

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРТЧЯН П. А.

В работе выведены уравнения возмущенного движения вращающейся сверхпроводящей сферической оболочки в стационарном неоднородном магнитном поле. На основе этих уравнений исследуется поведение вращающейся оболочки в начальном однородном магнитном поле. Установлена возможность потери устойчивости невозмущенного состояния и получена формула для определения критического значения напряженности магнитного поля, при котором оболочка теряет устойчивость. Аналогичная задача устойчивости вращающейся ферромагнитной цилиндрической оболочки в однородном магнитном поле рассмотрена в работе [1].

1. Пусть замкнутая сферическая оболочка постоянной толщиной $2h$ и радиуса срединной поверхности R вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω и находится в постоянном во времени неоднородном магнитном поле H_0 . Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта тонким слоем сверхпроводящего сплава. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума. Ортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, вращающаяся вместе с оболочкой, выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам α_1, α_2 (α_1 — полярный угол, α_2 — азимутальный), а α_3 направлена по нормали к срединной поверхности.

В отношении тонкой оболочки считается справедливой гипотеза недеформируемых нормалей. Принимается также, что угловая скорость вращения ω такая, что выполняется условие квазистационарности $\omega R \ll c$ (c — скорость света).

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле в его тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля во внутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на поле H_0 магнитного поля H^0 , создаваемого экра-

пирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле $\vec{H} = -H_0 \vec{e}_z + \vec{H}^0$ определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [2]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0; \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{H}|_S = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{H} = \vec{H}_0 \quad (1.1)$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности S тела, $\vec{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того, что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления $\vec{P}_0$, определяемого формулой [2]

$$\vec{P}_0 = -\frac{H_0^2}{8\pi} \cdot \vec{n}_0 \quad (1.2)$$

Под действием нагрузки $\vec{P}_0$ в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}$ и тензором упругих напряжений $\hat{\sigma}_0$. Характеристики невозмущенного состояния определяются из следующих линейных уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}_0 = \vec{R}_0 \quad (1.3)$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\sigma}_0 = \begin{cases} \vec{P}_0 & \text{при } z_3 = h \\ 0 & \text{при } z_3 = -h \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\vec{R}_0 = -\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ — центробежная сила невозмущенного состояния,

Характеристики возмущенного состояния $(\vec{u}_0 + \vec{u}, \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}, \vec{H} + \vec{h})$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работе [3, 4], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния:

в области, занимаемой оболочкой

$$\operatorname{div} [\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_0(\vec{\nabla} \vec{u})^*] - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{R} \quad (1.5)$$

в области $(z_3 > h)$ вне тела оболочки

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (1.6)$$

где $\vec{R} = -\rho \vec{\omega} \times \{ \vec{\omega} \times [\vec{r}(\vec{\nabla} \vec{u})^* - \vec{u}(\vec{\nabla} \vec{r})^*] \}$.

Решения уравнений (1.4) и (1.5) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхностях $z_3 = \pm h$ оболочки:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n}_0 = \begin{cases} \vec{P} & \text{при } \alpha_3 = h \\ 0 & \text{при } \alpha_3 = -h \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\vec{n}_0 [\vec{h} \cdot \vec{H} (\vec{\nabla} \vec{u})^* + \vec{u} (\vec{\nabla} \vec{H})] = 0 \quad (1.8)$$

Здесь

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} (\operatorname{div} \vec{u}) \hat{E} + \vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^* \right] \quad (1.9)$$

$$\vec{P} = \vec{n}_0 \cdot \vec{T}, \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (H_k h_i + h_k H_i) - \frac{\delta_{ik}}{4\pi} (\vec{h} \cdot \vec{H}) \quad (1.10)$$

где $\hat{E}$ —единичный тензор, $\vec{\nabla}$ —оператор Гамильтона, $(\vec{\nabla} \vec{u})^*$ —транспонированный тензор $\vec{\nabla} \vec{u}$; $\vec{T}$ —тензор напряжений Максвелла возмущенного состояния, δ_{ik} —символ Кронекера.

