

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ЗАДЕЛАННОГО
 ПРЯМОУГОЛЬНИКА С УЧЕТОМ СЦЕПЛЕНИЯ

ՄԿՐՏՉԻՆ Ա. Մ., ԹԵՐՅԱՆ Ս. Ա.

Контактные задачи для прямоугольной области, без учета сцепления, рассмотрены в многих работах, например [1—4, 9] и др. С учетом трения и сцепления рассмотрены в работах [7, 10] и др.

1. Рассматривается плоская контактная задача для упругого прямоугольника длиной $2a$, высотой b , обески концами заделанного в жесткие стенки (штампы) на некоторую, различную для верхней и нижней плоскостей, глубину (фиг. 1). Принимается, что между стенками и прямоугольником имеет место полное сцепление. На свободных от заделок частях прямоугольника действуют заданные нагрузки.

Прямоугольник имеет одну ось симметрии, и для симметричного нагружения рассматривается одна половина прямоугольника при следующих граничных условиях:

$$\tau_{xy}(0, y) = u(0, y) = 0, \quad (0 < y < b) \quad (1.1)$$

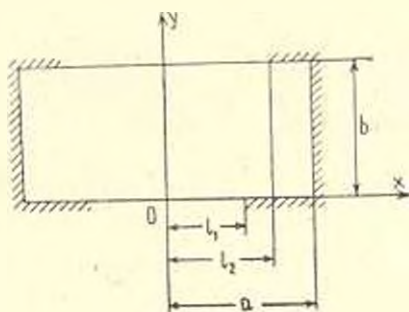
$$u(a, y) = 0, \quad v(a, y) = 0, \quad (0 \leq y \leq b) \quad (1.2)$$

$$\sigma_y(x, 0) = h_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l_1) \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad (l_1 \leq x \leq a) \quad (1.4)$$

$$\sigma_y(x, b) = h_2(x), \quad \tau_{xy}(x, b) = 0 \quad (0 < x < l_2) \quad (1.5)$$

$$u(x, b) = v(x, b) = 0, \quad (l_2 \leq x \leq a) \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Задача решается при помощи бигармонической функции Эри, представленной в виде суммы двух тригонометрических рядов Фурье [1] где

$$\Phi(x, y) = d_1 x^2 + d_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y) | \cos \alpha_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \operatorname{ch} \beta_k x + \beta_k x H_k \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y \quad (1.7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b}$$

При таком выборе функции напряжений условия (1.1) удовлетворяются.

В дальнейшем, величины и уравнения, относящиеся к линии $y=0$, будут снабжены индексом $j=1$, а к линии $y=b$ — индексом $j=2$.

2. Для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) сначала построим решение вспомогательной задачи, когда по всему контуру прямоугольника заданы перемещения. Следовательно, должны быть удовлетворены условия (1.2), (1.4) и (1.6), которые дополним на интервале ортогональности, вводя новые неизвестные функции

$$u(x, (j-1)b) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(j)} \sin \alpha_k x = \begin{cases} f_j(x), & (0 \leq x < l_j) \\ 0, & (l_j \leq x \leq a) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$v(x, (j-1)b) = \frac{\varphi_j^{(j)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(j)} \cos \alpha_k x \begin{cases} \varphi_j(x), & (0 \leq x \leq l_j) \\ 0, & (l_j \leq x \leq a) \end{cases}$$

Пользуясь формулами обращения для рядов Фурье и вводя новые неизвестные

$$X_k = (-1)^k \alpha_k^2 (C_k \operatorname{ch} \alpha_k b + D_k \operatorname{sh} \alpha_k b), \quad Y_k = (-1)^k C_k, \quad Z_k = (-1)^k \beta_k^2 H_k \operatorname{sh} \beta_k a \quad (2.2)$$

