

ИЗГИБ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան

Պիեզոկերամիկ զլանային թաղանթի ծոռում ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ

Բարևի պիեզոկերամիկ սալերի և թաղանթների լայն կիրառությունը, որպես էներգիայի ցածր հաճախականությամբ էլեկտրամեխանիկական փոխակերպիչների ակտիվ էլեմենտներ, մեխանիկայի ասպարեզում առաջ են բերվում մի շարք կարևոր խնդիրներ:

Մինչ այժմ այդ խնդիրները հիմնականում ուսումնասիրվել են Կիրիսոֆ-Լյավի հիպոթեզների օգտագործմամբ, պիեզոկերամիկայից պատրաստված ըստ հաստության թեղանթներ, թաղանթներ և սալերի տեսության կառուցման համար [6, 7]

Սակայն Կիրիսոֆ-Լյավի տեսությամբ պիեզոկերամիկ սալերի և թաղանթների խնդիրները լուծելիս առաջ են գալիս որոշակի անճշտություններ, այդ պատճառով առաջարկվում է խնդիրները լուծել օգտագործելով ճշգրտված տեսությունը [1, 2]:

Ճշգրտված տեսությամբ լուծված են սալերի մի շարք խնդիրներ Ա. Ա. Համբարձումյանի և Ա. Վ. Բելուբեկյանի [3, 4, 5] աշխատանքներում, թաղանթների համար [8] աշխատությունում:

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է պիեզոկերամիկ զլանային թաղանթի մեխանիկական վարքագիծը մի քանի դեպքերի համար:

A. V. Babayan

Bending of a piezoceramical cylindrical shell with the account of transverse shears

Широким применением тонких пьезокерамических пластин и оболочек в качестве активных элементов высокочастотных электромеханических преобразователей обусловлены исследования задач электроупругости тонких тел.

Эти задачи в основном исследованы с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява [6].

Однако при решении этих задач с помощью Кирхгофа-Лява возникают некоторые неточности, которые могут быть преодолены с использованием уточненных теорий [1, 2].

В работах С. А. Амбарцумяна и М. В. Бедубеяна [3, 4, 5] с помощью уточненной теории решены некоторые задачи для пластин, а в работе Б. А. Кудряшова, В. З. Царгона, Н. А. Семки [7] — для оболочек.

В настоящей работе с помощью уточненной теории [3, 4, 5] исследовано поведение пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки при различных типах нагружения.

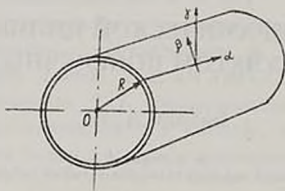
1. Рассмотрим осесимметричную задачу пьезокерамической круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h , равномерно поляризованную вдоль нормали к срединной поверхности оболочки.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $O\alpha\beta\gamma$ так, что поверхность $\alpha O \beta$ совпадает со срединной поверх-

ностью оболочки, т. е. материал оболочки поляризован по координатным линиям γ (фиг. 1).

В этом случае уравнения состояния запишутся аналогично [4]

Компоненты деформации и уравнения равновесия оболочки представляются известным образом [2].



Фиг. 1

Пусть внутренние поверхности оболочки $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ электродированы и заданы значения электрического потенциала $\varphi(\alpha, \gamma)$ на этих поверхностях:

$$\varphi = \varphi(\alpha, \gamma) = \pm V_0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \quad (1.1)$$

Уравнения электродинамики для пьезосреды в электростатическом приближении запишутся следующим образом [4]:

$$\operatorname{div} D = 0 \quad \operatorname{rot} E = 0 \quad (1.2)$$

Введя электрический потенциал φ по формуле

$$E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1.3)$$

гождественно удовлетворим второму уравнению (1.2), так как

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad E_2 = 0 \quad E_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \quad (1.4)$$

а первое уравнение (1.2) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial D_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_3}{\partial \gamma} = 0 \quad (1.5)$$

Предполагается, что цилиндрическая оболочка нагружена лишь поперечной нагрузкой Z' и Z'' , приложенной на поверхностях оболочки $\gamma = \pm \frac{h}{2}$, соответственно.

