ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ УПРУГИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СЛОЕВ

Геворкян Р. С.

Ռ.Ս. Գևորգյան

Իրար հաջորդող առաձգական և ռեոլոգիական շերտերից կազմված շերտավոր սալերի խառը խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծման մասին

Ասիմպտոտիկ եղանակով լուծված են շերտավոր սալերի խառը խնդիրները, երբ անիզոտրոպ առաձգական և իզոտրոպ առաձգամածուցիկ շերտերը հաջորդում են իրար: Լուծված են ներքին խնդիրներ, երբ սալի մեկ երեսային մակերևույթի վրա տրված են կինեմատիկական պայմաններ, իսկ հանդիպակաց երեսային մակերևույթի վրա տրված են լարումները, տեղափոխումները և նրանց համապատասխան կոմբինացիաները: Արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր շերտերում լարումները և տեղափոխումները հաշվելու համար: Նշված են դեպքերը, երբ իտերացիոն պրոցեսն ընդհատվում է՝ բերելով ճշգրիտ լուծումների: Բերված են արտածված բանաձևերի կիրառությունները լուսաբանող օրինակներ:

R.S.Gevorgian

On Asymptotic Solution of Mixed Boundary Problems of Layered Plates, Consisting of Alternated Elastic and Rheological Layers

Слоистые пластины, состоящие из чередующихся упругих и реологических слоев, широко распространены в качестве конструктивных элементов во многих областях техники и строительства. Многие композиционные слоистые конструктивные элементы летательных и других аппаратов состоят из чередующихся упругих основ и вяжущих с реологическими свойствами, упругий фундамент лежит на вязкоупругом основании и др. Разработка методов решения соответствующих задач представляет теоретический и практический интерес.

Асимптотическим методом решаются смешанные краевые задачи пластины (слоя), состоящей из чередующихся упругих анизотропных и наследственно ползучих изотропных слоев четного и нечетного количества, когда на одной лицевой поверхности пластины заданы компоненты вектора перемещения, а на противоположной - статические, кинематические или смешанные условия краевых задач теории упругости. Считается, что между слоями выполняются условия полного контакта. Выведены рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений в каждом слое. Приводится анализ распространения фактора времени (зависимости от времени) по компонентам полей напряжений и перемещений трехслойной пластины, когда внешние слои упругие. Считается, что одна из упругих лицевых поверхностей жестко закреплена, а на другую действуют полиномиальные нормальная и тангенциальные нагрузки. Подобные задачи, в частности, моделируют клеевое соединение двух ортотропных пластин (слоев) с учетом реологических свойств клея.

1. Имеем слоистую тонкую пластину, отнесенную к прямоугольной системе координат

$$0xyz:\quad \Omega = \left\{ x, y, z: 0 \le z \le H, -a \le x,\ y \le a,\ H = \sum_{i=1}^{\infty} h_i,\ H << a, \right.$$

где a-характерный продольный размер пластины, i -номер слоя толщины h_i, $\sum_{k=i+1}^{n} h_k \le z \le \sum_{k=i}^{n} h_k$, n -количество слоев. Слои под нечетными номерами $i = 2m - 1$ упругие, прямолинейно анизотропные, а под четными номерами $i = 2m$ - упруго-ползучие.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если на лицевой поверхности $z = 0$ нижнего слоя $i = n$ заданы значения компонентов вектора перемещения

$$u_j(z = 0) = u_j^-(x, y), \quad j = x, y, z \tag{1.1}$$

а на противоположной лицевой поверхности $z = H$ ($i = 1$ соответствует первому упругому слою) заданы условия первой краевой задачи

$$\sigma_{jz}(z = H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{jz}^+(x, y), \quad j = x, y, z \tag{1.2}$$

второй краевой задачи

$$u_j(z = H) = u_j^+(x, y), \quad j = x, y, z \tag{1.3}$$

или смешанных краевых задач теории упругости

$$\text{а)}\ u_j(z = H)u_j^+,\ j = x, y; \qquad \sigma_{zz}(z = H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{zz}^+ \tag{1.4}$$

$$\text{б)}\ u_z(z = H)u_z^+, \qquad \sigma_{jz}(z = H) = \varepsilon^{-1}\sigma_{jz}^+, \quad j = x, y \tag{1.5}$$

Считается, что между упругими и реологическими слоями пластины выполняются условия полного контакта

$$\sigma_{jz}^{(i)}(z_i) = \sigma_{jz}^{(i+1)}(z_i), \quad u_j^{(i)}(z_i) = u_j^{(i+1)}(z_i), \quad j = x, y, z$$

$$z_i = \sum_{k=i+1}^{n} h_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{1.6}$$

Индексом i обозначены величины, относящиеся к слою с таким номерам.