для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$X_p [1 + N_p^{(1)}] + Y_p M_p^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} Z_k + a_p^{(1)} \\ Y_p [1 + N_p^{(2)}] + X_p M_p^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{pk} Z_k + a_p^{(2)} \quad (2.3)$$

$$Z_p [1 + N_p^{(2)}] = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} [X_k - (-1)^p Y_k] + b_p, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и следующие связи:

$$\alpha_k^2 A_k = - \frac{\alpha_k \varphi_k^{(2)}}{(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha_k b} + \frac{\alpha_k \varphi_k^{(1)} \operatorname{cth} \alpha_k b}{1+\nu} + \frac{(-1)^k X_k}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b \right) + \\ + (-1)^p Y_k \left(\frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} \alpha_k b \right), \quad d_2 = \nu d_1 \\ \alpha_k^2 B_k = - \frac{\alpha_k \varphi_k^{(1)}}{1+\nu} + \frac{1-\nu}{1+\nu} (-1)^k Y_k, \quad 2b(d_1 - \nu d_2) = \varphi_0^{(2)} - \varphi_0^{(1)} \quad (2.4)$$

$$\frac{\beta_k E_k}{\text{sh} \beta_k a} = \frac{(-1)^k Z_k}{\text{sh} \beta_k a} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \beta_k a \text{cth} \beta_k a \right), \quad E \varphi_0 = \varphi_0^{(1)}$$

Коэффициенты и свободные члены системы (2.3) определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{4(1+\nu)\alpha_p^2}{a(3-\nu)} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \quad b_{pk} = \frac{4(1+\nu)\beta_p^2}{b(3-\nu)} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \\ a_p^{(j)} &= (-1)^{j-1} \frac{(-1)^p}{3-\nu} [\alpha_p f_p^{(j-1)} + (-1)^{j-1} \alpha_p \varphi_p^{(j-1)} \text{cth} \alpha_p b] - \frac{(-1)^p}{(3-\nu) \text{sh} 2\alpha_p b} \alpha_p \varphi_p^{(j)} \\ b_p &= -\frac{2(-1)^p}{b(3-\nu)} \left[\varphi_0^{(1)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(1)}}{\alpha_m^2 + \beta_p^2} \right] + \\ &+ \frac{2}{b(3-\nu)} \left[\varphi_0^{(2)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(2)}}{\alpha_m^2 + \beta_p^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

В (2.4) и (2.5) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_p^{(j)} &= \frac{2E}{a} \int_0^{l_j} f_j(x) \sin \alpha_p x dx, \quad \varphi_p^{(j)} = \frac{2E}{a} \int_0^{l_j} \varphi_j(x) \cos \alpha_p x dx \\ \varphi_0^{(j)} &= \frac{E}{a} \int_0^{l_j} \varphi_j(x) dx, \quad M_p^{(1)} = \frac{(1-\nu)\alpha_p b \text{ch} \alpha_p b}{(3-\nu) \text{sh}^2 \alpha_p b} - \frac{1}{\text{sh} 2\alpha_p b} \\ N_p^{(1)} &= \frac{e^{-\alpha_p b}}{\text{sh} \alpha_p b} - \frac{(1+\nu)\alpha_p b}{(3-\nu) \text{sh}^2 \alpha_p b}, \quad N_p^{(2)} = \frac{e^{-\beta_p a}}{\text{sh} \beta_p a} - \frac{(1+\nu)\beta_p a}{(3-\nu) \text{sh}^2 \beta_p a} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Для определения неизвестных перемещений удовлетворим условиям для напряжений (1.3) и (1.5) на свободных от штампов участках прямоугольника. Используя связи (2.4), обозначения (2.2) и значения X_k , Y_k из (2.3) с предварительным выделением главных частей, условия (1.3) и (1.5) после ряда преобразований сводятся к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Гильберта второго рода

$$q_j(u) + \frac{i(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)} \int_{-a_j}^{a_j} q_j(v) \text{ctg} \frac{v-u}{2} dv = K_j(u), \quad (-a_j < u < a_j), \quad (j=1, 2) \quad (3.1)$$

