

УДК 536.241

НАГРЕВ СОСТАВНОГО СЛОЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ
 ТЕПЛА

САРГСЯН А. М.

В работе определяется трехмерное квазистационарное температурное поле в составном слое, нагреваемом двумя точечными источниками тепла постоянной мощности, движущимися с постоянной скоростью параллельно поверхности раздела двух разнородных полубесконечных сред. Через поверхности составного слоя происходит теплообмен с внешней средой постоянной температуры по закону Ньютона. Тепловой контакт между слоями принимается идеальным. На бесконечности разность температур слоя и среды, а также производные температуры исчезают. Для однородного слоя решение этой задачи получено в работе [1].

В предположении постоянства теплофизических характеристик материалов слоев и коэффициентов теплоотдачи с боковых поверхностей температурное поле удовлетворяет уравнению [1]

$$\Delta T_j + \frac{v}{a_j} \frac{\partial T_j}{\partial x} = -\frac{q_j}{\lambda_j} \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \delta_z(z-z_j)$$

$$|x| < \infty, |z| < \delta, j=1, y > 0; j=2, y < 0$$

граничным условиям

$$\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial z} = \mp \alpha_j T_j, z = \pm \delta$$

и условиям на контактной поверхности $y=0$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha(T_1 - T_2)$$

Здесь T_j — приращение температуры по сравнению с равномерной начальной, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$, v — скорость движения источников тепла, q_j — мощность источников тепла, λ_j и a_j — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материалов слоев, (x_j, y_j, z_j) — координаты точек приложения источников тепла, α_j — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm \delta$, x — контактная проводимость, 2δ — толщина слоев, $\delta(x)$ — функция Дирака.

Если на поверхностях $z = \pm \delta$ заданы температура окружающей среды или условия тепловой изоляции, то эти граничные условия пол

чаются из (2) путем предельного перехода $\alpha \ddagger \rightarrow \infty$ или $\alpha \ddagger \rightarrow 0$. Так как на границах каждого слоя возможны девять различных комбинаций таких условий, то для составного слоя их восемьдесят одно. Соответствующие краевые задачи (из них только двадцать семь независимых) решаются единым методом интегральных преобразований Фурье и предельными переходами.

Применение экспоненциального преобразования Фурье по x и конечного преобразования по z [2] к уравнению (1) и условиям (2) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \bar{T}_j}{dy^2} - (\xi^2 + i\xi p_j + \beta_{jm}) \bar{T}_j = -\frac{q_j}{2\pi i} \frac{K_j(\beta_{jm}, z_j)}{\exp(-i\xi x_j)} \delta(y - y_j) \quad (4)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) = & C_{jm}(\xi) \exp[-|y|b_{jm}(\xi)] + \frac{q_j}{4\pi i} \frac{K_j(\beta_{jm}, z_j)}{b_{jm}(\xi)} \times \\ & \times \exp[i\xi x_j - |y - y_j|b_{jm}(\xi)] \end{aligned} \quad (5)$$

В (4) и (5) введены следующие обозначения:

$$\bar{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_j(\xi, y, z) K_j(\beta_{jm}, z) dz, \quad \bar{T}_j(\xi, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x, y, z) \exp(i\xi x) dx$$

$$K_j(\beta_{jm}, z) = \frac{[\beta_{jm} \cos \beta_{jm}(\delta + z) + h_j^- \sin \beta_{jm}(\delta + z)] \sqrt{2}}{[h_j^- + (\beta_{jm} + h_j^- h_j^*)(2\delta + h_j^*(\beta_{jm} + h_j^- h_j^*)^{-1})]^{1/2}}$$

$$b_j(\xi) = (\xi^2 + i\xi p_j + \beta_{jm}^2)^{1/2}, \quad \text{Re} b_{jm}(\xi) > 0, \quad p_j = v/a_j$$

β_{jm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\text{tg} 2\delta \beta_{jm} = \beta_{jm} (h_j^+ + h_j^-) (\beta_{jm}^2 - h_j^+ h_j^-) \quad (6)$$

