

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
 ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ

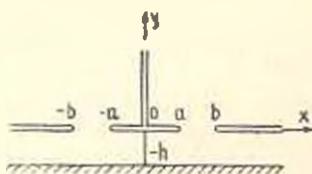
АФЯН В. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей конечную и три полубесконечные трещины (фиг. 1). Используя симметричность задачи, рассматривается напряженное состояние квадранта и полосы с соответствующими граничными условиями.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости для квадранта, когда на границе заданы напряжения

$$\sigma_{xx}(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \quad (0 < y < \infty) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q(x), \quad (0 < x < \infty)$$



Фиг. 1

Как известно [1, 2], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$. Решение бигармонического уравнения, ограниченное при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$, может быть представлено в виде

$$\Phi = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda) + \lambda y A_4(\lambda)] \frac{\cos \lambda x}{\exp(\lambda y)} d\lambda + \int_0^{\infty} [A_2(\lambda) + \lambda x A_4(\lambda)] \frac{\cos \lambda y}{\exp(\lambda x)} d\lambda \quad (1.2)$$

Здесь $A_i(\lambda)$ ($i=1, 4$) — функции, подлежащие определению из граничных условий (1.1).

Удовлетворением условий (1.1) и использованием формулы обращения Фурье, получается

$$\lambda^2 A_2(\lambda) - \lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q(t) \sin \lambda t dt = \bar{q}(\lambda) \quad (1.3)$$

$$\lambda^2 A_4(\lambda) - \lambda^2 A_3(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(t) \sin \lambda t dt = \bar{\tau}(\lambda)$$

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(t^2 + \lambda^2)(A_2(t) - 2A_3(t)) + (t^2 - \lambda^2)A_4(t)] \frac{t^2 dt}{(t^2 + \lambda^2)^2} - \bar{p}(\lambda) \quad (1.4)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(t^2 + \lambda^2)(A_1(t) - 2A_3(t)) + (t^2 - \lambda^2)A_4(t)] \frac{t^2 dt}{(t^2 + \lambda^2)^2} - \bar{\sigma}(\lambda)$$

где $\bar{p}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p(t) \cos \lambda t dt$, $\bar{\sigma}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma(t) \cos \lambda t dt$

откуда

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 A_2(t)}{(t^2 + \lambda^2)^2} dt + f_1(\lambda) \quad (1.5)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 A_1(t)}{(t^2 + \lambda^2)^2} dt + \varphi_1(\lambda)$$

где

$$f_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t) r(t) dt - \bar{p}(\lambda)$$

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t) q(t) dt - \bar{\sigma}(\lambda)$$

Система (1.5) посредством координатных преобразований $\lambda = \exp(\tau)$, $t = \exp(\xi)$ приводится к системе интегральных уравнений с разностным ядром, решение которой имеет вид

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} r(t) K_r(t, \lambda) dt + \int_0^{\infty} q(t) K_q(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} p(t) K_p(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} \sigma(t) K_\sigma(t, \lambda) dt \right\} \quad (1.6)$$

$$\lambda^2 A_2(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} p(t) K_p(t, \lambda) dt + \int_0^{\infty} \sigma(t) K_\sigma(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} r(t) K_r(t, \lambda) dt - \int_0^{\infty} q(t) K_q(t, \lambda) dt \right\}$$

Здесь использованы обозначения:

$$K_0(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+iv)\Gamma(iv) \operatorname{vsh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_1(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(iv) \operatorname{vsh} \pi v \frac{dv}{2(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_2(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+iv)\Gamma(iv) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{(\lambda t)^{v\Delta}}$$

$$K_3(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(iv) \operatorname{sh} \pi v \operatorname{vsh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{2(\lambda t)^{v\Delta}}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $\Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi v}{2} - v^2$. Неизвестные функции $A_3(\lambda)$ и $A_4(\lambda)$ определяются по формуле (1.3) и, в результате, бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ полностью определяется.

Использованием формул для перемещений, получается

$$\begin{aligned} EU_x(x, 0) = & (1-\nu)p(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q(t) dt + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p(t) dt + \\ & + \int_0^{\infty} R_2(t, x) q(t) dt - \int_0^{\infty} R_5(t, x) \sigma(t) dt - \int_0^{\infty} R_6(t, x) \tau(t) dt \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} EV_x(x, 0) = & (\nu-1)q(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p(t) dt + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p(t) dt - \\ & - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q(t) dt + \int_0^{\infty} R_5(t, x) \tau(t) dt - \int_0^{\infty} R_6(t, x) \sigma(t) dt \end{aligned}$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{3,4}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[\nu \cos \left(v \ln \frac{x}{t} \right) \mp \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) \right] \frac{v dv}{\Delta}$$

$$R_5(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\pi v}{2} \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) (1+v^2) \frac{dv}{\Delta}$$

$$R_6(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} + v^2}{\Delta} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi v}{2}} \right] \exp \left(-\frac{\pi v}{2} \right) \sin \left(v \ln \frac{x}{t} \right) dv$$

$$R_{s_1}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[v \cos\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \pm \sin\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \right] \operatorname{sh} \frac{\pi v}{2} \frac{dv}{\Delta}$$

$$R_s(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} v \operatorname{ch} \frac{\pi v}{2} \sin\left(v \ln \frac{x}{t}\right) \frac{dv}{\Delta}$$