относительно некоторых комбинаций, связанных с производными неизвестных перемещений

$$q_j(u) = E \left[f_j \left(\frac{\alpha}{\pi} u \right) + i \varphi_j \left(\frac{\alpha}{\pi} u \right) \right] \quad (3.2)$$

В (3.1) введены обозначения

$$a_j = \frac{\pi}{a} l_j, \quad K_j(u) = H_j(u) + R_{j0} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} \cos ku + i \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} \sin ku \quad (3.3)$$

здесь

$$\begin{aligned}
 H_j(u) = & -\frac{1}{B} h_j \left(\frac{\alpha}{z} u \right), \quad R_{j0} = \frac{1}{B} \left[2d_1 + \frac{2}{a(1+\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2-j+m} Z_m}{\beta_m} \right] \\
 R_{jk}^{(1)} = & (-1)^j \frac{A}{B} \alpha_k \varphi_k^{(j)} N_{k1} + (-1)^{j-1} \frac{A}{B} \frac{\alpha_k \varphi_k^{(2-j)}}{\operatorname{sh} \alpha_k b} + \\
 & + (-1)^j \frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)} \cdot \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} [(2-j)Y_k + (j-1)X_k] + \\
 & + (-1)^{j-1} \frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)} \cdot \frac{\alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} [(2-j)X_k + (j-1)Y_k] +
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8}{aB(3-\nu)} (-1)^k \alpha_k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2-j+m} \beta_m Z_m}{(\beta_m^2 + \alpha_k^2)^2} + \frac{4(-1)^k}{aB(1+\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2-j+m} \beta_m Z_m}{\beta_m^2 + \alpha_k^2} \\
 R_{jk}^{(2)} = & \frac{A}{B} \frac{\alpha_k \varphi_k^{(3-j)}}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{A}{B} \alpha_k \varphi_k^{(j)} N_{k1} + \frac{2(-1)^k N_k^{(1)}}{B(1+\nu)} [(2-j)Y_k + (j-1)X_k] - \\
 & - \frac{(-1)^k}{B \operatorname{sh} \alpha_k b} [(2-j)X_k + (j-1)Y_k] \left| \frac{2}{1+\nu} - \frac{2\alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b}{3-\nu} \right| + \\
 & + \frac{(-1)^{j-1}}{aB(3-\nu)} 8(-1)^k \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2-j+m} \beta_m Z_m}{(\beta_m^2 + \alpha_k^2)^2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$N_{k1} = \frac{\exp(-\alpha_k b)}{\operatorname{sh} \alpha_k b}, \quad A = \frac{2}{(1+\nu)(3-\nu)}, \quad B = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(3-\nu)}$$

Правая часть (3.1) — $K_j(u)$, содержит неизвестные основных бесконечных систем и коэффициенты Фурье граничных функций, однако (3.1) будем решать в предположении, что правая часть — заданная функция, то есть будем обращать главную часть уравнения (3.1) [11]. Решение ищется в классе функций, которые на обоих концах отрезка интегрирования имеют интегрируемые особенности.

Обращением главной части, уравнения (3.1) приводятся к виду

$$q_j(u) = M_j K_j(u) + \frac{N_j Z_j(u)}{2\pi} \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} \frac{K_j(v) dv}{Z_j(v) \sin \frac{v-u}{2}} - \gamma_j(u), \quad (-\alpha_j < u < \alpha_j) \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_j(u) = & 2N_j Z_j(u) \left(A_j \sin \frac{u}{2} + B_j \cos \frac{u}{2} \right) \\
 Z_j(u) = & \left(\sin \frac{\alpha-u}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + (-1)^j i \gamma} \left(\sin \frac{\alpha+u}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + (-1)^{j-1} i \gamma}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad M_j = -\frac{(1-\nu)^2}{2A}, \quad N_j = (-1)^{j-1} 2iB$$

Условие разрешимости дает

$$A_j = (-1)^j B_j \operatorname{tg} \alpha_i \gamma \tag{3.8}$$

Для определения постоянных B_j проинтегрируем (3.6) в пределах от $-a_j$ до a_j и с учетом (2.1) получим, что $A_j = B_j = 0$.