Задача рассматривается на основании уточненной теории оболочки [1], при этом вместо ранее принятого предположения $e_{33} = 0$ предполагается, что поперечная нормальная деформация, обусловленная

электрическим полем, не может быть пренебрежена, и представляется следующим образом [4, 7]

$$e_{33} = d_{31} E_1 \quad (1.6)$$

В соответствии с основным предположением уточненной теории [1] принимается также, что

$$\sigma_{13} = f(\gamma) \varphi_1(\alpha) \quad \sigma_{23} = 0 \quad (1.7)$$

где φ_1 — искомая функция, $f(\gamma)$ — заданная функция, выбранная следующим образом:

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \quad (1.8)$$

Из уравнений равновесия после известных преобразований для нормального напряжения σ_{33} получим

$$\sigma_{33} = Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2 \quad (1.9)$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{2} (Z^+ - Z^-), \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (1.10)$$

$$I_0(\gamma) = \int_0^{\gamma} f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} \right) \quad (1.11)$$

Обобщая основные положения уточненной теории на случай задачи электроупругости, предполагаем, что [4]

$$\varphi = \frac{8}{h^3} f(\gamma) \Phi_1(\alpha) + \frac{8\gamma}{h^3} f(\gamma) \Phi_2(\alpha) + \frac{2\gamma}{h} V_0 \quad (1.12)$$

где Φ_1, Φ_2 — искомые функции, характеризующие электростатический потенциал оболочки.

Принимая (1.6) — (1.12), одновременно удовлетворяем условиям на поверхностях $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ оболочки, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 & \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \\ \sigma_{13} = Z^+ & \quad \text{при} \quad \gamma = \frac{h}{2} \\ \sigma_{33} = -Z^- & \quad \text{при} \quad \gamma = -\frac{h}{2} \\ \varphi = \pm V_0 & \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Решая уравнения состояния относительно σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= S_{11}(e_{11} + \nu e_{22}) + A_1' \sigma_{33} - B_1' E_1 \\ \sigma_{22} &= S_{11}(e_{22} + \nu e_{11}) + A_1' \sigma_{33} - B_1' E_2 \\ \sigma_{12} &= 0\end{aligned}\quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned}S_{11} &= \frac{S_{11}^E}{\Delta} = \frac{1}{S_{11}^E(1-\nu^2)} \quad \Delta = (S_{11}^E)^2 - (S_{12}^E)^2 \\ A_1' &= \frac{S_{11}^E(S_{11}^E - S_{12}^E)}{\Delta} = \frac{\nu^*}{1-\nu} \quad \nu = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E} \\ B_1' &= \frac{d_{11}(S_{11}^E - S_{12}^E)}{\Delta} = \frac{d_{11}}{S_{11}^E(1-\nu)} \quad \nu^* = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}\end{aligned}\quad (1.15)$$

Подставляя (1.12) в (1.4), для компонент вектора напряженности электрического поля получим:

$$\begin{aligned}E_1 &= -\frac{8}{h^3} f(\gamma) \frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{8\gamma}{h^3} f(\gamma) \frac{d\Phi_2}{d\alpha} \\ E_2 &= 0\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$E_3 = \frac{8\gamma}{h^3} \Phi_1 - \frac{4}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2 \right) \Phi_2 - \frac{2}{h} V_0$$

Для компонент вектора электрической индукции получим:

$$\begin{aligned}D_1 &= -\frac{8\varepsilon_{11}'}{h^3} f(\gamma) \frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{8\gamma\varepsilon_{11}'}{h^3} f(\gamma) \frac{d\Phi_2}{d\alpha} + d_{13} f(\gamma) \Phi_1 \\ D_2 &= 0\end{aligned}\quad (1.17)$$

$$D_3 = \frac{8\gamma}{h^3} \varepsilon_{33}^* \Phi_1 - \frac{4}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2 \right) \varepsilon_{33}^* \Phi_2 - \frac{2}{h} \varepsilon_{33}^* V_0 + B_1'(e_{11} + e_{22}) + d_{33}^* \left(Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2 \right)$$

где

$$\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11}' - \frac{2d_{11}^2}{S_{11}^E(1-\nu)}, \quad d_{13}^* = d_{13} + d_{11} \frac{2\nu^*}{1-\nu} \quad (1.18)$$

Предполагая, что при $\gamma = 0$, $U_1 = U(\alpha)$, $U_2 = 0$, $U_3 = W(\alpha)$ для компонент перемещения какой либо точки оболочки, согласно (1.6), (1.7) и (1.16), получим:

$$U_1 = U - \gamma \frac{dW}{d\alpha} - \frac{8}{h^3} \left(d_{13} I_0(\gamma) + \frac{\gamma^3}{6} d_{33} \right) \frac{d\Phi_1}{d\alpha} + S_{24}^E I_0(\gamma) \Phi_1 + \frac{8}{h^3} (d_{33} - d_{13}) I_2(\gamma) \frac{d\Phi_2}{d\alpha}$$

$$U_3 = 0 \quad (1.19)$$

$$U_1 = W + \frac{4\gamma}{h^3} d_{11} \Phi_1 - \frac{4\gamma}{h^3} d_{13} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \Phi_2 - \frac{2\gamma}{h} d_{13} V_0$$