Принимая гипотезу Кирхгофа-Лява и осредняя уравнения (1.5) по толщине оболочки, с учетом поверхностных условий (1.7)—(1.8) получим двумерную систему разрешающих дифференциальных уравнений магнитоупругости вращающейся сферической оболочки относительно перемещений срединной поверхности u, v, w . В эти уравнения входят неизвестные граничные значения компонент индуцированного магнитного поля h , которые определяются из уравнений (1.6) с учетом (1.8) и условия затухания возмущений на бесконечности [4]. В результате получаем замкнутую двумерную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций u, v, w . Указанная система уравнений в случае, когда оболочка вращается вокруг оси oz (фиг. 1) с постоянной угловой скоростью ω , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial u}{\partial z_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial z_1} (\Delta + 2)w \right] + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) + \\ & + \frac{1-\nu^2}{8\pi E h} \frac{H_1^*}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 H_1^* w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 H_2^* w) \right] - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \\ & - \frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E} \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{A_2}{A_1^2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right) w \right] = 0 \\ & \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial v}{\partial z_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial z_2} (\Delta + 2)w \right] + \frac{1-\nu}{R} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \right) - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1-\nu^2}{8\pi E h} \frac{H_2^*}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 H_1^* w) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 H_2^* w) \right] - \frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2}{E} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \\ & \left(\frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1+\nu}{R} \right) w - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1-\nu) (\Delta + 2)w - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ & + \frac{1-\nu^2}{2E h} \left[\frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2^2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2S^0}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{H_1^2}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{H_2^2}{A_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \Bigg] + \\ + \frac{\nu(1-\nu^2)\omega^2}{E} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{A_2^2}{A_1^2} w \right) = 0$$

Здесь индексом «+» отмечены значения соответствующих величин на поверхности оболочки $x_3 = h$,

$$F = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_0} - \ln \left(1 + \frac{2}{r_0} \right) \right] h_3^+(\xi, \eta, t) \sin \xi d\xi d\eta \\ h_3^+ = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 H_1^+ w) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 H_2^+ w) \right] \\ \theta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 v) \right] + \frac{2w}{R} \\ \Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right], \quad A_1 = R, \quad A_2 = R \sin x_1 \\ r_0^2 = 2(1 - \cos \theta_0), \quad \cos \theta_0 = \cos \xi \cos x_1 + \sin \xi \sin x_1 \cos(x_1 - x_2) \quad (1.12)$$

T_1^0, T_2^0, S^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние оболочки, которые определяем, решая задачу (1.3) — (1.4).

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

2. На основе полученной системы рассмотрим задачу статической устойчивости сферической оболочки, которая вращается вокруг оси oz с постоянной угловой скоростью ω и находится в однородном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0$

$$\vec{H}_0 = H_0 (\sin x_1 \vec{n}_1 - \cos x_1 \vec{n}_3), \quad H_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

где $\vec{n}_i$ — единичные векторы по направлениям x_i ($i=1, 2, 3$).

Невозмущенное магнитное поле определяется из решения задачи (1.1) и имеет вид

$$\vec{H} = H_0 \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R+h}{R+x_3} \right)^3 \right] \sin x_1 \vec{n}_1 - \left[1 - \left(\frac{R+h}{R+x_3} \right)^3 \right] \cos x_1 \vec{n}_3 \right\} \quad (2.2)$$

В силу (1.2) — (1.4) и (2.2) для усилий начального невозмущенного безмоментного состояния имеем

$$T_1^0 = -\frac{q_0 R}{4} \sin^2 x_1, \quad T_2^0 = \left(2\nu h R^2 \omega^2 - \frac{3q_0 R}{4} \right) \sin^2 x_1, \quad S^0 = 0 \quad (2.3)$$

где $q_0 = 9H_0^2/32\pi$.