Уравнения (3.6) после ряда преобразований приводятся также к виду

$$q_j(u) = L_j[H_j(u)] + L_j[R_j] + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} L_j[\cos ku] + i \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} L_j[\sin ku] \quad (3.9)$$

где для удобства записи введен оператор

$$L_j\{g(u)\} = -\frac{iN_j}{\operatorname{ch}\pi\gamma} Z_j(u) \operatorname{sh} \left[(-1)^j \alpha_j \gamma - i \frac{\pi}{2} \right] g(u) + \\ + \frac{N_j Z_j(u)}{2\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{g(\tau) - g(u)}{Z_j(\tau) \sin \frac{\tau - u}{2}} d\tau \quad (3.10)$$

Для замыкания систем алгебраических уравнений необходимо получить уравнения для коэффициентов Фурье разложений (2.1) $\varphi_p^{(j)}, f_p^{(j)}$. Чтобы получить такие уравнения, достаточно разложить в ряд Фурье функцию $q_j(u)$, представленную в виде (3.9).

Умножая (3.9) на $\sin pu, \cos pu$ и интегрируя по u от $-a_j$ до a_j для определения этих коэффициентов получим четыре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$= [x_p \varphi_p^{(j)}] = R_{j0} C_{kp}^{(1),j} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} C_{kp}^{(1),j} + i \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} S_{kp}^{(1),j} + H_p^{(1),j} \quad (3.11)$$

$$= [x_p f_p^{(j)}] = R_{j0} C_{kp}^{(2),j} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)} C_{kp}^{(2),j} + i \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)} S_{kp}^{(2),j} + H_p^{(2),j} \\ (p = 1, 2, \dots)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_{kp}^{(1),j} = i \int_{-a_j}^{a_j} L_j[\cos ku] \sin pu \, du, \quad C_{kp}^{(2),j} = \int_{-a_j}^{a_j} L_j[\cos ku] \cos pu \, du \\ (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

$$S_{kp}^{(1),j} = i \int_{-a_j}^{a_j} L_j[\sin ku] \sin pu \, du, \quad S_{kp}^{(2),j} = \int_{-a_j}^{a_j} L_j[\sin ku] \cos pu \, du \\ (k = 1, 2, \dots)$$

$$H_p^{(1),j} = i \int_{-a_j}^{a_j} L_j[H_j(u)] \sin pu \, du, \quad H_p^{(2),j} = \int_{-a_j}^{a_j} L_j[H_j(u)] \cos pu \, du$$

Задача свелась к решению совокупности бесконечных систем (2.3) и (3.11), которая квазиполна регуляризна. Регулярность бесконечных

систем типа (2.3) доказана многими авторами [1, 6], а сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечных систем (3.11) имеют порядок $O(k^{-1/2})$, следовательно, общая совокупность бесконечных систем квазивполне регулярна.

4. Формулы для контактных напряжений $\sigma_y(x, (j-1)b)$, $\tau_{xy}(x, (j-1)b)$ ($j=1, 2$) при $|x| > l_j$, после аналогичных преобразований, сделанных при получении уравнения (3.1), приводятся к виду

$$\sigma_j(u) = \frac{l(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)} \int_{-a_j}^{a_j} q_j(v) \operatorname{ctg} \frac{v-u}{2} dv - K_j(u), \quad (|u| > a_j) \quad (4.1)$$

где введены обозначения

$$\sigma_j(u) = -\sigma_y \left(\frac{a}{\pi} u, (j-1)b \right) + i\tau_{xy} \left(\frac{a}{\pi} u, (j-1)b \right), \quad K_j(u) = K_j(u) - H_j(u) \quad (4.2)$$