Для решения поставленной задачи должны быть удовлетворены уравнения равновесия с учетом объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(i)}}{\partial z} + F_x^{(i)} = 0 \qquad (x, y, z) \tag{1.7}$$

справедливые для всех слоев $i = 1,2,\cdots,n$, соотношения упругости анизотропного тела

$$\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} = a_{11}^{(i)}\sigma_{xx}^{(i)} + a_{12}^{(i)}\sigma_{yy}^{(i)} + a_{13}^{(i)}\sigma_{zz}^{(i)} + a_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{(i)} +$$

$$+a_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{(i)} + a_{16}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)} \qquad (x,y,z,\ 1j,2j,3j) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial x} = a_{16}^{(i)}\sigma_{xx}^{(i)} + a_{26}^{(i)}\sigma_{yy}^{(i)} + \cdots + a_{66}^{(i)}\sigma_{xy}^{(i)}$$

$$(x,y,z;\ 6j,5j,4j)$$

справедливые для упругих слоев $i = 2m-1$, и соотношения наследственной теории ползучести [1] для слоев с четными номерами $i = 2m$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial x} = \frac{1}{E_i(t)}\left[\sigma_{xx}^{(i)}(t) - \nu_i(t)\left(\sigma_{yy}^{(i)}(t) + \sigma_{zz}^{(i)}(t)\right)\right] - \tag{1.9}$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_{xx}^{(i)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_i(t,\tau) - \left(\sigma_{yy}^{(i)}(\tau) + \sigma_{zz}^{(i)}(\tau)\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_{1i}(t,\tau)\right]d\tau \qquad (x,y,z)$$

$$\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial x} = \frac{2\left(1+\nu_i(t)\right)}{E_i(t)}\sigma_{xy}^{(i)}(t) - \tag{1.10}$$

$$-2\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xy}^{(i)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau) + \delta_{1i}(t,\tau)\right)d\tau \qquad (x,y,z)$$

где $E_i(t)$ -модуль упруго-мгновенной деформации, $\nu_i(t)$ -коэффициент поперечной упругой части деформации, $\delta_i(t,\tau) = \dfrac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t,\tau)$ - полная относительная деформация при сжатии или растяжении, $\delta_{1i}(t,\tau) = \dfrac{\nu_i(\tau)}{E_i(\tau)} + \nu_{1i}(t,\tau)C_i(t,\tau)$ - полная относительная поперечная деформация, $\nu_{1i}(t,\tau)$-коэффициент поперечного сжатия при деформации ползучести, $C_i(t,\tau)$ -мера ползучести при сжатии или растяжении, τ_1-время (момент времени) приложения нагрузки.

Должны быть удовлетворены также условия контакта слоев (1.6), граничные условия (1.1)-(1.5) и условия, заданные на торцах $\partial\Omega$ пластины, которые не конкретизируем, поскольку их влияние окажется существенным в непосредственной близости пограничного слоя [2, 3].

Преобразуя первые два соотношения (1.9) и первое соотношение (1.10), получим интегральные уравнения Вольтерра второго рода относительно $\sigma_{xx}^{(i)}(t), \sigma_{yy}^{(i)}(t), \sigma_{zz}^{(i)}(t)$, формальными решениями которых являются

$$\sigma_{xx}^{(i)}(t)=\frac{E_i(t)}{1-\nu_i^2(t)}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial x}+\nu_i(t)\frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial y}\right)+\frac{\nu_i(t)}{1-\nu_i(t)}\sigma_{zz}^{(i)}(t)-$$