где

$$I_1(\gamma) = \int_0^\gamma \gamma f(\gamma) d\gamma = \frac{\gamma^2}{8} \left(\frac{h^2}{2} - \gamma^2 \right) \quad (1.20)$$

На основе (1.19) получаются деформации e_{α} и напряжения σ_{α}

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & S_{11} \left(\frac{dU}{d\alpha} + \frac{\nu}{R+\gamma} W \right) - S_{11} \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + S_{11} S_{11}^T I_0(\gamma) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \\ & - S_{11} \frac{8}{h^3} \left(d_{15} I_0(\gamma) + \frac{d_{13}}{6} \gamma^2 \right) \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + S_{11} \frac{8}{h^3} (d_{13} - d_{15}) I_2(\gamma) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \\ & + \frac{8\gamma}{h^3} \left(\frac{S_{11} \nu}{R+\gamma} \frac{\gamma d_{13}}{2} - B' \right) \Phi_1 - \frac{4}{h^3} \left(\frac{S_{11} \nu}{R+\gamma} 2\gamma d_{13} f(\gamma) - B' \left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2 \right) \right) \Phi_2 + A' \left(Z_1 + \frac{12}{h} I_0(\gamma) Z_2 \right) - \\ & - \frac{2}{h} \left(\frac{S_{11} \nu}{R+\gamma} \gamma d_{13} - B' \right) V_0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & S_{11} \left(\frac{W}{R+\gamma} + \nu \frac{dU}{d\alpha} \right) - S_{11} \nu \gamma \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + S_{11} S_{11}^T d_{10}(\gamma) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \\ & - S_{11} \nu \frac{8}{h^3} \left(d_{15} I_0(\gamma) + \frac{\gamma^2}{6} d_{13} \right) \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + S_{11} \nu \frac{8}{h^3} (d_{13} - d_{15}) \times \\ & \times I_2(\gamma) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{8\gamma}{h^3} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} \frac{\gamma d_{13}}{2} - B' \right) \Phi_1 - \frac{4}{h^3} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} 2\gamma d_{13} f(\gamma) - B' \left(\frac{h^2}{4} - 3\gamma^2 \right) \right) \Phi_2 + \\ & + A' \left(Z_1 + \frac{12}{h^3} I_0(\gamma) Z_2 \right) - \frac{2}{h} \left(\frac{S_{11}}{R+\gamma} \gamma d_{13} - B' \right) V_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = 0$$

Из условий статической эквивалентности, для внутренних сил и моментов, отнесенные к единице длины срединной поверхности оболочки с точностью $1 \pm \frac{\gamma}{R} \approx 1$, получим

$$T_1 = S_{11} h \left[\frac{dU}{d\alpha} + \frac{\nu}{R} W \right] + \frac{7S_{11}}{240} (d_{13} - d_{15}) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{S_{11} \nu d_{13}}{3R} \Phi_1 + A' Z_1 h + 2B' V_0$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= S_{11}h \left[\frac{W}{R} + v \frac{dU}{d\alpha} \right] + \frac{7S_{11}v}{240} (d_{33} - d_{15}) \frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{S_{11}d_{33}}{3R} \Phi_1 + A_1 Z_1 h + 2B_1' V_0 \\
S_{12} &= S_{21} = 0 \\
H_{12} &= H_{21} = 0 \\
N_1 &= \frac{h^1}{12} \varphi_1 \quad N_2 = 0
\end{aligned}
\tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= -S_{11} \frac{h^1}{12} \frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11}S_{44} \frac{h^1}{120} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - S_{11} \frac{h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} - \\
&\quad - \frac{2}{3} B_1' \Phi_1 - S_{11}v \frac{d_{33}}{30R} \Phi_2 + A_1' \frac{h^2}{10} Z_2 - \frac{S_{11}vd_{33}h^2}{6R} V_0 \\
M_2 &= -S_{11}v \frac{h^1}{12} \frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11}S_{44}v \frac{h^5}{120} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - S_{11}v \frac{h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \times \\
&\quad \times \frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{2B_1'}{3} \Phi_1 - \frac{S_{11}d_{33}}{30R} \Phi_2 - \frac{S_{11}d_{33}h^2}{6R} V_0 + A_1' \frac{h^2}{10} Z_2
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия во внутренних силах и моментах имеют вид [2]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = 0, \quad Z_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} - \frac{T_2}{R} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - N_1 = 0
\tag{1.23}$$

