

СМЕШАННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЛУНОЧЕК

ԱՐՄՅՈՆՅԱՆ Լ. Ա.

Հարությունյան Լ. Ա.

Դիֆարկված է տարբեր նյութերից երկու լուսնաձև մարմինների կոնտակտային խնդիրը, երբ կոնտակտի ուղիղ գծի վրա կան երկու սիմետրիկ ճեղքեր:

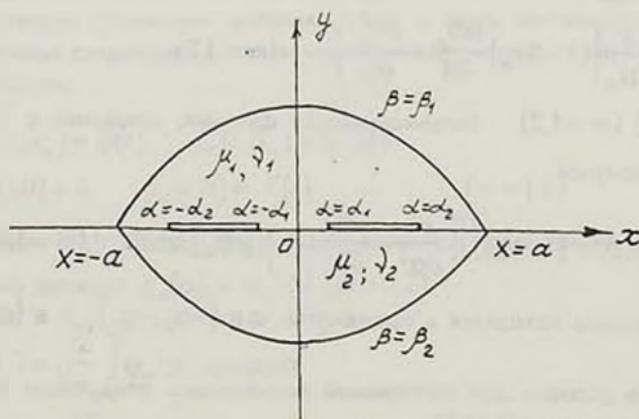
Arutunian L. A.

A Mixed Contact Problem for Two Moon-type Bodies.

Решена задача о контакте двух луночек из различных материалов, когда на прямой линии контакта имеются два одинаковых разреза.

В данной работе рассматривается плоская контактная задача для двух внутренних луночных областей, имеющих различные упругие характеристике. Контакт происходит по прямой линии без трения по всей линии кроме двух симметричных участков (фиг.1).

Ось  $Ox$  направим по линии контакта, а ось  $Oy$  - по оси симметрии.



Фиг. 1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат  $\alpha, \beta$ , которые связаны с декартовыми координатами  $x, y$  соотношениями [1,2]

$$g(\alpha, \beta)x = \operatorname{sh} \alpha; \quad g(\alpha, \beta)y = \sin \beta \quad (1.1)$$

где  $g(\alpha, \beta) = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) / a$  характеризует масштаб преобразования,  $a$  - параметр биполярных координат.

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками  $\mu_1, \nu_1$  занимает область  $\alpha \in (-\infty; \infty); \beta \in [0, \beta_1]$ , а второй с упругими характеристиками  $\mu_2, \nu_2$  - область  $\alpha \in (-\infty; \infty); \beta \in [\beta_2, 0]$ .

Функции напряжений  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m = 1, 2$ ) удовлетворяют бигармоническому уравнению в биполярной системе координат [2]

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) (g\Phi_m) = 0 \quad (m = 1, 2) \quad (1.2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений следующими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\alpha}^{(m)} &= \left( (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right) (g\Phi_m) \\ \alpha \sigma_{\beta}^{(m)} &= \left( (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right) (g\Phi_m) \\ \alpha \tau_{\alpha\beta}^{(m)} &= -(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2 (g\Phi_m)}{\partial \alpha \partial \beta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$U_m = \frac{g}{2\mu_m} \left( (1 - 2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial \beta} \right)$$

$$V_m = \frac{g}{2\mu_m} \left( (1 - 2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \alpha} \right) \quad (m = 1, 2)$$

где  $\Psi_m(\alpha, \beta)$  ( $m = 1, 2$ ) - бигармоническая функция, связанная с  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m = 1, 2$ ) формулой

$$g\Psi_m(\alpha, \beta) = (1 - \nu_m) \iint \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) (g\Phi_m) d\alpha d\beta \quad (m = 1, 2) \quad (1.4)$$

Пусть трещины находятся в промежутке  $\alpha \in (-\alpha_2, -\alpha_1)$ ,  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\beta = 0$ .

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [2,3]:

$$\left. (g\Phi_m) \right|_{\beta=\beta_m} = \varphi_m(\alpha), \quad \left. \frac{\partial (g\Phi_m)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_m} = \psi_m(\alpha) \quad (1.5)$$

Предполагая, что  $\varphi_m(\alpha)$  и  $\psi_m(\alpha)$  ( $m=1,2$ ) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеет следующие условия:

$$\left. \frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta} \right|_{\beta=0} = 0 \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$$

$$(g\Phi_m)|_{\beta=0} = 0 \quad |\alpha| \in (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$(g\Phi_1)|_{\beta=0} = (g\Phi_2)|_{\beta=0} \quad |\alpha| \in (0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$$

$$V_1|_{\beta=0} = V_2|_{\beta=0} \quad |\alpha| \in (0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty) \quad (m=1,2)$$
(1.6)

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m=1,2$ ) удобно представить интегралом Фурье такого вида

$$g\Phi_m(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_m(t, \beta) \cos \alpha t dt \quad (m=1,2)$$
(1.7)

