

УДК 539.374

ВВИНЧИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНУЮ ТРУБУ

АКОПЯН Г. А.

Рассматривается соосное внедрение с одновременным вращением вокруг своей оси жесткого цилиндрического тела в анизотропную, идеально-жестко-пластическую трубу, материал которого подчиняется соотношениям Мизеса-Хилла [1]. Подобная картина пластического деформирования встречается при клинпрессовой сварке разнородных труб [2]. Технологическая схема такого рода сварки представляет собой предварительный нагрев и соосное впрессовывание трубы из более твердого материала с монотонно возрастающим по оси внешним диаметром в трубу из более мягкого материала, помещенную в плотную недеформируемую цилиндрическую прессформу. Процесс соединения материалов происходит в твердой фазе, причем физический контакт образуется за счет пластической деформации более мягкого материала, вызывающей пластические деформации в приповерхностном весьма тонком слое трубы из более твердого материала. Заметных объемных формоизменений этой трубы в процессе впрессовывания не наблюдается.

§1. Основные уравнения задачи. 1. Общие соотношения теории анизотропного идеального жестко-пластического течения в цилиндрических координатах в обычных обозначениях имеют вид:

дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

условие текучести Мизеса-Хилла

$$F_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + G_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + H_0(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + L_0\tau_{\theta z}^2 + M_0\tau_{rz}^2 + N_0\tau_{r\theta}^2 = 1 \quad (1.2)$$

зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещения и напряжений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega [H_0(\sigma_r - \sigma_\theta) + G_0(\sigma_r - \sigma_\theta)]$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega [F_\theta(z_0 - z_1) + H_\theta(z_1 - z_r)] \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \Omega [F_z(z_1 - z_0) + G_z(z_1 - z_r)] \\
2\gamma_{rz} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = N_0 \tau_{rz} \Omega \\
2\gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = L_0 \tau_{z\theta} \Omega \\
2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = M_0 \tau_{r\theta} \Omega
\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Компоненты напряжений и скоростей перемещений можно представить через произвольные функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -2A - 2Bz - 2C\theta + \int_a^r \left[2\mu(F+G)\varphi' - \lambda \left(Ff' - G \frac{f}{r} \right) \right] \frac{\Omega_*}{r} dr \\
\sigma_\theta &= \sigma_r + \Omega_* \left[2\mu(F+G)\varphi' - \lambda \left(Ff' - G \frac{f}{r} \right) \right], \quad \tau_{r\theta} = C + \frac{D}{r^2} \\
\sigma_z &= \sigma_r + \Omega_* \left\{ 2\mu F\varphi' - \lambda \left[(F+H)f' + H \frac{f}{r} \right] \right\}, \quad \tau_{rz} = Br + \frac{E}{r} \\
\tau_{\theta z} &= 2L\Omega_* \left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)' \right], \quad u = (\lambda f - 2\mu\varphi) \exp(\lambda z + \mu\theta) \\
v &= 2(r\varphi)' \exp(\lambda z + \mu\theta) + Kr, \quad w = -\frac{1}{r}(rf)' \exp(\lambda z + \mu\theta) + T
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где λ, μ, a — заданные постоянные; A, B, C, D, E, K, T — произвольные постоянные и введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Omega_* &= \sqrt{1 - M_0 \tau_{\theta z}^2 + N_0 \tau_{rz}^2} \left\{ (G+F)(\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - 2G \frac{\lambda}{r} (\lambda f' - 2\mu\varphi')(rf)' + \right. \\
&\quad \left. + (H+G) \frac{\lambda^2}{r^2} (rf)^2 + 4L \left[\lambda(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2}(rf)' \right]^2 \right\}^{-1/2} \\
F &= \frac{F_0}{\Delta}, \quad G = \frac{G_0}{\Delta}, \quad H = \frac{H_0}{\Delta}, \quad L = L_0^{-1}, \quad M = M_0^{-1}, \quad N = N_0^{-1} \\
\Delta &= F_0 G_0 + G_0 H_0 + H_0 F_0
\end{aligned}$$

Уравнения (1.4) будут решением системы уравнений (1.1)–(1.3), если функции $f(r)$ и $\varphi(r)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{1 + \lambda^2 r^2}{r^2} f + 2\mu\lambda\varphi + \frac{M_0 \tau_{rz}}{\sqrt{1 - M_0 \tau_{\theta z}^2 - N_0 \tau_{rz}^2}} \left\{ (G+F)(\lambda f' - 2\mu\varphi')^2 - \right.$$

$$-2G \frac{\lambda}{r} (\lambda f' - 2\mu \varphi') (rf)' + (G+H) \frac{f^2}{r^2} (rf)^2 + 4L \left[i(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2} (rf)' \right]^2 \Bigg]^{1/2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{1+\mu^2}{r^2} \varphi + \frac{\lambda \varphi}{2r^2} f - \frac{N_0 \tau_{rz}}{2r \sqrt{1-M_0^2 \tau_{rz}^2 - N_0^2 \tau_{\theta z}^2}} \left[(G+F)(\lambda f' - 2\mu \varphi')^2 - \right. \\ \left. - 2G \frac{\lambda}{r} (\lambda f' - 2\mu \varphi') (rf)' + (G-H) \frac{f^2}{r^2} (rf)^2 + 4L \left[i(r\varphi)' - \frac{\mu}{2r^2} (rf)' \right]^2 \right]^{1/2} = 0$$