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.22) в (1.23), приходим к следующей системе трех уравнений относительно пяти искоемых функций $U, W, \varphi, \Phi_1, \Phi_2$:

$$\begin{aligned}
S_{11}h \left[\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{v}{R} \frac{dW}{d\alpha} \right] + \frac{7S_{11}v}{240} (d_{33} - d_{15}) \frac{d^3\Phi_2}{d\alpha^3} + \frac{S_{11}vd_{33}}{3R} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} &= -A_1' h \frac{dZ_2}{d\alpha} \\
Z_2 + \frac{h^1}{12} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R} \left[\frac{W}{R} + v \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{7S_{11}v}{240R} (d_{33} - d_{15}) \times \\
\times \frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^2} \Phi_1 - \frac{2B_1'}{R} V_0 - \frac{A_1'Z_1h}{R} &= 0 \\
-S_{11} \frac{h^1}{12} \frac{d^2W}{d\alpha^2} + S_{11}S_{44} \frac{h^5}{120} \frac{d^2\varphi_1}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \frac{d^3\Phi_1}{d\alpha^3} - \\
- \frac{2B_1'}{3} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}vd_{33}}{30R} \frac{d\Phi_2}{d\alpha} - \frac{\varphi_1h^1}{12} &= -A_1' \frac{h^2}{10} \frac{dZ_2}{d\alpha}
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

Система уравнений (1.24) дополняется двумя осредненными уравнениями, которые можно получить из уравнения электростатики (1.5). Первое уравнение получается интегрированием уравнения (1.5) по

γ в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$ второе уравнение получается

умножением уравнения (1.5) на γ и интегрированием по γ в тех же пределах. После некоторых преобразований задача электроупругости по нормальным поляризованной пьезокерамической цилиндрической оболочки приводится к решению следующей системы пяти дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} S_{11}h \left[\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dW}{d\alpha} \right] + \frac{7S_{11}}{240} (d_{33} - d_{15}) \frac{d^3 \Phi_2}{d\alpha^3} + \frac{S_{11} \nu d_{33}}{3R} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} = -A_1' h \frac{dZ_1}{d\alpha} \\ Z_2 + \frac{h^3}{12} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R} \left[W + \nu \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{7S_{11}\nu}{240} (d_{33} - d_{15}) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^2} \Phi_1 - \frac{2B_1'}{R} V_0 - \frac{A_1' Z_1 h}{R} = 0 \\ - S_{11} \frac{h^3}{12} \frac{d^3 W}{d\alpha^3} + S_{11} S_{44}^E \frac{h^5}{120} \frac{d^2 \varphi_1}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \frac{d^3 \Phi_1}{d\alpha^3} - \\ - \frac{2B_1' d\Phi_1}{3 d\alpha} - \frac{S_{11} \nu d_{33}}{30R} \frac{d\Phi_2}{d\alpha} - \frac{\varphi_1 h^3}{12} = -A_1' \frac{h^2}{10} \frac{dZ_2}{d\alpha} \\ \left[\varepsilon_{11}^T + B_1' \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2} \right) \right] \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + \frac{3}{2} B_1' h \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - \frac{h^3}{8} \left(d_{15} + B_1' S_{44}^E \right) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \\ - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{33}^T \Phi_1 + \frac{3B_1' d_{33}}{R} V_0 - \frac{3}{2} d_{15}^* Z_2 = 0 \\ \frac{1}{30} \left[\varepsilon_{11}^T - B_1' (d_{15} - d_{15}^*) \right] \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^T \Phi_2 - \frac{2}{3} B_1' \frac{d_{33}}{R} \Phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Рассмотрим некоторые краевые задачи.

2. Рассмотрим задачу изгиба внешним электрическим потенциалом, пьезокерамической цилиндрической оболочки, когда края $\alpha = 0, \alpha = \ell$ шарнирно оперты, а лицевые поверхности цилиндрической оболочки электродированы. Оболочка предварительно равномерно поляризована по толщине (γ). На лицевых поверхностях оболочки $\gamma = \pm \frac{h}{2}$, $\varphi = \pm V_0$. На краях оболочки ($\alpha = 0, \alpha = \ell$) $\varphi = 0$, $V_0 = 0$.