Представляя решение (3.6) в (4.1) и вычисляя полученные интегралы при условии $(|u| > a_j)$, в итоге для контактных напряжений получим следующие формулы с выделенными особенностями:

$$\begin{aligned} \sigma_j(u) = Z_j^{(0)}(u) & \left\{ \frac{\Lambda}{\pi \operatorname{ch} \pi \gamma} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{\bar{K}_j(\tau) - e^{i(\nu-\alpha)\tau} \bar{K}_j(u)}{Z_j(\tau) \sin \frac{\tau-u}{2}} d\tau + \right. \\ & + \frac{2}{\pi(1-\nu) \operatorname{ch} \pi \gamma} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{h_j(\tau) d\tau}{Z_j(\tau) \sin \frac{\tau-u}{2}} + e^{(-1)^{j-1} \alpha_j \gamma} \bar{K}_j(u) \left[e^{i \frac{\alpha_j}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^j i \gamma \right) \sin \frac{u-a_j}{2} + e^{-i \frac{\alpha_j}{2}} \left(-\frac{1}{2} + (-1)^{j-1} i \gamma \right) \sin \frac{u+a_j}{2} \right] \right\}, \quad (u > a_j) \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$Z_j^{(0)}(u) = \left(\sin \frac{\alpha+u}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + (-1)^{j-1} i \gamma} \left(\sin \frac{u-a}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + (-1)^j i \gamma}$$

Как видно из полученных формул, напряжения под штампом в точках $(|u|=a_j)$ изменения граничных условий имеют корневые особенности с осциллирующими множителями.

Для определения порядка особенностей в угловой точке воспользуемся процедурой, предложенной в работе [6], предполагая, что неизвестные системы (2.3) имеют порядок $X_k = \frac{\Lambda}{k^2}$, $Y_k = \frac{B}{k^2}$.

Для определения α получаем трансцендентное уравнение

$$\sin^2 \frac{\pi \alpha}{2} - \left(\frac{1+\nu}{3-\nu} \right)^2 \alpha^2 = 0 \quad (4.4)$$

Корень этого уравнения для различных ν меняется в пределах

$$1,379 < x < 1,634 \quad (4.5)$$

следовательно, напряжения в угловой точке особенностей не имеют.

5. Все коэффициенты (3.12), входящие в бесконечные системы, вычисляются и выражаются через гипергеометрические полиномы. Вычислим, к примеру, $C_{kp}^{(1,2)}$. Из (3.12) и (3.10) следует, что

$$C_{kp}^{(1,2)} = i \int_{-a_1}^{a_2} I_0[\cos ku] \sin pu \, du = \frac{N_2}{\operatorname{ch} \pi \gamma} \int_{-a_1}^{a_2} Z_2(u) \cos ku \sin pu \operatorname{sh} \left(x_2 \gamma - i \frac{u}{2} \right) du + \\ + \frac{i N_2}{2\pi} \int_{-a_1}^{a_1} Z(u) \sin pu \, du \int_{-a_2}^{a_2} \frac{\cos k\tau - \cos ku}{Z_2(\tau) \sin \frac{\tau-u}{2}} d\tau$$

Переходим к новым переменным

$$x = e^{iu}, \quad t = e^{i\tau}, \quad e^{ia_1} = a, \quad e^{-ia_2} = \bar{a} \quad (5.1)$$

с помощью которых коэффициент $C_{kp}^{(1,2)}$ приводится к вычислению интегралов типа

$$\int_{\frac{a}{a}}^a x^m Z^*(x) dx = \frac{a^m \pi}{\operatorname{ch} \pi \gamma} F \left(-m, \frac{1}{2} + i\gamma; 1; 1 - \bar{a}^2 \right) \\ \int_{\frac{a}{a}}^a \frac{dt}{t^m Z^*(t)} = -\frac{2\pi \sin^2 x_2}{\operatorname{ch} \pi \gamma} \left(\frac{1}{4} + \gamma^2 \right) a^{-m} F \left(m, \frac{3}{2} - i\gamma; 3; 1 - \bar{a}^2 \right) \quad (5.2)$$