$$-\int_{\tau_i}^{t}\sigma_{zz}^{(i)}(\tau)R_{2i}(t,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{t}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x}+\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y}\right)R_{1i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial y}\right)R_i(t,\tau)\right]d\tau \qquad (x,y)$$

$$\sigma_{xy}^{(i)}(t)=\frac{E_i(t)}{2(1+\nu_i(t))}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(t)}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(i)}(t)}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{t}\left(\frac{\partial u_x^{(i)}(\tau)}{\partial y}+\frac{\partial u_y^{(i)}(\tau)}{\partial x}\right)R_i(t,\tau)d\tau \tag{1.11}$$

$$R_i(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1+\nu_i(t)}R_i^{*}(t,\tau),\qquad R_{1i}(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}R_{1i}^{*}(t,\tau)$$

$$R_{2i}(t,\tau)=\frac{E_i(\tau)}{1-\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)-\frac{\nu_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}R_{1i}^{*}(t,\tau)+$$

$$+\int_{\tau}^{t}\frac{E_i(\alpha)}{1-\nu_i(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(\alpha,\tau)R_{1i}^{*}(\alpha,\tau)d\alpha$$

где $R_i^{*}(t,\tau)$ и $R_{1i}^{*}(t,\tau)$ -резольвенты ядер

$$K_i(t,\tau)=\frac{E_i(t)}{1+\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)+\delta_{1i}(t,\tau)\right)$$

$$K_{1i}(t,\tau)=\frac{E_i(t)}{1-\nu_i(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)-\delta_{1i}(t,\tau)\right)$$

Получим асимптотическое решение поставленных краевых задач. Для этого, следуя [2-6], в (1.7)-(1.11) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$x = a\xi, \quad y = a\eta, \quad z = h\zeta = a\varepsilon\zeta, \quad \varepsilon = h/a, \quad h = \max\{h_i\}$$

$$u_x = au, \quad (x, y, z;\ u, \mathrm{v}, w) \tag{1.12}$$

В результате, получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений относительно компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, решение которой (решение внутренней задачи) ищем в виде асимптотического разложения [4-6]

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{\chi_Q + s} Q^{(i,s)} \tag{1.13}$$

где $\chi_u = 0$ для перемещений и $\chi_\sigma = -1$ для напряжений. А объемные силы представим в виде разложения $F_j^{(i)} = \sum_{s=0}^{s} \varepsilon^{-2+s} F_j^{(i,s)} a^{-1}, \quad j = x, y, z.$

Подставив (1.13) в указанную сингулярно возмущенную систему и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях каждого уравнения (метод Пуанкаре), получим непротиворечивую систему относительно неизвестных коэффициентов $Q^{(i,s)}$ разложения (1.13). Решив эту систему, получим рекуррентные формулы для вычисления напряжений и перемещений каждого слоя пластинки. Чтобы придавать этим формулам удобный для прикладных приложений вид, целесообразно возвратиться к исходным размерным координатам по (1.12). Расчетные формулы можно представить в виде

$$Q^{(i)} = \sum_{s=0}^{S} Q^{(i,s)}(x, y, z), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.14}$$

$$\sigma_{jz}^{(i,s)} = \sigma_{jz0}^{(i,s)}(x, y) + \sigma_{jz*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$\sigma_{jz*}^{(i,s)} = -\int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{jx}^{(i,s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(i,s-1)}}{\partial y} + F_j^{(i,s)} \right) dz \tag{1.15}$$

$$j = x, y, z; \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

для упругих слоев $i = 2m - 1$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{14}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{15}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} + \sigma_{xx*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(xx, yy, xy;\ 1j, 2j, 6j;\ j = 3, 4, 5)$$

$$u_x^{(i,s)} = z\left(A_{53}^{(i)} \sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)} \sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)} \sigma_{xz0}^{(i,s)} \right) + u_{x0}^{(i,s)}(x, y) + u_{x*}^{(i,s)}(x, y, z)$$

$$(u_x, u_y, u_z;\ 5j, 4j, 3j;\ j = 3, 4, 5)$$

$$\sigma_{xx*}^{(i,s)} = B_{11}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} P_3^{(i,s)}$$
$$(xx, yy, xy;\ 1j, 2j, 6j;\ j = 1,2,6) \tag{1.16}$$