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид

$$S_{11}h \left[\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dW}{d\alpha} \right] + \frac{7S_{11}}{240} (d_{33} - d_{15}) \frac{d^3 \Phi_2}{d\alpha^3} + \frac{S_{11} \nu d_{33}}{3R} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{h^3}{12} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R} \left[\frac{W}{R} + \nu \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{7S_{11}\nu}{240R} (d_{11} - d_{15}) \frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}d_{11}}{3R^2} \Phi_1 - \frac{2V_0B_1'}{R} = 0 \quad (2.1)$$

$$- S_{11} \frac{h^3}{12} \frac{d^3W}{d\alpha^3} + S_{11}S_{44}^E \frac{h^5}{120} \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{11}}{4} \right) \frac{d^3\Phi_1}{d\alpha^3} - \frac{2B_1'}{3} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}\nu d_{11}}{30R} \frac{d\Phi_2}{d\alpha} - \frac{\varphi_1 h^3}{12} = 0$$

$$\left[\varepsilon_{11}^T + B_1' \left(d_{15} + \frac{d_{11}}{2} \right) \right] \frac{d^2\Phi_1}{d\alpha^2} + \frac{3}{2} B_1' h \frac{d^2W}{d\alpha^2} - \frac{h^3}{8} (d_{15} + B_1'S_{44}^E) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{11} \Phi_1 + \frac{3B_1'd_{11}V_0}{R} = 0$$

$$\frac{1}{30} \left[\varepsilon_{11}^T - (d_{11} - d_{15}) B_1' \right] \frac{d^2\Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{15} \Phi_2 - \frac{2}{3} B_1' \frac{d_{11}}{R} \Phi_1 = 0$$

Граничные условия задачи запишутся следующим образом:

$$W = 0, \quad T_1 = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \ell$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \ell \quad (2.2)$$

$$\varphi = \pm V_0 \quad \text{при} \quad \gamma = \pm \frac{h}{2}$$

Учитывая (1.12), для осредненных граничных условий получим

$$\Phi_1(\alpha) = 0 \quad \Phi_2(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \ell \quad (2.3)$$

$$W = 0 \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0 \quad \frac{d^2W}{d\alpha^2} = S_{44}^E \frac{h^2}{10} \frac{d\varphi_1}{d\alpha}$$

Решение системы (2.1) представим в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell} \quad (2.4)$$

которые удовлетворяют краевым условиям (2.3).

Функцию V_0 также представим в виде ряда

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{\pi n \alpha}{\ell} \quad (2.5)$$

где F_n — известные постоянные.

Подставим (2.4), (2.5) в (2.1), получим алгебраическую систему уравнений для определения постоянных интегрирования. После некоторых преобразований для искомых постоянных A_n, B_n, C_n, D_n, E_n получим

$$D_n = -\frac{T_2}{\frac{2}{3} B_1' \frac{d_{33}}{R}} E_n$$

$$C_n = \frac{3T_2 R \left[\left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 - 2 \frac{T_1}{B_1' d_{33}} \right]}{\frac{h^3}{2} \frac{\pi n}{\ell} Q} E_n - \frac{\frac{3B_1'}{R} \left(d_{33} - B_1' h \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \frac{C_{11}^E}{M} \right)}{\frac{h^3}{8} \frac{\pi n}{\ell} Q} F_n$$

$$B_n = \frac{RT_2}{2hB_1' MQ} \left[M(d_{15} + B_1' S_{44}^E) - \frac{2hC_{11}^E T_1}{d_{33}} \right] E_n +$$

$$+ \frac{2B_1' C_{11}^E}{QMR} (d_{15} - d_{33} + B_1' S_{44}^E) F_n \quad (2.6)$$

$$A_n = \left[\frac{C_{12}^E h T_2 R}{2M \frac{\pi n}{\ell} Q} \left(\left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 - 2 \frac{T_1}{B_1' d_{33}} \right) - \frac{P_1}{h} \frac{\pi n}{\ell} \right] E_n + h \frac{2B_1' C_{12}^E}{RM \frac{\pi n}{\ell} Q} [d_{15} - d_{33} + B_1' S_{44}^E] F_n$$

И, наконец,

$$E_n = -\frac{1}{K} \left[B_1'^2 d_{33} \left\{ S_{44}^E D_{11}^E \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \frac{12}{5h} \left(d_{33} - \frac{hB_1'}{6} \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \frac{C_{11}^E}{M} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \left(d_{33} - B_1' h \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \frac{C_{11}^E}{M} \right) + D_{11}^E 2 \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^4 \frac{C_{11}^E}{M} (d_{15} - d_{33}) \right\} \right] F_n \quad (2.7)$$