Полученная система уравнений кроме своих постоянных содержит еще четыре произвольные постоянные, входящие в функции τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$. Характер течения пластической массы на граничных поверхностях тела определяет краевые условия для этой системы, а из условий, накладываемых на указанные касательные напряжения на этих поверхностях, находятся произвольные постоянные, содержащиеся в этих выражениях. Гидростатическая постоянная A определяется из условия равновесия тела в продольном направлении. Решение (1.4) может представлять, в частности, пространственное деформирование пластического материала между шероховатыми жесткими сближающимися поверхностями $R=a, \pm b \exp(\lambda z + \mu \theta)$, где a , и b , — положительные заданные постоянные.

3. В случае осесимметричного деформирования имеем $C=\mu=0$. Вводя обозначение $(rf)' = z(r)$, для компонентов напряжений из (1.4) имеем

$$\sigma_r = -2A - 2Bz - z \int_a^r \left(Ff' - G \frac{f}{r} \right) \frac{\omega}{r} dr, \quad z = \text{sign} \lambda \\ \sigma_z = \sigma_r - z \left(Ff' - G \frac{f}{r} \right) \omega, \quad \sigma_\theta = \sigma_r - z \left[(F+H)f' + H \frac{f}{r} \right] \omega \quad (1.6) \\ \tau_{rz} = 2L\dot{\varphi}\omega, \quad \tau_{\theta z} = \frac{D}{r^2}, \quad \tau_{\theta r} = Br + \frac{E}{r}$$

где обозначено

$$\omega = \frac{\sqrt{1-M_0^2 \tau_{rz}^2 - N_0^2 \tau_{\theta z}^2}}{\sqrt{(F+H)f^2 + 2H \frac{f'}{r} f + (G+H) \frac{f^2}{r^2} + 4L\dot{\varphi}^2}} \quad (1.7)$$

Компоненты скоростей перемещений

$$u = f \exp(\lambda z), \quad v = \chi r + 2\psi \exp(\lambda z), \quad w = -\frac{1}{r} (rf)' \exp(\lambda z) + T \quad (1.8)$$

Вместо (1.5) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

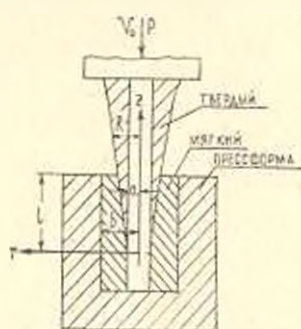
$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{1+\lambda^2 r^2}{r^2} f + \frac{\omega M_0 \tau_{rz}}{\sqrt{1-M_0^2 \tau_{rz}^2 - N_0^2 \tau_{\theta z}^2}} \times$$

$$\times \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f'f}{r} + (G+H) \frac{f^2}{r^2} + 4L\psi^2} = 0$$

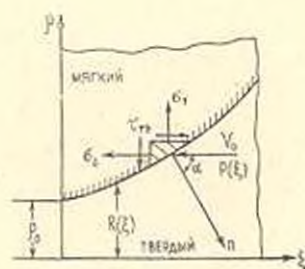
$$\psi - \frac{\psi}{r} - \frac{\omega N_0 r_0}{2 \sqrt{1 - M_0^2 r_0^2 - N_0^2 r_0^2}} \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f'f}{r} + (G+H) \frac{f^2}{r^2} + 4L\psi^2} = 0 \quad (1.9)$$

Будем отличать внутреннее и внешнее внедрение в зависимости от того жесткий элемент выпрессовывается с внутренней или с внешней стороны по отношению к элементу из более мягкого материала.

§ 2. *Внутреннее ввинчивание.* Пусть в абсолютно жесткую цилиндрическую прессформу плотно помещена цилиндрическая труба из идеально-жестко-пластического анизотропного материала с внутренним и внешним радиусами a и b , соответственно, а в нее соосно выпрессовывается, совершая одновременно вращательное движение вокруг своей оси с угловой скоростью ω , цилиндрическая труба из значительно более твердого материала с переменным внешним радиусом $R(z) = a + u_1 \exp\left(\nu \frac{z}{b}\right)$, где ν и u_1 — заданные положительные постоянные (фиг. 1). Материал этой трубы считаем недеформируемым.



Фиг. 1



Фиг. 2

Цилиндрическую координатную систему закрепляем с жесткой трубой так, чтобы плоскость $z=0$ прошла через входное торцевое сечение, а положительное направление оси z — по оси труб, против направления движения. Полагаем, что вращение жесткой трубы происходит в сторону возрастания полярной координаты θ . Считаем, что материал деформируемой анизотропной трубы по всей толщине и области $z > 0$ переходит в чисто пластическое состояние, а торцы $z=l$ этой трубы считаем свободным от внешних сил.

