= (1 + \tilde{a}_{pp})^{-1} \left(\tilde{a}_{pp} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{pn} \right) = \tilde{a}_{pp} (1 + \tilde{a}_{pp})^{-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{pn} = 0; \\ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} |b_{pn}^*| &= (1 + \tilde{b}_{pp})^{-1} \left(\tilde{b}_{pp} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_{pn} \right) < \tilde{b}_{pp} (1 + \tilde{b}_{pp})^{-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_{pn} > 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что при $p \rightarrow \infty$ коэффициенты a_{pp} и b_{pp} монотонно возрастают, стремятся к конечному пределу

$$\lim a_{pp} = \lim b_{pp} = \frac{\delta_0^2 \omega_1 \omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{4a^2 (\omega_1 + \omega_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad (17)$$

из (16) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} |a_{pn}^*| \leq p < 1 \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} |b_{pn}^*| \leq p < 1 \quad (p = 1, 2, \dots) \\ p = \frac{(G_1 G_4 - G_2 G_3)^2}{(G_1 G_4 - G_2 G_3)^2 + \sum_{\mu=1}^4 G_p \sum_{\nu=1}^4 G_p^{-1} \prod_{\rho=1}^4 G_p} \end{aligned} \quad (18)$$

Свободные члены бесконечных систем (9) или (14) при $p \rightarrow \infty$ стремятся к нулю как $O(1/p)$.

В частности, когда $G_1 = G_2 = G_3$, $G_4 = 0$, т. е. для задачи о кручении однородного призматического стержня полигонального поперечного сечения, из (18) получим $p = 0.25$. Решение этой задачи другим методом еще в 1948 году было получено в работах [1,3]. Сравнение бесконечных систем (14) с системами, полученными Н. Х. Арутюняном [3], показывает, что они качественно совпадают: в обоих случаях $p = 0.25$.

В том случае, когда $G_1 G_4 - G_2 G_3 = 0$ ($\delta_n = p = 0$), задача решается точно, без бесконечных систем. При этом

$$a^2 \delta_{p2} X_p = a_{pp}, \quad a^2 G_0 \delta_{p1} Y_p = b_{pp}, \quad (19)$$

и точное решение задачи дается формулами (8) с учетом (6), (7) и (19).

3. Вычисленные касательных напряжений

В общем случае касательные напряжения и жесткость при кручении будем вычислять по формулам [1]

$$\tau_{xz} = \Theta \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\Theta \frac{\partial U}{\partial x}, \quad C = 2 \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Формулы (20) позволяют вычислить значения напряжений во всех

точках профиля стержня, кроме точек горизонтальной линии раздела материалов ($y=0$), где соответствующие функциональные ряды сходятся медленно (это связано с методом решения задачи и с наличием особой точки A). Сходимость этих рядов при $y=0$ вдали от особой точки A легко улучшаются при помощи формул, аналогичных (11), (13) и бесконечных систем (5), (9).

Для вычисления напряжений в малой окрестности точки A воспользуемся результатами работы [2] и переразложим полученное решение (8) таким образом, чтобы оно хорошо описывало напряженное состояние вблизи особой точки A .

Заранее отметим, что при любых значениях геометрических и физических параметров задачи касательные напряжения, кроме точки A , других особых точек не имеют. Кроме того, при $G_1 G_4 - G_2 G_3 = 0$, когда задача решается точно, из (7), (8) и (19) следует, что напряжения выражаются равномерно сходящимися рядами и нигде не обращаются в бесконечность. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $G_1 G_4 - G_2 G_3 \neq 0$.

Вводим полярную систему координат с центром в точке A (фиг.2) и представим решение (8) задачи (1) в виде

$$U(r, \varphi) = u_0(r, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^{\gamma_k} \Phi_k(\varphi) \quad (21)$$

где γ_k — неотрицательные корни уравнения

$$\sin^2 \frac{\gamma \pi}{2} \left(\cos^2 \frac{\gamma \pi}{2} - \delta^2 \right) = 0$$

а $\Phi_k(\varphi)$ являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$\Phi_k'' + \gamma_k^2 \Phi_k = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (23)$$

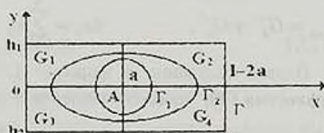
когда функции $\Phi_k(\varphi)$ и $G^{-1}(\varphi)\Phi_k(\varphi)$ непрерывны.