где

$$K = D_{11}^E R^2 T_2 \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^4 \frac{1}{5h} \left[\frac{5}{2} d_{13} d_{33} - \frac{S_{44}^E}{2} B_1' d_{33} - 6P_2 Q - \right.$$

$$\left. - \frac{5hT_1 C_{11}^E}{M} \right] + R^2 T_2 \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \left[Q B_1' - \frac{B_1' d_{33}}{2} + \frac{6T_1 S_{44}^E D_{11}^E}{5h} \right] + T_2 T_1 R^2 - C_{12}^E \frac{d_{33}^2}{30} Q R B_1' \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2$$

$$M = (hC_{12}^E)^2 - \left(\frac{C_{11}^E}{R} \right)^2, \quad Q = d_{15} + B_1' S_{44}^E - B_1' h \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2 \frac{C_{11}^E}{M}$$

$$C_{11}^E = S_{11}h, \quad C_{12}^E = \frac{S_{11}v}{R}, \quad D_{11}^E = \frac{S_{11}h^3}{12}, \quad P_1 = \frac{7}{240}(d_{33} - d_{15})$$

$$P_2 = d_{15} + \frac{d_{33}}{4}, \quad T_1 = \left(\frac{\pi l}{\ell}\right)^2 \left[\varepsilon_{11}^T + B_1' \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2} \right) \right] + \frac{12}{h^2} \varepsilon_{33}^*$$

$$T_2 = \left(\frac{\pi l}{\ell}\right)^2 \left[\varepsilon_{11}^T - B_1'(d_{33} - d_{15}) \right] \frac{1}{30} + \frac{2}{h^2} \varepsilon_{15}^*$$

Подставим (2.7) в (2.6) и получим значение постоянных A_n, B_n, C_n, D_n , при помощи которых из (2.4) получим искомые функции $U, W, \varphi, \Phi_1, \Phi_2$.

3. Рассмотрим задачу изгиба пьезокерамической полубесконечной цилиндрической оболочки, когда край $\alpha = 0$ шарнирно закреплён и на краю действует изгибающий момент M_1^0

$$M_1 = M_1^0, \quad U = 0, \quad W = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (3.1)$$

Пусть на лицевых поверхностях $\gamma = \pm \frac{h}{2}$ цилиндрической оболочки $Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \quad V_n = 0$. Оболочка предварительно поляризована по толщине (γ) и на краю $\alpha = 0, \quad \varphi = 0$.

Система разрешающих уравнений (1.25) для этой задачи примет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{11}h \left[\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \frac{v}{R} \frac{dW}{d\alpha} \right] + \frac{7S_{11}}{240}(d_{11} - d_{15}) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} + \frac{S_{11}vd_{33}}{3R} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} = 0 \\ \frac{h^3}{12} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{S_{11}h}{R} \left[\frac{W}{R} + v \frac{dU}{d\alpha} \right] - \frac{7S_{11}v}{240R}(d_{11} - d_{15}) \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}d_{33}}{3R^2} \Phi_1 = 0 \\ -S_{11} \frac{h^3}{12} \frac{d^4 W}{d\alpha^4} + S_{11}S_{44}^E \frac{h^4}{120} \frac{d^2 \varphi_1}{d\alpha^2} - \frac{S_{11}h^2}{15} \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \right) \frac{d^3 \Phi_1}{d\alpha^3} - \frac{2B_1'}{3} \frac{d\Phi_1}{d\alpha} - \\ - \frac{S_{11}vd_{11}}{30R} \frac{d\Phi_2}{d\alpha} - \frac{\varphi_1 h^3}{12} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \left[\varepsilon_{11}^T + B_1' \left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2} \right) \right] \frac{d^2 \Phi_1}{d\alpha^2} + \frac{3}{2} B_1' h \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - \frac{h^3}{8} (d_{15} + B_1' S_{44}^E) \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{11}^* \Phi_1 = 0 \\ \frac{1}{30} \left[\varepsilon_{11}^T - B_1'(d_{11} - d_{15}) \right] \frac{d^2 \Phi_2}{d\alpha^2} - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{11}^* \Phi_2 - \frac{2}{3} B_1' \frac{d_{33}}{R} \Phi_1 = 0 \end{aligned}$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_1 &= M_1^0, \quad U = 0, \quad W = 0 && \text{при} && \alpha = 0 \\
\varphi &= 0 && \text{при} && \alpha = 0 \\
\varphi &= 0 && \text{при} && \gamma = \pm \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Как и в первой задаче, из осредненных граничных условий получим:

$$\Phi_1(\alpha) = 0 \quad \Phi_2(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{3.4}$$

$$W = 0, \quad U = 0, \quad \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = S_{44}^E \frac{h^2}{10} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{12}{S_{11} h^3} M_1^0$$