Возвращаясь по формуле $\bar{T}_j(\xi, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) K_j(\beta_{jm}, z)$ от

$\bar{T}_j(\xi, y, \beta_{jm})$ к $\bar{T}_j(\xi, y, z)$ и удовлетворяя преобразованным контактным условиям, полученным из (3) после применения экспоненциального преобразования Фурье, для определения неизвестных коэффициентов $C_{jm}(\xi)$ получим совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_{1n}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^{(1)}(\xi) C_{2m}(\xi) + \gamma_n^{(1)}(\xi), \quad C_{2n}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)}(\xi) C_{1m}(\xi) + \gamma_n^{(2)}(\xi) \\ C_{1k}(\xi) = C_{1k}(\xi) \sqrt{b_{1k}(\xi)}, \quad C_{2k}(\xi) = C_{2k}(\xi) \delta_{2k}(\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая асимптотическое решение трансцендентного уравнения (6)

$$\beta_{jk} = \pi k / 2\delta + (h_j^+ + h_j^-) / \pi k - O(k^{-3})$$

при больших значениях k [3] и метод исследования бесконечных систем, приведенный, например, в работе [4], доказываются, что сумма $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{mn}^{(j)}|$ при больших значениях n стремится к нулю, как $O(1/\sqrt{n})$.

Следовательно, бесконечная система (7), свободные члены которой также стремятся к нулю, квазиволне регулярна и ее решение можно получить с любой необходимой точностью методом последовательных приближений.

В частном случае $h_1^{\pm} = h_2^{\pm} = h^{\pm}$ система (7) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, находим ($h_j = \alpha_j / \lambda_j$)

$$C_{jm}(\xi) = \frac{2h_j b_{jm}(\xi) A_{(3-j)m}(\xi) + [b_{1m}(\xi) b_{2m}(\xi) + (-1)^j (h_1 b_{1m}(\xi) - h_2 b_{-m}(\xi))] A_{jm}(\xi)}{b_{jm}(\xi) [h_1 b_{2m}(\xi) + b_{1m}(\xi) b_{2m}(\xi) + h_2 b_{1m}(\xi)]} \quad (8)$$

$$A_{jm}(\xi) = \frac{q_j}{4\pi \lambda_j} K_j(\beta_{jm}, z_j) \exp [i\xi x_j - |y_j| b_{jm}(\xi)]$$

Определяя из (7) или (8) $C_{jm}(\xi)$ для температурного поля будем иметь

$$T_j(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} K_j(\beta_{jm}, z) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_{jm}(\xi) \exp[-|y| b_{jm}(\xi)] + \frac{q_j K_j(\beta_{jm}, z_j)}{4\pi \lambda_j b_{jm}(\xi)} \exp[i\xi x_j - |y - y_j| b_{jm}(\xi)] \right\} \exp(-i\xi x) d\xi \quad (9)$$

Имея фундаментальное решение (9), можно получить температурное поле в составном слое, нагреваемом линейными, плоскими и объемными источниками тепла [5]. Например, температурное поле в составном слое с теплоизолированными поверхностями, возникающее от линейных источников тепла имеет вид

$$T_j(x, y) = \sqrt{2\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_{j0}(\xi) \exp[-|y| b_{j0}(\xi)] + \frac{q_j \exp(-i\xi x)}{4\pi \lambda_j b_{jm}(\xi)} \times \right. \\ \left. \times \exp[-|y - y_j| b_{j0}(\xi)] \right\} \exp(-i\xi x) d\xi$$

Полученное решение представляет собой температуру в составной бесконечной пластинке единичной толщины с теплоизолированными поверхностями, нагреваемой двумя линейными источниками тепла [6].