Здесь

$$G(\varphi) = \begin{cases} G_2 & (0 < \varphi < 0,5\pi) \\ G_1 & (0,5\pi < \varphi < \pi) \\ G_3 & (\pi < \varphi < 1,5\pi) \\ G_4 & (1,5\pi < \varphi < 2\pi) \end{cases} \quad (24)$$

Решение задачи (23) имеет вид

1. При $k = 4n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)



Фиг.2

$$\Phi_k(\varphi) = \cos 2n\varphi, \quad \omega_k = \pi c_0, \quad \omega_0 = 2\pi c_0, \quad (25)$$

2. При $k = 4n + 1$

$$\Phi_k(\varphi) = G(\varphi) \sin 2n\varphi, \quad \omega_k = \pi G_0, \quad (26)$$

3. При $k = 4n + 2$ и $k = 4n + 3$

$$\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} b \sin \gamma_n(0,5\pi - \varphi) + c \sin \gamma_n \varphi, & (0 \leq \varphi \leq 0,5\pi) \\ c \sin \gamma_n(\pi - \varphi) - b^{-1} \sin \gamma_n(\varphi - 0,5\pi), & (0,5\pi \leq \varphi \leq \pi) \\ -b^{-1} \sin \gamma_n(1,5\pi - \varphi) - c^{-1} \sin \gamma_n(\varphi - \pi), & (\pi \leq \varphi \leq 1,5\pi) \\ -c^{-1} \sin \gamma_n(2\pi - \varphi) + b \sin \gamma_n(\varphi - 1,5\pi), & (1,5\pi \leq \varphi \leq 2\pi) \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\cos \frac{\gamma_n \pi}{2} = (-1)^k \delta, \quad b = \sqrt{\frac{c_{13}}{c_{24}}}, \quad c = (-1)^k \sqrt{\frac{c_{14}}{c_{12}}} \quad (28)$$

$$\omega_k = \int_0^{2\pi} G^{-1}(\varphi) \Phi_k^2(\varphi) d\varphi = 2\pi c_0 (1 - \delta^2)$$

Система $\{1, \Phi_k\}$ ортогональна на интервале $(0, 2\pi)$ с весом $G^{-1}(\varphi)$.

В формулах (22)-(28) использовались обозначения

$$\delta = \frac{c_2 c_3 - c_1 c_4}{\sqrt{c_{12} c_{13} c_{24} c_{34}}}, \quad 4G_0 = \sum_{k=1}^4 G_k, \quad c_k = G_k^{-1} \quad (29)$$

$$c_{kp} = G_k^{-1} + G_p^{-1}, \quad 4c_0 = \sum_{k=1}^4 c_k$$

Первое слагаемое в формуле (21) является частичным решением уравнения (1), удовлетворяющим в окрестности особой точки А условиям непрерывности функций. $U_0(r, \varphi)$ и $G^{-1}(\varphi) \frac{\partial U_0}{\partial \varphi}$. Оно имеет вид

$$U_0(r, \varphi) = -2r^2 \tilde{U}_0(r, \varphi) \quad (30)$$

где

$$\tilde{U}_0(r, \varphi) = \begin{cases} G_2 \Psi_0(r, \varphi) + B_1 \cos 2\varphi, & (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \\ G_1 \Psi_0(r, \varphi) + B_2 \cos 2\varphi, & (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi) \\ G_3 \Psi_0(r, \varphi) + B_3 \cos 2\varphi, & (\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2) \\ G_4 \Psi_0(r, \varphi) + B_4 \cos 2\varphi, & (3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{cases} \quad (31)$$

$$\Psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{4} + C_0 \left(\varphi \cos 2\varphi + \ln \frac{r}{r_0} \sin 2\varphi \right)$$

$$\pi C_0 = \frac{G_1 + G_3 - G_2 - G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}, \quad r_0 = \min\{a, h_1, h_2\}$$

Один из коэффициентов B_1 в (31) выбирается произвольным образом, а остальные определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + 0,25(G_1 - G_2)(1 - 2\pi C_0), \\ B_3 &= B_2 + 0,25(G_2 - G_3)(1 + 4\pi C_0), \\ B_4 &= B_3 + 0,25(G_3 - G_4)(1 - 6\pi C_0), \quad B_5 = B_4 + 0,25(G_4 - G_5) + 2\pi C_0 \end{aligned} \quad (32)$$

Для определения коэффициентов разложения (21) введем функцию $U_0(r, \varphi) = U(r, \varphi) - u_0(r, \varphi)$

$$U_p(r, \varphi) = U_0(r, \varphi) - \sum_{k=0}^{p-1} A_k r^{\gamma_k} \Phi_k(\varphi) + \sum_{k=p}^{\infty} A_k r^{\gamma_k} \Phi_k(\varphi) \quad (33)$$

$$V_p(r, \varphi) = U_0(r, \varphi) - r^{-\gamma_k} \Phi_p(\varphi) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и применим к ним формулу Грина [1,2] для составных областей

$$\iint_{D_\varepsilon} [U_\Delta V - V_\Delta U] G^{-1}(\varphi) dx dy = \oint_{\Gamma_0} \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] G^{-1}(\varphi) ds \quad (34)$$