Подставляя (2.2), (2.3) в систему (1.11) и исключая неизвестные u и v , рассматриваемую задачу устойчивости сводим к исследованию

следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения:

$$\begin{aligned} & [\delta^2(\Delta+1)^2+1](\Delta+2)w + \frac{q_0 R}{Eh} \left\{ (\Delta+1-\nu) \left[\frac{3A_2^2}{8A_1^2} \Delta w - \frac{A_2^2}{4A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 + \nu \right) \left[\frac{5A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 4 \left(1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \right) w \right] \right\} - \\ & - \frac{\rho w^2 R^2}{E} \left\{ (\Delta+1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{2A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{A_2^2}{A_1^2} w \right) - \left(\frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \nu \right) \left[\Delta w - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \left(2 - \frac{3A_2^2}{A_1^2} \right) w - \frac{2A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \right\} = 0 \quad (2.4) \end{aligned}$$

где $\delta^2 = h^2/3(1-\nu^2)R^2$, $F_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{2}{r_0} - \ln \left(1 + \frac{2}{r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} [w(\xi, \eta) \sin^2 \xi] d\xi d\eta$

Решение уравнения (2.4) представим в виде разложения

$$w = \left(\sum_{n=2}^{\infty} w_n P_{nk}(\cos x_1) \right) \cos kx_2, \quad (k \leq n, \quad i = 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

где w_n — неизвестные коэффициенты, $P_{nk}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4) и используя обычный процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно w_n :

$$\Omega_m^2 w_m - \sum_{n=i}^{\infty} b_{mn}^{(k)} w_n = 0, \quad (m=i, i+1, i+2, \dots, k \leq n) \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_m^2 &= \frac{E}{\rho R^2} (\lambda_m - 2) \frac{1 + \delta^2 (\lambda_m - 1)^2}{\lambda_m - 1 + \nu}, \quad \lambda_m = m(m+1) \\ b_{mn}^{(k)} &= \frac{\lambda_n - 1 + \nu}{\lambda_m - 1 + \nu} \left| \frac{q_0}{\rho R h} [A_{kn}^{(1)} \delta_{m,n} + A_{kn}^{(1)} \delta_{m,n-2} + A_{kn}^{(2)} \delta_{m,n-2} + \right. \\ & \left. - \nu^2 [B_{kn} \delta_{m,n} + B_{kn}^{(1)} \delta_{m,n-2} + B_{kn}^{(2)} \delta_{m,n-2}] \right| \quad (2.7) \end{aligned}$$

В (2.7) Ω_m — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

$$\begin{aligned} A_{kn} &= \frac{1}{4\lambda_n - 3} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} [2n^4 - 11n^3 - 20n^2 - 7n^3 - 8n^2 + 8n + k^2(10n^4 + \right. \\ & \left. + 31n^3 + n^3 - 30n + 12)] + \frac{4(1-\nu)}{\lambda_n - 1 + \nu} [2\lambda_n(\lambda_n - 1) - k^2(2\lambda_n - 3)] \right\} \\ A_{kn}^{(1)} &= - \frac{(n+k)(n+k-1)}{2(4n^2-1)} \left| n^2 - 9n + 6 + \frac{8(1-\nu)(n^2 - 3n - 10)}{\lambda_n - 1 + \nu} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{kn}^{(2)} &= -\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2(2n+1)(2n+3)} \left[n^2 - 5n - 9 + \frac{8(1+\nu)(n^2+5n+6)}{\lambda_n-1+\nu} \right] \\
B_{kn} &= \frac{1}{4\lambda_n-3} \left[4\lambda_n \cdot (4\lambda_n-15)k^2 - \frac{2\lambda_n(1+\nu)(\lambda_n-1+k^2)}{\lambda_n-1+\nu} \right] \\
B_{kn}^{(1)} &= -\frac{2n(n-k)(n+k-1)}{4n^2-1} \left[1 - \frac{(1+\nu)(n-2)}{2(\lambda_n-1+\nu)} \right] \\
B_{kn}^{(2)} &= -\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n+3)} \left[2n+1 + \frac{(1+\nu)(n^2+4n+3)}{\lambda_n-1+\nu} \right]
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Условием существования нетривиального решения системы (2.6) является равенство нулю следующего бесконечного определителя