где

$$Z^*(y) = (a-y)^{-\frac{1}{2} + i\gamma} (y-\bar{a})^{-\frac{1}{2} - i\gamma}$$

а $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Введем обозначение

$$a^{-m} F \left(m, \frac{k}{2} \pm i\gamma; k; 1 - \bar{a}^2 \right) = F_k^\pm(m), \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (k=1, 3) \quad (5.3)$$

тогда для $C_{kp}^{(1,2)}$ получим

$$C_{kp}^{(1,2)} = \frac{\pi(1-\nu)}{8} \{ F_1^+(-k-p) - F_1^-(p-k) + F_1^+(k-p) - F_1^-(k+p) + \\ + \exp(2x_2 \gamma) [F_1^-(1-k-p) - F_1^+(1+p-k) + F_1^+(1+k-p) - F_1^-(1+k+p)] \} + \\ + \frac{\pi(1-\nu)(1+4\gamma^2) \sin^2 x_2}{16} \sum_{n=1}^k \{ F_3^-(1+n-k) [F_1^+(1-n-p) - F_1^-(1-n+p)] - \\ - F_3^-(n+1) [F_1^+(1+k-n-p) - F_1^-(1+k-n+p)] \} \quad (5.4)$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты.

Используя формулы преобразований гипергеометрических функций, получаем, что $F_k^\pm(m)$ — действительные числа, которые определяются рекуррентными формулами

$$F_k^\pm(p+1) = \frac{k-p}{p} F_k^\pm(p-1) + \left(\frac{2p-k}{p} \cos \alpha_2 + \frac{2\gamma}{p} \sin \alpha_2 \right) F_k^\pm(p), \quad (p > 1) \quad (5.5)$$

$$F_k^\pm(-p-1) = -\frac{p}{k+p} F_k^\pm(1-p) + \frac{1}{p+k} [(2p+k) \cos \alpha_2 + 2\gamma \sin \alpha_2] F_k^\pm(-p), \quad (p < -1)$$

и

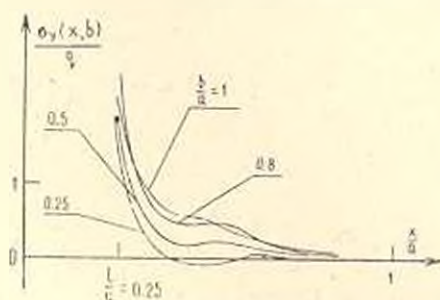
$$F(0, \beta; \gamma; z) = 1, \quad \bar{a}F\left(1, \frac{1}{2}, \pm i\gamma; 1; 1 - \bar{a}^2\right) = \exp(\pm 2\alpha_2 \gamma)$$

$$F_k^\pm(-1) = \cos \alpha_2 \pm \frac{2\gamma}{k} \sin \alpha_2 \quad (5.6)$$

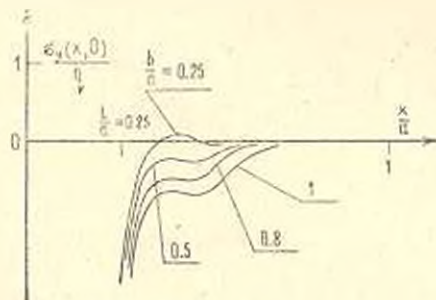
$$\bar{a}F\left(1, \frac{3}{2} \pm i\gamma; 3; 1 - \bar{a}^2\right) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha_2 \left(\frac{1}{4} \pm \gamma^2\right)} \left[\pm 2\gamma \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \right] \exp(\pm 2\alpha_2 \gamma)$$