где область D_ε ограничена внутри окружностью Γ_1 радиуса ε с центром в точке A , а внешне произвольным кусочно гладким контуром Γ_2 ($\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2$), целиком лежащим внутри прямоугольника (фиг. 1)

В силу ортогональности функций $\Phi_k(\varphi)$, из (33) и (34) для определения коэффициентов A_p получим следующую формулу:

$$2\omega_p \gamma_p A_p = \oint_{\Gamma_2} \left(U_p \frac{\partial V_p}{\partial n} - V_p \frac{\partial U_p}{\partial n} \right) G^{-1}(\varphi) ds \quad (35)$$

В частности, когда Γ_2 совпадает с контуром прямоугольника $\Gamma_2 = \Gamma$, то в силу граничного условия (1) первое слагаемое в подынтегральном выражении обращается в нуль, и формула (35) принимает более простой вид. При это точность вычисления коэффициентов A_p по формуле (35) увеличивается за счет быстрой сходимости функциональных рядов (8).

Если же принимать, что Γ_2 — окружность с центром в точке A и радиуса r_0 , то значения коэффициентов A_k можно вычислять по формуле Фурье

$$A_k r_0^{\gamma_k} \omega_k = \int_0^{2\pi} [U(r_0, \varphi) - u_0(r, \varphi)] G^{-1}(\varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi \quad (36)$$

Жесткость при кручении рассматриваемого составного стержня будем вычислять по формуле

$$C = 2(K_1 + K_2)$$

$$\begin{aligned}
K_p = \iint_{\Omega_p} U_p(x, y) dx dy = \frac{a^4 h_p (G_{2p} + G_{2p-1})}{G} \left[1 + \frac{6G_{2p} G_{2p-1}}{(G_{2p} + G_{2p-1})} \right] + \\
+ \frac{2a^2}{\omega_p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \lambda_k h_p}{\lambda_k^3} \left[(-1)^{n+k} X_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k h_p}{2} - \frac{4}{\lambda_k^2 a^2} \right] + \\
+ \frac{2a^2 (G_{2p} - G_{2p-1})}{\varepsilon_p} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{G_0 \operatorname{th} \frac{\mu_k h_p}{2}}{\mu_k^3} \left[Y_k - \frac{8(G_{2p} - G_{2p-1})}{G_0 \mu_k^2 a^2} \right]
\end{aligned} \quad (37)$$

Касательные напряжения в окрестности особой точки A вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\tau_{\varphi}(r, \varphi) &= \frac{\partial U_n(r, \varphi)}{r \partial \varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_k'(\varphi) r^{r_k-1} \\
\tau_{\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{\partial U_n(r, \varphi)}{\partial r} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k A_k \Phi_k(\varphi) r^{r_k-1} \\
r \sin \varphi &= y, \quad r \cos \varphi = (x - a), \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)
\end{aligned} \quad (38)$$

Из этих формул следует, что коэффициенты при особенностях всех контактных касательных напряжений, действующих на различных контактных площадках ($\varphi = 0, 0,5\pi, \pi, 1,5\pi, r < r_0$), выражаются только через постоянную A_k . Следовательно, между четырьмя различными коэффициентами особенностей существуют три простые соотношения, которые могут быть получены из формул (22), (26) и (38).

В заключение отметим, что применяемый здесь метод решения позволяет рассмотреть и случаи, когда вертикальная линия раздела материалов имеет произвольное расположение, вертикальные линии раздела материалов не являются продолжениями друг друга, количество различных материалов в подобластях $y > 0$ и $y < 0$ не равны друг другу, а также случаи, когда поперечные сечения различных материалов имеют форму криволинейных прямоугольников, принадлежащих одной и той же координатной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
2. Арутюнян Н. Х., Баблюян А. А. Об особенностях напряжений вблизи угловых точек профилей однородных и составных призматических стержней при кручении. ДАН СССР, т. 264, №4, 1982.

3. Арутюнян П. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. – ПММ, 1949, т. 13, вып. 1. 107-112.
4. Морозов Н. Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1981.
5. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
7. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван, Изд ЕГУ, 1976.
8. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. – Кручение стержней с поперечным сечением в виде соединений прямоугольников и кольцевых секторов. – Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, №6, с. 3-16.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
22.06.1995