$$[\beta_{mn} + C_{mn}] = 0 \quad (2.9)$$

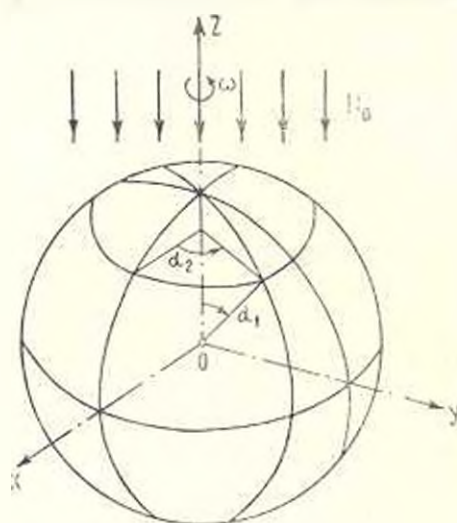
где $C_{mn} = -b_{mn}^{(k)}/\Omega_m \Omega_n$.

В силу (2.7) и (2.8) легко заметить, что бесконечный определитель, входящий в уравнение (2.9), относится к классу сходящихся (нормальных) определителей.

Из уравнения (2.9) в первом приближении ($n=m=l$) для критического значения внешнего магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость, получим следующую формулу:

$$H_{0*} = \frac{4}{3} \left[\frac{2\pi R \rho h}{A_{R,n}} (\Omega_n^2 + B_{nn} \omega^2) \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что увеличение скорости вращения приводит к увеличению критического значения напряженности внешнего магнитного поля. В табл. 1 для оболочки, изготовленной из алюминия ($E =$



Фиг. 1

$= 7 \cdot 10^{10}$ н/м; $\nu=0,3$; $\rho=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³) и покрытой тонким сверхпроводящим слоем сплава Nb_2Sn , когда $\omega = 50$ с⁻¹, $R=0,25$ м, приведены минимальные значения H_{0*} по числам волн n и k при различных отношениях h/R .

Таблица 1

$2h/R$	k	n	$\min H_{0*} (10^2 \text{ кА/м})$ (k, n)
1,50	13	13	8,9946
1,100	18	18	6,3113
1,125	21	21	5,6365
1,250	29	29	3,9622
1,500	41	41	2,7924

Отметим, что для выбранного сплава критическое значение внешнего магнитного поля, превышение которого приводит к разрушению сверхпроводящего свойства материала, $H_k \approx 1,6 \cdot 10^4$ кА/м.

STABILITY OF A ROTATING SUPERCONDUCTIVE SPHERICAL SHELL IN A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

ՊՏՏՎՈՂ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԵՌԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԻՒ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԿԵՒՍԱԿԱՆ ԿԱՇՏՈՒՄ

Պ. Չ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում ստացված են պատվող գերհաղորդիչ թաղանթի զրգոված վիճակի շարժման հավասարումները ստացիոնար անհամասեռ մագնիսական դաշտում: Այդ հավասարումների հիման վրա հետազոտված է պատվող թաղանթի վարքը սկզբնական համասեռ մագնիսական դաշտում: Ցույց է տրված չզրգոված վիճակի կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը և ստացված է բանաձև՝ մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքի որոշման համար, որի գերազանցումը թաղանթը կորցնում է կայունությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Асаян Д. Д., Багдасарян Г. Е. Устойчивость вращающейся магнитомягкой шеврической оболочки в однородном магнитном поле.—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тез. докл., Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1984, с. 31—38.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 522 с.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1985, т. 38, № 5, с. 22—32.

Երևանский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
20.1.1987