$$P_1^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{13}^{(i)}\sigma_{zz*}^{(i,s)} - a_{14}^{(i)}\sigma_{yz*}^{(i,s)} - a_{15}^{(i)}\sigma_{xz*}^{(i,s)} \qquad (x, y;\ 1,2)$$

$$P_3^{(i,s)} = \frac{\partial u_x^{(i,s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}}{\partial x} - a_{36}^{(i)}\sigma_{zz*}^{(i,s)} - a_{46}^{(i)}\sigma_{yz*}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)}\sigma_{xz*}^{(i,s)}$$

$$u_{x*}^{(i,s)} = \int_0^z \left(a_{15}^{(i)}\sigma_{xx*}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)}\sigma_{yy*}^{(i,s)} + \dots + a_{65}^{(i)}\sigma_{xy*}^{(i,s)} - q_x\right)dz$$

$$(u_x, u_y, u_z;\ q_x, q_y, q_z;\ j5, j4, j3;\ j = 1,2,\cdots,6) \qquad q_x = \frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}(x, y),\ q_z = 0$$

$$B_{nj}^{(i)} = \left(a_{nk}^{(i)}a_{jk}^{(i)} - a_{nj}^{(i)}a_{kk}^{(i)}\right)/\Delta^{(i)}, \qquad n \neq j \neq k \neq n$$

$$B_{kk}^{(i)} = \left(a_{nn}^{(i)}a_{jj}^{(i)} - a_{nj}^{(i)2}\right)/\Delta^{(i)}, \qquad B_{nj}^{(i)} = B_{jn}^{(i)},\ \ n, j, k = 1,2,6$$

$$A_{kl}^{(i)} = -a_{1l}^{(i)}B_{k1}^{(i)} - a_{2l}^{(i)}B_{k2}^{(i)} - a_{6l}^{(i)}B_{k6}^{(i)}, \qquad A_{ml}^{(i)} \neq A_{lm}^{(i)}$$

$$A_{ml}^{(i)} = a_{1m}^{(i)}A_{1l}^{(i)} + a_{2m}^{(i)}A_{2l}^{(i)} + a_{6m}^{(i)}A_{6l}^{(i)} + a_{lm}^{(i)}, \qquad m, l = 3,4,5$$

$$\Delta^{(i)} = a_{11}^{(i)}a_{22}^{(i)}a_{66}^{(i)} + 2a_{12}^{(i)}a_{26}^{(i)}a_{16}^{(i)} - a_{11}^{(i)}a_{26}^{(i)2} - a_{22}^{(i)}a_{16}^{(i)2} - a_{12}^{(i)2}a_{66}^{(i)}$$

для упруго-ползучих слоев $i = 2m$

$$\sigma_{xx}^{(i,s)} = \frac{\nu_i(t)}{1-\nu_i(t)}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(\tau)R_{2i}(t,\tau)d\tau + \sigma_{xx*}^{(i,s)}, \qquad (x, y)$$

$$\sigma_{xy}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{2(1+\nu_i(t))}\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x}\right)R_i(t,\tau)d\tau$$

$$u_x^{(i,s)} = 2z\left(\frac{1+\nu_i(t)}{E_i(t)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau) + \delta_{1i}(t,\tau)\right)d\tau\right) +$$
$$+ u_{x0}^{(i,s)} + u_{x*}^{(i,s)} \qquad (x, y)$$

$$u_z^{(i,s)} = z\left(\frac{1-\nu_i(t)-2\nu_i^2(t)}{\left(1-\nu_i(t)\right)E_i(t)}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz0}^{(i,s)}(\tau)R_{3i}(t,\tau)d\tau\right) + \tag{1.17}$$