где

$$f_m(t, \beta) = A_m(t) \operatorname{ch} t\beta \cos \beta + B_m(t) \operatorname{sh} t\beta \sin \beta + C_m(t) \operatorname{sh} t\beta \cos \beta + D_m(t) \operatorname{ch} t\beta \sin \beta \quad (m=1,2)$$
(1.8)

Удовлетворяя граничным условиям (1.5) и часть контактным условиям (1.6), получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$f_m(t, \beta_m) = \bar{\varphi}(t), \quad f'_m(t, \beta_m) = \bar{\psi}_m(t)$$

$$f'_m(t, 0) = 0, \quad f_m(t, 0) = X(t) \quad (m=1,2)$$
(1.9)

где величины  $\bar{\varphi}_m(t)$  и  $\bar{\psi}_m(t)$  ( $m=1,2$ ) являются преобразованиями Фурье от значений функции  $\varphi_m(\alpha)$  и  $\psi_m(\alpha)$  ( $m=1,2$ ).

$$\bar{\varphi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_m(\alpha) \cos t\alpha d\alpha$$

$$\bar{\psi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_m(\alpha) \cos t\alpha d\alpha \quad (m=1,2)$$
(1.10)

а  $X(t)$  - пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (1.9) для неизвестных  $A_m(t)$ ,  $B_m(t)$ ,  $C_m(t)$  и  $D_m(t)$

( $m = 1, 2$ ), найдем значения через неизвестную  $X(t)$

$$A_m(t) = X(t)$$

$$B_m(t) = -\frac{t(\operatorname{sh}^2 t\beta_m + \sin^2 \beta_m)}{\Delta_m(t)} X(t) + \frac{(t^2 + 1)\operatorname{sh} t\beta_m + \sin \beta_m}{\Delta_m(t)} \bar{\varphi}_m(t) + \frac{\operatorname{sh} t\beta_m \cos \beta_m - t \operatorname{ch} t\beta_m \sin \beta_m}{\Delta_m(t)} \bar{\psi}_m(t) \quad (1.11)$$

$$C_m(t) = -\frac{\operatorname{sh} 2t\beta_m + t \sin 2\beta_m}{2\Delta_m(t)} X(t) - \frac{\operatorname{sh} t\beta_m \sin \beta_m}{\Delta_m(t)} \bar{\psi}_m(t) + \frac{t \operatorname{ch} t\beta_m \sin \beta_m + \operatorname{sh} t\beta_m \cos \beta_m}{\Delta_m(t)} \bar{\varphi}_m(t)$$

$$D_m(T) = -tC_m(t) \quad (m = 1, 2)$$

где

$$\Delta_m(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m - t^2 \sin^2 \beta_m \quad (m = 1, 2) \quad (1.12)$$

Неизвестная функция  $X(t)$  определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которые получаются из следующих контактных условия (1.6):

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} X(t) \cos t \alpha dt = 0 & \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2) \\ \int_0^{\infty} t(M(t)X(t) + N(t)) \cos t \alpha dt = 0 & \alpha \in (0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty) \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{\operatorname{sh} 2t\beta_1 + t \sin 2\beta_1}{2\Delta_1(t)} - h \frac{\operatorname{sh} 2t\beta_2 + t \sin 2\beta_2}{2\Delta_2(t)} \\ N(t) &= -\frac{t \operatorname{ch} t\beta_1 \sin \beta_1 + \operatorname{sh} t\beta_1 \cos \beta_1}{\Delta_1(t)} \bar{\varphi}_1(t) + \frac{\operatorname{sh} t\beta_1 \sin \beta_1}{\Delta_1(t)} \bar{\psi}_1(t) + \\ &+ \frac{h t \operatorname{ch} t\beta_2 \sin \beta_2 + \operatorname{sh} t\beta_2 \cos \beta_2}{\Delta_2(t)} \bar{\varphi}_2(t) - \frac{h \operatorname{sh} t\beta_2 \sin \beta_2}{\Delta_2(t)} \bar{\psi}_2(t) \quad (1.14) \\ h &= \frac{\mu_1(1 - \nu_2)}{\mu_2(1 - \nu_1)} \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье, получаем интегральные уравнения

Фредгольма второго рода

$$X(t) = \frac{1}{\pi t M(t)} \int_0^{\infty} K(t, \tau) \{(\tau M(\tau) - 1)X(\tau) + \tau N(\tau)\} d\tau - \frac{N(t)}{M(t)}$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\sin(t + \tau)\alpha_2 - \sin(t + \tau)\alpha_1}{t + \tau} + \frac{\sin(t - \tau)\alpha_2 - \sin(t - \tau)\alpha_1}{t - \tau} \quad (1.15)$$

В частном случае, при  $\alpha_1 = \alpha_2$

$$X(t) = -\frac{N(t)}{M(t)} \quad (1.16)$$

решение совпадает с решением, полученным в работе [4], при  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_2 = \infty$  решение совпадает с решением, полученным в работе [4].