Решение системы (3.2) $U, W, \varphi_1, \Phi_1, \Phi_2$ представим в виде:

$$\begin{aligned}
U &= A e^{i\alpha}, \quad W = F e^{i\alpha}, \quad \varphi_1 = C e^{i\alpha} \\
\Phi_1 &= D e^{i\alpha}, \quad \Phi_2 = E e^{i\alpha},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где A, F, C, D, E — искомые постоянные

Подставив (3.5) в (3.2), получим систему уравнений относительно искомых постоянных A, F, C, D, E, a . Для того, чтобы система имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы дет этой системы был равен нулю, откуда получим:

$$\begin{aligned}
&-a^2 M \left\{ \left(T_2 a^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) \left[\left(T_1 a^2 - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) \left(D_{11}^E a^2 \frac{h^2}{10} S_{44}^E - \frac{h^3}{12} \right) M + \right. \right. \\
&+ D_{11}^E a^4 \frac{h^3}{12} C_{11}^E \left. \right] - \frac{h^3}{8} (d_{15} + B_1' S_{44}^E) a \left(-D_{11}^E a^4 \frac{d_{33}}{3h} M + M \left(\frac{C_{11}^E h}{15} P_2 a^3 + \frac{2B_1'}{3} a \right) \right) + \\
&+ \frac{3}{2} B_1' h a^2 \left(\frac{h^3}{12} a C_{11}^E \left(-\frac{C_{11}^E h}{15} P_2 a^3 - \frac{2B_1'}{3} a \right) - \frac{d_{33}}{3h} M \left(-\frac{h^3}{12} + D_{11}^E a^2 \frac{h^2}{10} S_{44}^E \right) \right) \left. \right\} - \\
&- \frac{2}{3} B_1' \frac{d_{33}}{R} \left[-\frac{h^3}{240} (d_{15} + B_1' S_{44}^E) a^2 C_{11}^E M - \frac{C_{11}^E d_{33}}{240} B_1' h^4 a^4 C_{11}^E \right] \Bigg\} = 0 \\
&-a^2 M \left\{ \left(T_2 a^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) \left[\left(T_1 a^2 - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) \left(D_{11}^E a^2 \frac{h^2}{10} S_{44}^E - \frac{h^3}{12} \right) M + \right. \right. \\
&+ D_{11}^E a^4 \frac{h^3}{12} C_{11}^E \left. \right] - \frac{h^3}{8} (d_{15} + B_1' S_{44}^E) a \left(-D_{11}^E a^4 \frac{d_{33}}{3h} M + M \left(\frac{C_{11}^E h}{15} P_2 a^3 + \frac{2B_1'}{3} a \right) \right) + \\
&+ \frac{3}{2} B_1' h a^2 \left(\frac{h^3}{12} a C_{11}^E \left(-\frac{C_{11}^E h}{15} P_2 a^3 - \frac{2B_1'}{3} a \right) - \frac{d_{33}}{3h} M \left(-\frac{h^3}{12} + D_{11}^E a^2 \frac{h^2}{10} S_{44}^E \right) \right) \left. \right\} - \\
&- \frac{2}{3} B_1' h a^2 \left[\frac{h^3}{12} a C_{11}^E \left(-\frac{C_{11}^E h}{15} P_2 a^3 - \frac{2B_1'}{3} a \right) - \frac{d_{33}}{3h} M \left(-\frac{h^3}{12} + D_{11}^E a^2 \frac{h^2}{10} S_{44}^E \right) \right] \Bigg\} = 0
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{3}B'_1\frac{d_{33}}{R}\left[-\frac{h^3}{240}(d_{15}+B'_1S_{44}^E)a^2C_{12}^E M-\frac{C_{12}^E d_{33}}{240}B'_1h^4a^4C_{11}^E\right]=0 \quad (3.6)$$

где

$$M = (C_{12}^E h)^2 - \left(\frac{C_{11}^E}{R}\right)^2$$

$$C_{11}^E = S_{11}h \quad C_{12}^E = \frac{S_{11}V}{R} \quad D_{11}^E = \frac{S_{11}h^3}{12}$$

$$P_1 = \frac{7}{240}(d_{11}-d_{15}) \quad P_2 = d_{15} + \frac{d_{33}}{4} \quad T_1 = \varepsilon_{11}^T + B'_1\left(d_{15} + \frac{d_{33}}{2}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{30}\left[\varepsilon_{11}^T - B'_1(d_{11}-d_{15})\right]$$

(3.6) является уравнением десятой степени относительно параметра a , однако, как нетрудно заметить, $a_9 = a_{10} = 0$.