$$+u_{z0}^{(i,s)} + u_{z\bullet}^{(i,s)}$$

$$\sigma_{xx\bullet}^{(i,s)} = \frac{E_i(t)}{1-\nu_i^2(t)}\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(t)}{\partial x} + \nu_i(t)\frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(t)}{\partial y}\right) + \frac{\nu_i(t)}{1-\nu_i(t)}\sigma_{zz\bullet}^{(i,s)}(t) +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz\bullet}^{(i,s)}(\tau)R_{2i}(t,\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{t}\left[\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y}\right)R_{1i}(t,\tau) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u_x^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial x} - \frac{\partial u_y^{(i,s-1)}(\tau)}{\partial y}\right)R_i(t,\tau)\right]d\tau$$

$$u_{xx}^{(i,s)} = \int_0^z\left[\frac{2\left(1+\nu_i(t)\right)}{E_i(t)}\sigma_{xz\bullet}^{(i,s)} - 2\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz\bullet}^{(i,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)+\delta_{1i}(t,\tau)\right)d\tau -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial u_z^{(i,s-1)}}{\partial x}\right]dz \qquad (x,y)$$

$$u_{zz}^{(i,s)} = \int_0^z\left(E_i^{-1}(t)\left[\sigma_{zz\bullet}^{(i,s)}(t) - \nu_i(t)\left(\sigma_{xx\bullet}^{(i,s)}(t)+\sigma_{yy\bullet}^{(i,s)}(t)\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_{zz\bullet}^{(i,s)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \left(\sigma_{xx\bullet}^{(i,s)}(\tau)+\sigma_{yy\bullet}^{(i,s)}(\tau)\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_{1i}(t,\tau)\right]d\tau\right)dz$$

$$R_{3i}(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\delta_i(t,\tau) - \frac{2\nu_i(\tau)}{1-\nu_i(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_{1i}(t,\tau) +$$

$$+\frac{2\nu_i(t)}{E_i(t)}R_{2i}(t,\tau) - \int_{\tau}^{t}R_{2i}(\alpha,\tau)\frac{\partial}{\partial\alpha}\delta_{1i}(t,\alpha)\,d\alpha$$

Общий интеграл системы (1.7)-(1.11), выраженный рекуррентными формулами (1.14)-(1.17), содержит $6n$ функций интегрирования $\sigma_{jz0}^{(i,s)}, u_{j0}^{(i,s)}$, $j = x,y,z$; $i = 1,2,\ldots,n$ для каждого шага итерации s, которые однозначно определяются из граничных условий (1.1)-(1.5) и из условий контакта слоев (1.6).

2. Удовлетворив условиям контакта слоев, получим

$$\sigma_{jz0}^{(i+1,s)} = \sigma_{jz0}^{(1,s)} + \sum_{k=1}^{i}\left(\sigma_{jz*}^{(k,s)}(z_k) - \sigma_{jz*}^{(k+1,s)}(z_k)\right) \tag{2.1}$$

$$j = x, y, z \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$u_{x0}^{(i,s)} = u_{x0}^{(i+1,s)} + u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) + z_i\left(\frac{\mu_x^{(i+1)}(t)}{E_{i+1}(t)}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(t) - \right.$$

$$\left. -\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}(\tau)K_{xz}^{(i+1)}(t,\tau)\,d\tau\right) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) -$$

$$-z_i\left(A_{53}^{(i)}\sigma_{zz0}^{(i,s)} + A_{54}^{(i)}\sigma_{yz0}^{(i,s)} + A_{55}^{(i)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}\right)$$

$$\left(u_x, u_y, u_z; \quad \mu_x, \mu_y, \mu_z; \quad xz, yz, zz; \quad 5,4,3\right) \tag{2.2}$$

$$\mu_x^{(i)}(t) = \mu_y^{(i)}(t) = 2\left(1+\nu_i(t)\right), \quad \mu_z^{(i)}(t) = \frac{1-\nu_i(t)-2\nu_i^2(t)}{1-\nu_i(t)}$$

$$K_{xz}^{(i)}(t,\tau) = K_{yz}^{(i)}(t,\tau) = 2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\delta_i(t,\tau)+\delta_{1i}(t,\tau)\right)$$

$$K_{zz}^{(i)}(t,\tau) = R_{3i}(t,\tau)$$

для слоев с нечетными номерами $i = 2m-1$, а для слоев с четными номерами $2m$

$$u_{x0}^{(i,s)} = u_{x0}^{(i+1,s)} + z_i\left(A_{53}^{(i+1)}\sigma_{zz0}^{(i+1,s)} + A_{54}^{(i+1)}\sigma_{yz0}^{(i+1,s)} + A_{55}^{(i+1)}\sigma_{xz0}^{(i+1,s)}\right) -$$