Рассмотрен численный пример, когда

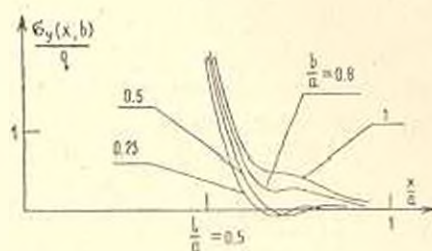
$$l_1 = l_2 = l, \quad h_1(x) = 0, \quad h_2(x) = q \quad (0 < x < l)$$



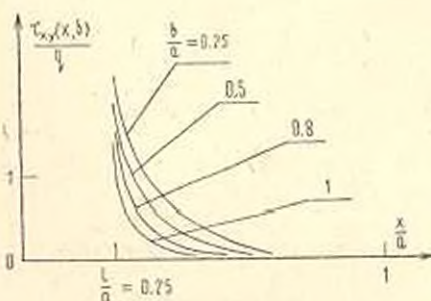
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Ниже приводятся графики распределения контактных напряжений $\sigma_y(x, (j-1)b)$, $\tau_{xy}(x, (j-1)b)$ для конкретных значений геометрических и физических параметров (фиг. 2—5).

$$\nu=0,3; \quad l/a=0,25; 0,5; \quad b/a=0,25; 0,5; 0,8; 1$$

Из графиков можно сделать следующие выводы: как нормальные, так и касательные напряжения, действующие на линиях заделки ($l \ll x \ll a$), с приближением к вершине прямого угла затухают и практически превращаются в нуль. Последнее свидетельствует о том, что в таких заделках напряжения в угловой точке не только не имеют особенностей, но и в случаях неподвижных грани заделки стремятся к нулю; нормальные контактные напряжения, с уменьшением глубины заделки могут менять свой знак [8, 9].

CONTACT PROBLEM FOR PARTIALLY CLAMPED RECTANGULAR WITH ACCOUNT OF COUPLING

A. M. MKRTCHIAN, S. H. TERZIAN

ԳԱՄՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԻՆՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐ՝ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒԹՅՈՎ

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Հ. ԹԵՐՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկվում է տասձգական ուղղանկյան համար կոնտակտային խնդիր, երբ ուղղանկյան եզրայիծր, բաշտուովյամբ երկու զուգահեռ կողմերի կենտրոնական մասերի, որտեղ տրված են շարունակներ, ամրակցված է:

Խնդիրը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինկուլյար ինտեգրալ հավասարումների, որոնք հետադաշում բերվում են դժային հանրահաշիվական հավասարումների անվերջ համակարգի:

Հարումների բանաձևերում անջատված են եղակիտթյունները:

Դիտարկված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.—ПММ, 1957, т. 21, вып. 1, т. 89—100.
2. Баблоян А. А., Мелконян А. П. Об одной смешанной задаче плоской теории упругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1970, т. 23, № 5, с. 5—19.
3. Баблоян А. А., Гулакян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, т. 22, № 1, с. 3—16.
4. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Смешанная задача для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1972, т. 25, № 2, с. 3—14.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф. Анализ напряженного состояния жестко-зашемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.—Тр. 7 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 205—211.

7. *Енгибарян А. А., Мкртчян А. М.* Контактная задача для прямоугольника, ослабленного разрезом.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. 36, № 6, с. 3—11.
8. *Мкртчян А. М.* Плоская задача для полосы с нецентральной разрезами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1971, т. 24, № 2, с. 16—23.
9. *Проценко В. Г., Проценко В. С., Синекон И. С.* О решении некоторых контактных задач для упругого прямоугольника структурным методом.—Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 9, с. 60—64.
10. *Терзян С. А.* Контактная задача для упругого прямоугольника симметричным образом частично заделанного в жесткие стенки.—В сб.; Исследования по механике твердого деформируемого тела.—Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981, с. 249—251.
11. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.—Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 122, кн. 3, 1962, с. 95—124.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.VII.1983