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\beta}^{(m)} \Big|_{\beta=0} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \{(\tau M(\tau) - 1)X(\tau) + \tau N(\tau)\} d\tau \times \\ &\times \int_0^{\infty} \left(-t^2(\operatorname{ch} \alpha + 1) \cos t\alpha + t \operatorname{sh} \alpha \sin t\alpha - \cos t\alpha\right) \frac{K(t, \tau) \Delta_1(t) \Delta_2(t)}{t \Delta(t)} dt - \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(-t^2(\operatorname{ch} \alpha + 1) \cos t\alpha + t \operatorname{sh} \alpha \sin t\alpha - \cos t\alpha\right) \frac{N(t)}{M(t)} dt \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= (\operatorname{sh} 2t\beta_1 + t \sin 2\beta_1)(\operatorname{sh}^2 t\beta_2 - t^2 \sin^2 \beta_2) - \\ &- h(\operatorname{sh} 2t\beta_2 + t \sin 2\beta_2)(\operatorname{sh}^2 t\beta_1 - t^2 \sin^2 \beta_1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Выясним характер напряжений в точках  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\alpha = \alpha_2$  и  $\alpha = \infty$ . Из (1.19) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\beta} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha} + \sqrt{\alpha_1 + \alpha}}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}} \cos t\alpha_1 - \right. \\ &\left. - \frac{\sqrt{\alpha - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_2 + \alpha}}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha_2^2}} \cos t\alpha_2 \right] Y(\tau) d\tau + H(\alpha) \end{aligned} \quad (1.19)$$

При  $\alpha = \alpha_1$  или  $\alpha = \alpha_2$  на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка  $1/2$ . В представленном виде (1.19) член, содержа-

щий особенность в точках  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ , разделен, а  $H(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha = \alpha_1$  или  $\alpha = \alpha_2$ .

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта  $x = a$  (т.е.  $\alpha = \infty$ ) нормальное напряжение представим в виде

$$\alpha \sigma_{\beta} \Big|_{\beta=0} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( t^2 (1 - \bar{e}^\alpha)^2 + it(1 + \bar{e}^{-2\alpha}) + 2\bar{e}^\alpha \right) \frac{V(t)}{\Delta(t)} e^{(1+it)\alpha} dt \quad (1.20)$$

где

$$V(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{t} \left( \int_0^{\infty} K(t, \tau) Y(\tau) d\tau - \pi t N(t) \right) \quad (1.21)$$

Для применения теоремы о вычетах интеграл (1.20) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при  $x < 0$  или  $\alpha < 0$ ) или нижней (при  $x > 0$  или  $\alpha > 0$ ) полуокружностям радиуса  $R \rightarrow \infty$  с центром в начале координат. После обычной процедуры (1.20) представим в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\beta} \Big|_{\beta=0} = & -i\pi \sqrt{2\pi} \left( t_1^2 (1 + \bar{e}^\alpha)^2 + it_1(1 + \bar{e}^{-2\alpha}) + 2\bar{e}^\alpha \right) \frac{V(t_1)}{\Delta'(t_1)} e^{(1-\eta_1 + i\xi_1)\alpha} - \\ & -i\pi \sqrt{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \text{Выч} \left( t_k^2 (1 - \bar{e}^\alpha)^2 + it_k(1 + \bar{e}^{-2\alpha}) + 2\bar{e}^\alpha \right) \frac{V(t_k)}{\Delta'(t_k)} e^{(1+i\eta_k)\alpha} \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $t_k = \xi_k - i\eta_k$  - корни уравнения  $\Delta(t) = 0$ , которые расположены в порядке возрастания положительных значений  $\eta_k$ .

Очевидно, характер напряженного состояния около края  $x = a$  ( $\alpha = \infty$ ) определяется величиной мнимой части первого простого корня  $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$  уравнения  $\Delta(t) = 0$ . Если  $\eta_1 > 1$ , имеем нулевое напряженное состояние. Если  $\eta_1 < 1$ , имеем концентрации напряжений. В случае  $\eta_1 = 1$  напряжения на краю поверхности контакта конечны.

Уравнения, характеризующее поведение напряжений, не зависит от внешних усилий. В общем случае меняются только коэффициенты особенностей.

В случае, когда размеры областей одинаковы, и нагружение-симметричное, решение задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [4, 5, 6].

### Л и т е р а т у р а

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М. -Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград, Изд. "Наука", 1968.