$$-z_i\left(\frac{\mu_x^{(i)}(t)}{E_i(t)}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(t) - \int_{\tau_1}^{t}\sigma_{xz0}^{(i,s)}(\tau)K_{xz}^{(i)}(t,\tau)\,d\tau\right) + \tag{2.3}$$

$$+u_{x*}^{(i+1,s)}(z_i) - u_{x*}^{(i,s)}(z_i) \quad \left(u_x, u_y, u_z; \ \mu_x, \mu_y, \mu_z; \ xz, yz, zz; \ 5,4,3\right)$$

Удовлетворив на поверхности $z = 0$ пластины граничным условиям (1.1), получим

$$u_{j0}^{(n,s)} = u_j^{-(s)}, \quad u_{j0}^{-(0)} = u_j^{-}, \quad u_j^{-(s)} = 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \tag{2.4}$$

Если на поверхности $z = H$ пластины заданы статические условия (1.2), то для оставшихся неопределенными трех функций интегрирования получим

$$\sigma_{jz0}^{(1,s)} = \sigma_{jz}^{+(s)} - \sigma_{jz*}^{(1,s)}(H), \quad \sigma_{jz}^{+(0)} = \sigma_{jz}^{+}$$

$$\sigma_{jz}^{+(s)} = 0 \quad s \neq 0, \quad j = x, y, z \tag{2.5}$$

Отметим, что формулы (2.4), (2.5) не зависят от того, является ли последний слой упругим или упруго-ползучим.

Если на поверхности $z = H$ заданы кинематические условия (1.3), то для определения $\sigma_{j:0}^{(1,s)}$ $j = x, y, z$ получаются интегральные уравнения, формальные решения которых для ортотропных тел дают

$$\sigma_{j:0}^{(1,s)} = U_{jz}^{(s)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} U_{jz}^{(s)}(\tau) R_{jz}(t,\tau)\, d\tau, \quad j = x, y, z$$

$$U_{xz}^{(s)} = \frac{1}{T_5(t)}\left[V_{xz}^{(s)} - \sum_{k=1}^{p}\left(W_{xz}^{(k,s)} + D_5^{(k)} \sum_{l=1}^{2k}\left(\sigma_{xz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{xz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right)\right)\right]$$

$$(xz, yz, zz;\ 5,4,3) \tag{2.6}$$

$$V_{jz}^{(s)} = u_j^{+(s)} - u_j^{-(s)} - \sum_{k=1}^{n}\left(u_{j*}^{(k,s)}(z_{k-1}) - u_{j*}^{(k,s)}(z_k)\right), \quad j = x, y, z$$

$$W_{jz}^{(k,s)}(t) = \sum_{l=1}^{2k-1} h_{2k}\left[\frac{\mu_j^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)}\left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_1}^{t}\left(\sigma_{jz*}^{(l,s)}(z_l) - \sigma_{jz*}^{(l+1,s)}(z_l)\right) K_{jz}^{(2k)}(t,\tau)\, d\tau\right], \quad j = x, y, z$$

$R_{xz}(t,\tau)$ -резольвента ядра $T_5^{-1}(t)\sum_{k=1}^{p} h_{2k} K_{xz}^{(2k)}(t,\tau)$ $(xz, yz, zz;\ 5,4,3)$

где для нечетного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)} \tag{2.7}$$

$$(5,4,3;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k+1} A_{55}^{(2k+1)} \quad (5,4,3)$$

а для четного общего количества слоев n имеем

$$T_5(t) = \sum_{k=1}^{n/2}\left(h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)} + h_{2k} \frac{\mu_x^{(2k)}(t)}{E_{2k}(t)}\right) \tag{2.8}$$

$$(5,4,3;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z); \quad D_5^{(k)} = h_{2k-1} A_{55}^{(2k-1)}; \quad p = n/2$$

В том случае, когда на поверхности $z = H$ заданы смешанные условия (1.4), то $\sigma_{zz0}^{(1,s)}$ определяется по формуле (2.5), а $\sigma_{xz0}^{(1,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.6)-(2.8).