2. Рассматривается плоская задача теории упругости для полосы ($-\infty < x < \infty$, $-h < y < 0$) при граничных условиях

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q(x) \quad (2.1)$$

$$U(x, -h) = V(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

Бигармоническую функцию ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} [B_1 \operatorname{sh}^2 \lambda y + B_2 \operatorname{ch}^2 \lambda y + \lambda y B_3 \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y B_4 \operatorname{ch} \lambda y] \cos \lambda x d\lambda \quad (2.2)$$

где $B_i(\lambda)$ ($i=1, 4$)—неизвестные функции. Удовлетворением граничных условий (2.1) для определения искоемых функций $B_i(\lambda)$ получается система алгебраических уравнений

$$\lambda^2 B_2(\lambda) = -\bar{p}(\lambda), \quad \lambda^2 B_1(\lambda) = \bar{q}(\lambda) - \lambda^2 B_4(\lambda) \quad (2.3)$$

$$B_1(\lambda) \operatorname{sh}^2 \lambda h + B_2(\lambda) \operatorname{ch}^2 \lambda h - \left[\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h + \frac{2}{1+\nu} \operatorname{ch}^2 \lambda h \right] B_3(\lambda) - \\ - \left[\lambda h \operatorname{ch}^2 \lambda h + \frac{2}{1+\nu} \operatorname{sh}^2 \lambda h \right] B_4(\lambda) = 0$$

$$B_1(\lambda) \operatorname{ch}^2 \lambda h - B_2(\lambda) \operatorname{sh}^2 \lambda h - \left[\lambda h \operatorname{ch}^2 \lambda h + \frac{\nu-1}{\nu+1} \operatorname{sh}^2 \lambda h \right] B_3(\lambda) + \\ + \left[\lambda h \operatorname{sh}^2 \lambda h + \frac{\nu-1}{\nu+1} \operatorname{ch}^2 \lambda h \right] B_4(\lambda) = 0$$

Решение полученной системы представляется в виде

$$\lambda^2 B_2(\lambda) = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \bar{p}(\lambda) \left[\operatorname{sh}^2 \lambda h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch}^2 \lambda h \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}(\lambda) \left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \operatorname{sh}^2 \lambda h - \lambda h \right] \right\}$$

$$\lambda^2 B_1(\lambda) = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \bar{p}(\lambda) \left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda h \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}(\lambda) \left[\operatorname{sh}^2 \lambda h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch}^2 \lambda h \right] \right\}$$

$$\lambda^2 B_3(\lambda) = \bar{q}(\lambda) - \lambda^2 B_4(\lambda), \quad \lambda^2 B_4(\lambda) = -\bar{p}(\lambda)$$

где $\Delta_1 = \operatorname{sh}^2 h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \lambda^2 h^2$

Компоненты перемещений определяются по формулам

$$EU_1(x, 0) = (1-\nu)p(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x-t} \right] q(t) dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} K_2(t, x) p(t) dt + \int_0^{\infty} K_3(t, x) q(t) dt \quad (2.4)$$

$$EV_1(x, 0) = (\nu-1)q(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t} \right] p(t) dt -$$

$$- \int_0^{\infty} K_2(t, x) p(t) dt - \int_0^{\infty} K_4(t, x) q(t) dt, \quad (0 < x < \infty)$$

где

$$K_2(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\lambda^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \cos^2 x \cos^2 t \frac{d\lambda}{\Delta_1}$$

$$K_3(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\lambda^2 h^2 - \lambda h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \exp(-2\lambda h) + 0,5 \right] \times$$

$$\times \cos^2 x \sin^2 t \frac{d\lambda}{\Delta_1}$$

$$K_4(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\lambda^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \sin^2 x \sin^2 t \frac{d\lambda}{\Delta_1}, \quad (0 < t, x < \infty)$$

3. Использование полученных в предыдущих пунктах решений (1.7) и (2.4) вспомогательных задач, решение поставленной задачи при граничных условиях

$$\sigma_{xy}(0, y) = c(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y), \quad (0 < y < \infty)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = q_0(x), \quad (0 < x < a, \quad b < x < \infty) \quad (3.1)$$

$$U(x, -h) = V(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty)$$

сводится к удовлетворению условий контакта между составляющими частями исходной области

$$U(x, 0^+) = U(x, 0^-), \quad V(x, 0^+) = V(x, 0^-), \quad a < x < b$$

и приводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных $p(x)$ —нормального и $q(x)$ —касательного напряжений

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b q(t) \frac{dt}{x-t} + \int_a^b M_3(t, x) p(t) dt + \int_a^b M_2(t, x) q(t) dt = F_1(x)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b p(t) \frac{dt}{x-t} + \int_a^b M_3(t, x) p(t) dt - \int_a^b M_4(t, x) q(t) dt = F_2(x) \quad (3.2)$$