Нас будут интересовать те решения, для которых a_i меньше нуля.

Вычислим из полученной системы постоянные A_i, F_i, C_i, D_i , выраженные через E_i

$$A_i = \left[-\frac{P_1 a_i}{h} + \frac{h^4 C_{12}^E Q_i R}{8MB'_1 d_{33}}\left(T_2 a_i^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right)\right] E_i$$

$$F_i = -\left[\frac{h^3}{12M} a_i C_{11}^E Q_i + \frac{d_{33}}{3h}\right] \frac{3R}{2B'_1 d_{33}} \left(T_2 a_i^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) E_i$$

$$D_i = \frac{3R}{2B'_1 d_{33}} \left(T_2 a_i^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) E_i$$

$$C_i = Q_i \frac{3R}{2B'_1 d_{33}} \left(T_2 a_i^2 - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{33}^* \right) E_i$$

где

$$Q_i = \frac{T_1 a_i^2 - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{33}^* - B'_1 \frac{a_i^2}{2} d_{15}}{\frac{h^4}{8M} B'_1 a_i^3 C_{11}^E + \frac{h^3}{8} (d_{15} + B'_1 S_{44}^E) a_i}$$

Удовлетворяя решения (3.4) краевым условиям, определим искомые постоянные E_i откуда и получим решение задачи.

4. При отсутствии явления пьезоэффекта достаточно в уравнении (3.6) подставить $d_{ij} = 0$

$$\left(\varepsilon_{11}^T \frac{a^2}{30} - \frac{2}{h^2} \varepsilon_{13}^T \right) \left(\varepsilon_{11}^T a^2 - \frac{12}{h^2} \varepsilon_{13}^T \right) \left[\frac{h^2 R^2}{12(1-\nu^2)} a^4 - S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} a^2 + 1 \right] = 0 \quad (4.1)$$

Слагаемые в первых двух скобках уравнения (4.1) возникают вследствие электрического поля, а третья — вследствие упругого поля.

В случае чисто упругих деформаций для определения параметра a вместо (4.1) имеем уравнение

$$\frac{R^2 h^2}{12(1-\nu^2)} a^4 - S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} a^2 + 1 = 0 \quad (4.2)$$

Учитывая, что нам нужны те a_i , для которых решения задачи удовлетворяют нулевым краевым условиям в бесконечности, получим:

$$a_{1,2} = - \sqrt{\frac{S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} \pm \sqrt{\left(S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} \right)^2 - \frac{R^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}}{\frac{R^2 h^2}{6(1-\nu^2)}}} \quad (4.3)$$

$$a_1 > a_2$$

Попробуем определить длину зоны распространения краевого эффекта. Аналогично [1, 2]

$$\alpha^* = \pi \sqrt{\frac{\frac{R^2 h^2}{6(1-\nu^2)}}{S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} + \sqrt{\left(S_{11} S_{44}^E \frac{h^2}{10} \right)^2 - \frac{R^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}}} \quad (4.4)$$

Из первых двух скобок уравнения (4.1) для параметра a , соответствующей электрическому полю, получим:

$$a_1^* = -\frac{1}{h} \sqrt{60 \frac{\varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{11}^T}} \quad a_2^* = -\frac{1}{h} \sqrt{12 \frac{\varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{11}^T}} \quad a_1^* < a_2^* \quad (4.5)$$

Сравним значения a_i , соответствующие этим полям:

$$\frac{a_2}{a_2^*} \sim \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{h}{R} \quad (4.6)$$

(4.6) означает, что решения при наличии электрического поля быстрее затухают, чем решения в случае чисто упругих деформаций.

Автор благодарит академика Амбарцумяна С. А. и профессора Белубекяна М. В. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи изгиба и колебания пьезокерамических пластин. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1987, вып. 6.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
5. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К задаче изгиба пьезокерамических пластин, поляризованных по координатной линии срединной плоскости. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1986, вып. 5.
6. Борисейко В.А., Мартыненко В.С., Улитко А.Ф. Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек, поляризованных вдоль одной из координатных линий. Прикладная механика. 1979, N 12, с. 36-42.
7. Кудряцев Б.А., Нартон В.З., Сеник Н.А. Соотношения электроупругости для пьезокерамических пологих оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. Физико-химическая механика материалов, 1984, т. 20, N 1.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
23. 01. 1995