При смешанных условиях (1.5) неизвестная $\sigma_{zz0}^{(1,s)}$ определяется по формулам (2.6)-(2.8), а $\sigma_{xz0}^{(1,s)}$, $\sigma_{yz0}^{(1,s)}$ - по формулам (2.5).

Полученные асимптотические решения сформулированных краевых задач (1.1) -(1.5) позволяют с любой заранее заданной асимптотической точностью определить напряженно-деформированное состояние слоистой пластины во всех ее внутренних точках, кроме небольшой области вблизи поперечных кромок, ширина которой равна глубине затухания решений типа пограничного слоя [2,3]. Для вычисления напряженно-деформированного состояния пластины, справедливого всюду, необходимо к полученным решениям добавить согласованное с ним решение типа пограничного слоя [2,3].

Точность расчетов напряженно-деформированного состояния слоистой пластины по полученным итерационным формулам зависит как от количества шагов, так и от физико-механических свойств материалов слоев и изменяемостей функций σ_{jz}^{+}, $u_j^{\pm}$, $j = x, y, z$, заданных на лицевых поверхностях, что существенно затрудняет ее оценку в приведеной выше общей постановке краевых задач. В каждом же конкретном случае оценка остаточного члена асимптотического разложения (1.3) не представляет трудности. Причем, если граничные функции σ_{jz}^{+}, $u_j^{\pm}$, $j = x, y, z$ являются полиномами степени p, то итерационный процесс обрывается на $p+1$ шаге и получается математически точное решение для слоя.

Заметим, что алгоритм решений приведенных краевых задач не обусловлен конкретно примененной линейной моделью ползучести [1]. Поэтому, полученные рекурентные расчетные формулы остаются в силе и для других линейных моделей вязкоупругости [7,8], если в полученных формулах заменить ядра ползучести и соответствующие резольвенты согласно выбранной модели.

3. Пусть пластина из композиционного материала состоит из анизотропной основы нечетных слоев, соединенных с помощью изотропного вязкоупругого вяжущего, имеющего физико-механические коэффициенты [1]

$$\begin{aligned} &\delta_i(t,\tau) = E_i^{-1}(\tau) + \varphi_i(\tau)\left(1 - \exp\left[-\gamma_i(t-\tau)\right]\right) \\ &\delta_{1i}(t,\tau) = \nu_i \delta_i(t,\tau), \qquad \nu_i = \text{const} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Одна упругая лицевая поверхность пластины жестко закреплена, а на противоположную -действуют постоянные нагрузки

$$u_j(z=0) = 0, \quad \sigma_{jz}(z=H) = \sigma_{jz}^{+} = \text{const}, \quad j = x, y, z \tag{3.2}$$

Итерация обрывается на первом шаге приближения и приводит к точному решению краевой задачи

$$\begin{aligned} &\sigma_{jz}^{(i)} = \sigma_{jz}^{+}, \quad j = x, y, z; \quad \sigma_{xy}^{(i)} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\sigma_{xx}^{(i)} = A_{13}^{(i)}\sigma_{zz}^{+} + A_{14}^{(i)}\sigma_{yz}^{+} + A_{15}^{(i)}\sigma_{xz}^{+} \qquad (xx, yy; 1, 2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$u_x^{(i)} = \sum_{k=(i+1)/2}^{(n-1)/2} \Big[h_{2k}\mu_x^{(2k)}\delta_{2k}(t,\tau_1)\sigma_{xz}^{+} +$$
$$+h_{2k+1}\left(A_{53}^{(2k+1)}\sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(2k+1)}\sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(2k+1)}\sigma_{xz}^{+} \right)\Big] + \tag{3.4}$$
$$+\left(z - \sum_{k=i+1}^{n} h_k \right)\left(A_{53}^{(i)}\sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(i)}\sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(i)}\sigma_{xz}^{+} \right)$$

$$\left(u_x, u_y, u_z;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z;\ xz, yz, zz;\ 5,4,3 \right) \qquad i = 1,3,5,\ldots$$

$$\mu_x^{(i)} = \mu_y^{(i)} = 2(1+\nu_i), \quad \mu_z^{(i)} = (1+\nu_i)(1-2\nu_i)/(1-\nu_i)$$