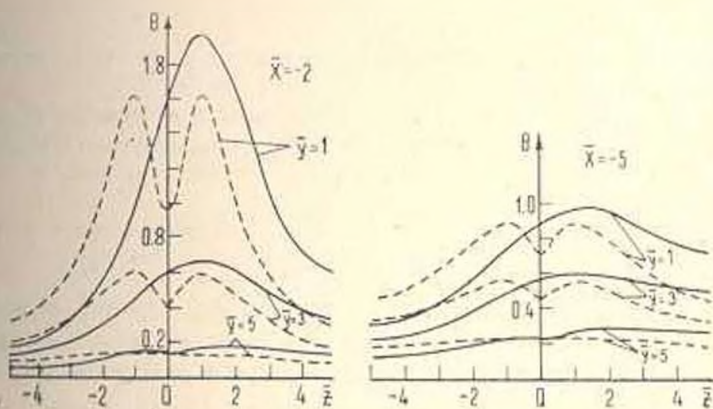
Подставляя в (8) и (9) $\rho_2 = \rho_1$, $h_j^{\pm} = 0$, $q_2 / \lambda_2 = q_1 / \lambda_1$, $x_2 = x_1$, $|y_2| = y_1$, $z_2 = z_1$, получим

$$T_1(x, y, z) = T_2(x, y, z) = \frac{q_1}{2\pi \lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \beta_m(\delta + z) \cos \beta_m(\delta + z_1) \times \\ \times \exp[(x - x_1) \rho_1 / 2] [K_0(\gamma_m r_+) + K_0(\gamma_m r_-)]$$

где $K_0(u)$ — функция Макдональда нулевого порядка,

$$\gamma_m = (\beta_m^2 + \rho_1^2/4)^{1/2}, \quad r_{\pm} = |(x-x_1)^2 + (y \pm y_1)^2|^{1/2}, \quad \beta_m = \pi m/2\delta$$

Температурное поле не зависит от условий на контактной поверхности и симметрично относительно этой поверхности. Штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $m=0$ содержит множитель 0,5.



Фиг. 1

Численные расчеты проведены по формуле (10) после перехода к безразмерным величинам $\bar{x} = \rho_1 x$, $\bar{y} = \rho_1 y$, $\bar{z} = \rho_1 z$, $\bar{\delta} = \rho_1 \delta$, $\theta = 2\pi \delta_1 T_1 / q_1$, $\bar{\beta}_m = \beta_m / \rho_1$. Результаты расчетов при $\bar{x}_1 = \rho_1 x_1 = 0$; $\bar{y}_1 = \rho_1 y_1 = 0,5$; $\bar{z}_1 = \rho_1 z_1 = 1$ представлены на фиг. 1 сплошными линиями. Там же, для сравнения, пунктирными линиями приведены графики распределения температуры, симметричной относительно оси \bar{z} .

COMPOSITE LAYER HEATING BY MOVING HEAT SOURCES

A. M. SARGSYAN

ՈՍՂԱԻՐՅԱԿ ՇԵՐՏԻ ՏԱՔԱՅՈՒԻՐԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂՅՈՒՐՆԵՐՈՎ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Որոշված է բաղադրյալ շերտի հոսաչափ բվաղիստացիոնար ջերմային դաշտը, որը տաքացվում է երկու տարատեսակ կիսաանվերջ շերտերի բաժանման մակերևույթին զուգահեռ շարվող ջերմային աղբյուրներով: Զերմային կոնտակտը շերտերի միջև բնորոշված է ոչ խցիսալիսան:

Շերտերի մակերևույթների միջոցով շրջադասի հետ կատարվող ջերմափոխանակությունը սեղի է ունենում ջերմաաղտոլթյան տարրեր գործակիցներով՝ ըստ նյութոսնի օրենքի:

ինդրի լուծումը, որը ստացված է Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, բերված է անհայտ գործակիցների նկատմամբ բվազիլիս-վին ռեզուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные поля от объемных источников.—Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
2. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.—Киев: Наукова думка, 1976, 282 с.
3. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.—М.: Наука, 1978. 376 с.
4. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25. № 2, с. 15—36.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1971. 512 с.
6. Саргсян А. М. Нагрев составной пластинки источниками тепла, движущимися параллельно прямолинейному контакту.—Изв. АН Арм. ССР, серия тех. наук, 1980, № 3, с. 52—59.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.X.1987