ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

# УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Бабаян А. В.

Ա. Վ. Բաբայան

**Շրջանային գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը ծռող մոմենտի ազդեցության դեպքում**

Դիտարկվում է կիսաանվերջ շրջանաձև գլանային թաղանթ, որը ծռվում է եզրում հավասարաչափ բաշխված ծռող մոմենտի ազդեցության տակ: Այդպիսի թաղանթի կայունությունը ուսումնասիրված է հենվելով սկզբնական մոմենտային վիճակի ճշգրիտ լուծման վրա: Որոշված է եզրային էֆեկտի տարածման գոտու երկարությունը: Թաղանթի կայունության հավասարումը լուծված է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով նշված գոտու սահմաններում: Որոշված է ծռող մոմենտի կրիտիկական արժեքը կախված թաղանթի եզրագծում տեղավորված ալիքների թվից:

Կախված հարաբերական հաստությունից, թաղանթի նյութի առաձգական և ամրության բնութագրիչներից ստացված են պայմաններ, երբ որի կայունության կորուստ տեղի է ունենում ամրության պահպանման դեպքում:

A. V.Babayan

**Stability of a Circular Cylindrical Shell under the Influence of Bending Moment**

Рассматривается полубесконечная круговая цилиндрическая оболочка, которая изгибается равномерно распределенными по торцу моментами. Устойчивость такой оболочки в отличие от [1,2], исследуется на основе точного решения начального моментного состояния. Определяется длина зоны распространения краевого эффекта. Уравнение устойчивости оболочки решается методом Бубнова-Галеркина в пределах указанной зоны. Находится минимальное критическое значение изгибающего момента в зависимости от числа волн по окружности оболочки.

В зависимости от относительной толщины, упругих и прочностных характеристик материала оболочки, устанавливаются условия, при которых потеря устойчивости происходит при обеспечении прочности.

Рассмотрим задачу устойчивости полубесконечной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины $h$, когда один край шарнирно закреплен и на краю действует равномерно распределенный изгибающий момент.

Цилиндрическая оболочка отнесена к смешанной системе координат $0XYZ$ так, что поверхность $X0Y$ совпадает со срединной поверхностью оболочки.

Лицевые поверхности оболочки свободны.

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&x=0: \quad W=0, \quad M_x=M_0, \quad N_x=0, \quad \tau=0 \\
&x\to\infty: \; W\to 0, \; M_x\to 0, \quad N_x\to 0, \; \tau\to 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Так как задача осесимметрична, то уравнения равновесия [1] упрощаются.

Учитывая граничные условия и выражения для моментов, уравнение изгиба примет следующий вид:

$$D\frac{d^4W}{dx^4}+\frac{Eh}{R^2}W=0 \qquad (2)$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - жёсткость оболочки.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$W=Ae^{px} \qquad (3)$$

где $A$, $P$ - искомые постоянные.

Подставляя (3) в (2) и решая полученное уравнение, определим искомое решение уравнения (2). Удовлетворяя граничным условиям (1), окончательно получим [4]

$$W_0=\frac{M_0}{2\beta^2 D}\exp(-\beta x)\sin\beta x \qquad (4)$$

$$\sigma_y^{\,0}=-\frac{EM_0}{2\beta^2 DR}\exp(-\beta x)\sin(\beta x) \qquad (5)$$

$$M_x^0=M_0\exp(-\beta x)\cos\beta x \qquad (6)$$

$$Q_x^0=-\beta M_0\exp(-\beta x)(\cos\beta x+\sin\beta x) \qquad (7)$$

где $\beta=\sqrt[4]{\dfrac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}}$

Для $W_0, \sigma_y^0, M_x^0, Q_x^0$ определим длину зоны распространения краевого эффекта соответственно $l_1, l_2, l_3, l_4$ по формуле $l=\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$,

тогда $l_1=l_2=l_3=\dfrac{1}{2\beta}$, $l_4=\dfrac{1}{\beta}$

Приравнивая нулю производную от $\sigma_y^0$ по $\beta$, получим экстремальное значение $\sigma_y^0$

$$\sigma_{y\,\max}^0(x_0)=-\frac{\sqrt{6(1-\nu^2)}}{h^2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)M_0, \quad \text{где} \quad x_0=\frac{\pi}{4\beta}$$

при помощи которого получим условие прочности оболочки

$$|\sigma_y|<\sigma_s \Rightarrow M_0<\frac{h^2}{\sqrt{6(1-\nu^2)}}\sigma_s\exp(\pi/4) \qquad (8)$$

Теперь вернемся к задаче устойчивости оболочки. Уравнения устойчивости цилиндрической оболочки берем в виде [1]

$$\frac{D}{h}\nabla^4W=\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\sigma_y^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \qquad (9)$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{10}$$

Исключая из (9), (10) функцию усилий Ф, получим:

$$\frac{D}{h}\nabla^8 W + \frac{E}{R^2}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \nabla^4\left(\sigma_y^0\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{11}$$

Для того, чтобы использовать метод Бубнова-Галеркина, надо взять конечную цилиндрическую оболочку, длина которой равна длине зоны распространения краевого эффекта.