для слоев с нечетными номерами и

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{zz}^{+} \qquad (x,y)$$

$$u_x^{(i)} = \sum_{k=(i+2)/2}^{n/2} h_{2k}\mu_x^{(2k)}\delta_{2k}(t,\tau)\sigma_{xz}^{+} + \left(z - \sum_{k=i+1}^{n} h_k \right)\mu_x^{(i)}\sigma_{xz}^{+} +$$
$$+ \sum_{k=i/2}^{(n-1)/2} h_{2k}\left(A_{53}^{(2k+1)}\sigma_{zz}^{+} + A_{54}^{(2k+1)}\sigma_{yz}^{+} + A_{55}^{(2k+1)}\sigma_{xz}^{+} \right) \tag{3.5}$$

$$\left(u_x, u_y, u_z;\ \mu_x, \mu_y, \mu_z;\ xz, yz, zz;\ 5,4,3 \right) \qquad i = 2,4,\ldots$$

для слоев с четными номерами.

Формулы (3.3)-(3.5) показывают, что напряжения, возникающие от постоянной внешней нагрузки, передаются по всем упругим и вязкоупругим слоям без изменения. А перемещения меняются во времени в ползучих слоях и упругих слоях, расположенных выше ползучих. В последнем упругом слое $i = n$ во времени не меняются ни напряжения, ни перемещения. Для переменных по линейным координатам x, y внешних нагрузок, эти выводы имеют точность $O(\varepsilon)$.

Таблица

шаг (порядок)		$I(\varepsilon^0)$	$II(\varepsilon^1)$	$III(\varepsilon^2)$	$IV(\varepsilon^3)$
нагрузки $z = h_1 + h_2 + h_3$		постоянные	линейные	квадратич.	кубические
порядок временного фактора НДС в слоях	(1)	$u_x, u_y, u_z \to$	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \to$	σ_{xz}, σ_{yz} —	σ_{zz}
	(2)	$u_x, u_y, u_z \to$	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \to$	σ_{xz}, σ_{yz} —	σ_{zz}
	(3)	-----	-------	$\sigma_{xz}, u_x, (x,y)$	$\sigma_{zz} \to \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, u_z$
$z = 0$		u_x^-	u_y^-	u_z^-	

На предлагаемой таблице показана схема распространения временного фактора (зависимости от времени) по напряжениям и перемещениям трехслойной ортотропной пластины $(n=3)$ с ползучим средним слоем при постоянной, линейной, квадратичной и кубической внешних нагрузках, исходя из математически точных решений краевых задач. (Если же нагрузки не полиномиальные, то выводы имеют соответствующие асимптотические порядки ε^0, ε^1, ε^2, ε^3). Таким образом, при постоянной и линейной нагрузках, в третьем слое напряженно-деформированное состояние не зависит от времени, а во втором и первом слоях временной фактор не действует на напряжения σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz}. При квадратичной нагрузке временной фактор действует на σ_{xz}, σ_{yz} всех слоев и u_x, u_y третьего слоя. Только тогда, когда внешние нагрузки - полиномы третьей (и выше) степени, все компоненты напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины меняются во времени.

Автор выражает свою признательность Л. А. Агаловяну.

Литература

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести.-М.: ГИТТЛ, 1952. 323 с.
2. *Агаловян Л. А.* Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач.-Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1984. №3. с. 51-58.
3. *Геворкян Р. С.* Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин.- Изв. АН Арм ССР. Механика. 1984, т. 37, №6, с. 3-15.
4. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.- Механика. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1982, №2, с. 7-12.
5. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. - ПММ, 1986, т.50, №2, с. 271-278.
6. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойной полосы, состоящей из упругого и реологического слоев.- Изв.РАН, МТТ, 1992, №5, с. 120-128.
7. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести.-М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
8. *Миненков Б. В., Стасенко И.В.* Прочность деталей из пластмасс. - М.: Машиностроение, 1977. 264 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1. 06. 1994