3. *Арутюнян Л. А.* Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек.- Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, 29, №1.
4. *Арутюнян Л. А., Аликян Ж. Г., Аветисян Г. А.* Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами.- Инж. проблемы строительной механики. ЕрПИ, Ереван, 1985.
5. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников -Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, №3.
6. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. - Изв. АН Арм ССР, Механика, 1976, т.29, №5.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
22. 11. 1993

## ԿԱՆՈՆՆԵՐ ՆԵՐԽՆԱԿՆԵՐԻ ՆՈՄԱՐ

1 Նայապահանի ԳԱՄ Գնդեկագրի «Մխիթարյան» սերիային երկրաչափով հոդվածներին կցվում է պաշտպանության բուլլետենային այն կիմնակից, որտեղ կադրաված է աշխատանքը:

2 Նոդվածները երկրաչափվում են հայերեն, անգլերեն կամ ռուսերեն, երկու օրինակից, հնարավորին չափ սևգծ, պարզ շարադրված:

3 Հանձնակներն ու նշանակումները գրվում են պարզ ու որոշակի, ընդ որում մեծատառերը ցայտուն կերպով պետք է փարբերվեն փոքրատառերից:

Էջն մեծատառերը և փոքրատառերը նման են իրենց գծադրությանը, մեծատառերն ընկզմվում են երկու գծիկով, իսկ փոքրատառերը երկու գծիկով կշվում են վերևից: Օրինակ՝ V և v, O և o, K և k, U և u, S և s և այլն: Գրագր. է. հատուկ փարբերակել O-ն, o-ն և 0-ն (զրո), սրի համար 0-ն (զրո) պետք է ընդգծել ներքևից բաստակուսի փակագծով (մապիկով):

Անհրաժեշտ է խնամքով գրել իրար նման աստեր՝ g և q, I և e, I, J, Y, u և n և այլն:

Նույնպես աստերն ընդգծել կարելի է մապիկով:

Ինդեքսն ու աստիճանացույցը պետք է սև մապիկով նշել աղեղով՝ համապատասխանաբար  $\circ$  կամ

$\cup$  օրինակ՝  $N_{\circ}^{\cup}$

Մաթեմատիկական նշանակումները ( $\sin$ ,  $\arcsin$ ,  $\ln$ ,  $\lg$ ,  $\lim$ ,  $\text{const}$  և այլն) ընդգծել կոչվածուսկան ուղիղ փակագծով:

4 Գլխավանդակները, ընդհանուր ցուցակով, կցվում է հորիզոնի վերջում: Ընդ որում, պնդակները կշվում են ներկայիս հաջորդականությամբ, եթե զիրք է՝ ներկայիս ազգանունը, անվան, հայրանվան սկզբնապատերը, աշխատանքային վերնագիրը, աստագրի անունը, կադրատակման փարբերիլը, հաջորդը, պրակը, էջերը:

Տեսքավան կոմները կշվում են բաստակուսի փակագծերի մեջ ստեղծում թվերով:

5 Գծագրերը կցվում են ստանդին թևարկրով: Նկարների վերևից կշվում են ձախ յտանցքում «նկ» կշվում:

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статьи, представляемые в "Известия НАН Армении, Механика", должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена работа.

2. Статьи представляются на армянском, английском или русском языках в двух экземплярах в возможно сжатой и ясно изложенной форме.

3. Формулы и все обозначения вписываются четко и ясно, при этом должно быть отчетливое различие между заглавными и строчными буквами.

В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию необходимо заглавные буквы подчеркнуть снизу двумя черточками, а строчные отметить двумя черточками сверху, например: V и v, O и o, K и k, U и u, S и s и т. д. Следует также делать различие между O, o и 0 (нулем), для чего 0 (нуль) следует подчеркнуть снизу квадратной скопкой (карандашом).

Необходимо тщательно вписывать похожие друг на друга буквы, например g и q, I и e, I, J, Y, u и n и др. Греческие буквы подчеркивать красным карандашом.

Индексы и показатели следует отметить черным карандашом соответственно дугой  $\cup$  или  $\circ$ , например:  $N_{\circ}^{\cup}$ .

Математические обозначения, например:  $\sin$ ,  $\arcsin$ ,  $\ln$ ,  $\lg$ ,  $\lim$ ,  $\text{const}$  и т. д. надо подчеркивать горизонтальной прямой скопкой.

6. Литература приводится общим списком в конце статьи, при этом в нижеследующей последовательности указываются: для книги - фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания, издательство, год издания, страницы; для журнала - фамилия и инициалы автора, наименование работы, название журнала, год издания, том (подчеркнуть) и выпуск. Ссылка на литературу в тексте дается цифрой в квадратных скопках.

7. Чертежи прилагаются на отдельных листах. Места иллюстраций указываются на левом поле страницы отметкой "фиг..."