Граничные условия для шарнирного опирания будут

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ x = l^*: \quad & W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Решение уравнения (11) представим в следующем виде, чтобы на торцах оболочки удовлетворялись граничные условия:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\cos\frac{ny}{R} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим дифференциальное уравнение восьмого порядка относительно $f_n(x)$

$$L_8.f_n(x) = 0 \tag{14}$$

решение которого с учетом условий (12) представим в виде

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\alpha_k x, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{l^*} \tag{15}$$

где $A_k$ - искомые постоянные.

Применяя к уравнению (14) метод Бубнова-Галеркина, после нескольких преобразований, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $A_k$

$$A_m\frac{l^*}{2}\left[\frac{D}{h}\left(\alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)^4 + \frac{E}{R^2}\alpha_m^4\right] - \frac{n^2}{R^2}\frac{E M_0\alpha_m}{\beta D R}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty} A_k\alpha_k\left[\exp(-\beta l^*)(-1)^{k+m}(\cos\beta l^* - \sin\beta l^*) - 1\right] - \left(\alpha_m^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)^2 \times \tag{16}$$

$$\times\frac{n^2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k\int_0^{l^*}\sigma_y^0 \sin\alpha_k x \sin\alpha_m x\, dx = 0 \qquad m = 1,2,\cdots$$

где

$$\int_0^{l^*} \sigma_x^0 \sin\alpha_k x \sin\alpha_m x\, dx = -\frac{EM_0\alpha_m\alpha_k}{\beta DR\Omega}\left\{4\beta^2\left(\alpha_m^2+\alpha_k^2\right)\times\right.$$

$$\times\left[1-(-1)^{k+m}\exp(-\beta l^*)\left(\cos\beta l^*+\sin\beta l^*\right)\right]+\left[4\beta^4-\left(\alpha_k^2-\alpha_m^2\right)^2\right]\times$$

$$\left.\times\left[1-(-1)^{k+m}\exp(-\beta l^*)\left(\cos\beta l^*-\sin\beta l^*\right)\right]\right\}$$

$$\Omega=\left[4\beta^4+\left(\alpha_m-\alpha_k\right)^4\right]\left[4\beta^4+\left(\alpha_m+\alpha_k\right)^4\right]$$

Теперь попробуем определить критическое значение $M_0$. Для этого приравниваем нулю коэффициент $A_1$ в уравнении (16) при $m=1$ и получаем критическое значение $M_0$ в первом приближении. Чтобы определить следующее приближение, приравниваем нулю детерминант коэффициентов $A_1, A_2$ в уравнениях (16) при $m=1$, $m=2$ и т. д.

В первом приближении получается

$$M_0^{(1)}=-\frac{\pi Eh^2}{8\sqrt{3(1-\nu^2)}\left[1+e^{-\pi}\right]}f(n) \tag{17}$$

где
$$f(n)=\frac{\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{h}{R}\dfrac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right)^4+1}{n^2\left[1+\dfrac{3}{20}\left(1+\dfrac{h}{R}\dfrac{n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\right)^2\right]}$$

Очевидно, что определение $\min M_0^{(1)}$ от $n$ приводится к определению $\min$ функции $f(n)$ от $n$. В табл. 1 приведены минимальные значения $f(n)$ при $\nu^2=0{,}1$. Как видно, при уменьшении толщины оболочки уменьшаются минимальные значения функции $f(n)$, а значение $n$, при котором достигаются эти минимумы, возрастают.

Сравнивая (17) с условием прочности (8), получим

$$\frac{\sigma_s}{E}>\frac{\sqrt{2}\,\pi}{8e^{\pi/4}\left[1+e^{-\pi}\right]}f(n) \tag{18}$$

что является условием, при котором задача устойчивости имеет смысл. При невыполнении условия (18) оболочка теряет прочность до потери устойчивости.

В табл. 1 приведены значения правой части условия (18).

*Таблица 1*

| $n$ | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h/R$ | 0.067 | 0.05 | 0.035 | 0.02 | 0.015 | 0.01 | 0.008 | 0.0067 | 0.0057 | 0.005 |
| $f(n)$ | 0.12647 | 0.0929 | 0.065 | 0.0371 | 0.0279 | 0.0186 | 0.01485 | 0.01237 | 0.01061 | 0.00928 |
| $\frac{\sigma_s}{E} >$ | 0.0307 | 0.0225 | 0.0158 | 0.009 | 0.0068 | 0.0045 | 0.0036 | 0.003 | 0.00259 | 0.00226 |

К примеру, для оболочки, изготовленной из стали 30 (закаленной), $\frac{\sigma_s}{E} = 0{,}0055$ и, следовательно, согласно табл. 1, постановка вопроса устойчивости возможна при $\frac{h}{R} \leq 0.01$. В частности, при $\frac{h}{R} = 0.01$ минимальный критический момент достигается при $n = 11$. Аналогично, для оболочки из латуни $\frac{\sigma_s}{E} = 0{,}00375$ и вопрос устойчивости возможен при $\frac{h}{R} \leq 0{,}008$, соответственно, минимальный критический момент достигается при $n = 13$. А для оболочек из алюминия, бронзы и меди (прутковой) задача устойчивости имеет смысл для более тонких оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А.* Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Прикл. механика. 1969, т, 5, вып. 6, с. 112-116.
2. *Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А.* К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. - Докл. АН. Арм. ССР, 1968, т. 56, No 1, с.156-159.
3. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. - М. Физматгиз, 1963. 879 с.
4. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. - М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 460 с.



Институт механики НАН Армении



Поступила в редакцию
27. 09. 1994