$(a < x < b)$

где

$$4M_{1,1}(t, x) = R_{1,1}(t, x) - K_{1,1}(t, x), \quad 4M_3(t, x) = R_3(t, x) + K_3(t, x)$$

$$4M_2(t, x) = R_2(t, x) - K_2(t, x) - \frac{4}{\pi(x+t)}$$

Решение системы (3.2) с учетом интегрального условия равновесия

$$\int_a^b p(t) dt = \int_0^\infty \sigma(y) dy - \int_0^a p_0(x) dx - \int_b^\infty p_0(x) dx$$

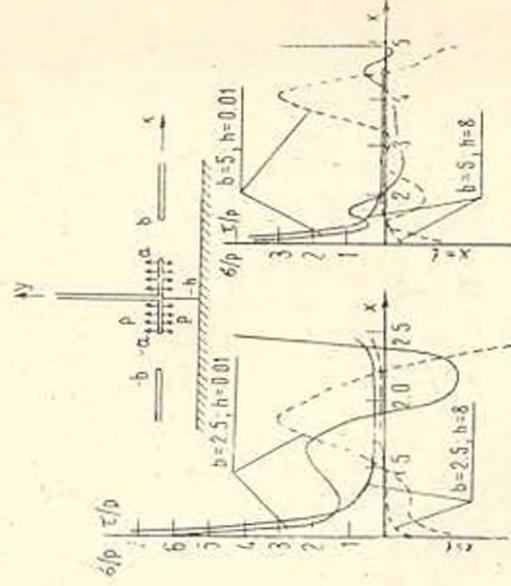
$$\int_a^b q(t) dt = \int_0^\infty \sigma(y) dy - \int_0^a q_0(x) dx - \int_b^\infty q_0(x) dx$$

в классе функций, не ограниченных на концах отрезка, существует и единственно [3, 4]. Приближенное решение (3.2) построено по Чебышевским узлам, следуя [5]. В табл. 1,2 для различных величин параметров b и h ($a=1$) приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_{1,2}(a)$, $k_{1,2}(b)$ (отнесенных к $p \sqrt{(b-a)/2}$). Далее приведены графики нормального (сплошные линии) и касательного (штриховые линии) напряжений в случае нормального давления интенсивностью p на трещинах.

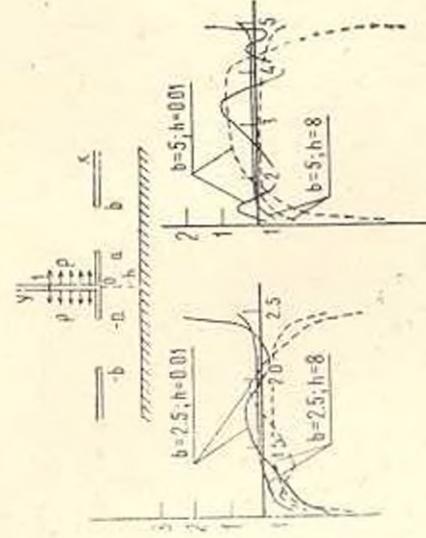
Таблица 1

$k_{1,2}(a)$	h/a		0.1	0.5	1.0	5.0	8.0
	b/a						
k_1	1.1		28.742	29.587	29.793	29.946	29.946
k_2			-1.780	-0.720	-0.376	-0.309	-0.313
k_1	1.5		2.918	3.354	3.462	3.540	3.542
k_2			-0.578	-0.310	-0.176	-0.138	-0.140
k_1	2		1.201	1.419	1.486	1.547	1.549
k_2			-0.322	-0.192	-0.123	-0.093	-0.095
k_1	5		0.263	0.282	0.306	0.331	0.332
k_2			-0.251	-0.064	-0.044	-0.035	-0.035

$k_{1,2}(b)$	k/a		0.1	0.5	1.0	5.0	8.0
	b/a						
k_1 k_2	1.1	1.1	17.477	17.084	16.927	16.784	16.780
			1.816	0.738	0.376	0.295	0.298
k_1 k_2	1.5	1.5	0.974	1.108	1.090	1.034	1.034
			0.492	0.314	0.178	0.112	0.114
k_1 k_2	2	2	0.202	0.287	0.293	0.266	0.265
			0.191	0.153	0.122	0.065	0.066
k_1 k_2	5	5	0.111	0.050	0.029	0.012	0.012
			0.041	0.012	0.023	0.014	0.013



Фиг. 2



Фиг. 3

ABOUT THE PROBLEM OF ELASTIC HALF-PLANE WEAKENED WITH CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՀԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒՂԱՑՎԱՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱԶԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Բ. Ա. ԱՅՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ և վերջավոր ճաքերով թուլացված առաձգական կիսաճարձիկային ճարձիկի խնդիրը, երբ ճաքերի ափերին ազդում են ինքնաճաճաստրակչոված լարումներ: Ստացված են ինտեղիսիվային գործակիցներ ճաքերի ծայրերին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984, 255 с.
3. Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Граничные интегральные уравнения и задачи теории трещин. Л.: Изд.—во ЛГУ, 1986, 88 с.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985, 253 с.
5. Erdogan F. E., Gupta G. D. On the numerical solutions of singular integral equations.—Quart Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
15.VI.1988