Введем обозначения: $u_0 = \frac{u_1}{b}$, $\lambda = \frac{\nu}{b}$, $\rho_0 = \frac{a}{b}$, безразмерные координаты $\rho = \frac{r}{b}$, $\xi = \frac{z}{b}$ и функции

$$R(z) = b R_*(\xi), \quad f(r) = b^2 f_*(\rho), \quad \psi(r) = b \psi_*(\rho)$$

где $R_*(\xi) = \rho_0 + u_0 e^{\lambda \xi}$.

После преобразования формул (1.6) — (1.7), опуская в дальнейшем знак *, для компонентов напряжений получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2A - 2B\xi - \int_{\xi_0}^{\xi} \left(Ff' - G \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\xi \\ \sigma_\theta &= \sigma_r - \left(Ff' - G \frac{f}{\rho} \right) \omega, \quad \sigma_z = \sigma_r - \left[(F+H)f' + H \frac{f}{\rho} \right] \omega \\ \tau_{rz} &= 2L\dot{\psi}\omega, \quad \tau_{r\theta} = \frac{D}{\rho^2}, \quad \tau_{z\theta} = B\rho + \frac{E}{\rho}\end{aligned}\quad (2.1)$$

причем

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0^2 \tau_{rz}^2 - N_0^2 \tau_{r\theta}^2}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f'f}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\dot{\psi}^2}}$$

Компоненты скоростей перемещений в новых обозначениях будут

$$u = v(\rho) \exp(\gamma \xi), \quad v = K\rho - 2\psi(\rho) \exp(\gamma \xi), \quad w = -\frac{1}{\rho} (\psi f)' \exp(\gamma \xi) + T \quad (2.2)$$

Здесь и в дальнейшем скорости перемещений отнесены к b .

Система дифференциальных уравнений (1.9) в новых переменных переписывается в виде

$$\begin{aligned}f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{1 + \gamma^2 \rho^2}{\rho^2} f + \frac{\gamma M_0 \tau_{rz}}{\sqrt{1 - M_0^2 \tau_{rz}^2 + N_0^2 \tau_{r\theta}^2}} \times \\ \times \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f'f}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\dot{\psi}^2} = 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\psi' - \frac{\psi}{\rho} - \frac{\gamma N_0 \tau_{r\theta}}{2\sqrt{1 - M_0^2 \tau_{rz}^2 - N_0^2 \tau_{r\theta}^2}} \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f'f}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\dot{\psi}^2} = 0$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также принимая за нормальную скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ радиальную скорость перемещения $u(\rho_0, \xi)$, для функции $f(\rho)$ будем иметь граничные условия

$$f(\rho_0) = u_0 V_0 = u_*, \quad f(1) = 0 \quad (2.4)$$

где V_0 — скорость внедрения.

На контактной поверхности между жесткой и деформируемой трубами принимаем условие $w = \beta V$, где $V = \omega_1 R$ — линейная скорость (в долях b) точки внешней поверхности жесткой трубы, β — параметр, $0 \leq \beta \leq 1$, зависящий от скорости вращения, шероховатости поверхностей, физико-механических свойств материалов и определяемый из эксперимента. Используя принятое условие и выражение w из (2.2), находим $K = \beta \omega_1$ и значение

$$\psi(\xi_0) = \frac{\pi}{2} \beta_0 m_0 \quad (2.5)$$

Принимаем, что степени шероховатости на внутренних и внешних поверхностях в продольных и кольцевых направлениях, соответственно, заданы и равны m_1 , $-q_1$ и m_2 , $-q_2$, причем $m_i, q_i > 0$ и подчиняются условию $m_i^2 + q_i^2 \leq 1$. Используя эти граничные условия, находим

$$B = \frac{m_2 - \rho_0 m_1}{1 - \rho_0^2}, \quad E = \frac{m_1 - \rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2} \rho_0, \quad D = -q_2 - \frac{q_1}{\rho_0} \quad (2.6)$$

При одинаковой шероховатости на контактных поверхностях, то есть при $\xi = \xi_0$ и $\xi = 1$, степени шероховатости одинаковы по всем направлениям и равны соответственно m_1 и m_2 . Можно положить

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{m_1 v}{\sqrt{v^2 + \omega^2}}, \quad \tau_{rz} = \frac{m_2 \omega}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} \quad \text{при } \xi = \xi_0, 1$$

Пологая $K=T=0$ и учитывая выражения для $\tau_{r\varphi}$ и τ_{rz} в (2.1), из формул (2.2) находим

$$B = \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \left\{ \frac{\rho_0 m_1 \left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0} \right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4} \left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0} \right]^2}} - \frac{m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4} f'^2(1)}} \right\}$$

$$E = -\frac{\rho_0}{2(1-\rho_0^2)} \left\{ \frac{m_1 \left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0} \right]}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4} \left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0} \right]^2}} - \frac{\rho_0 m_2 f'(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4} f'^2(1)}} \right\}$$

$$D = -\frac{m_1 \rho_0^2 \psi(\rho_0)}{\sqrt{\psi^2(\rho_0) + \frac{1}{4} \left[f'(\rho_0) + \frac{u_*}{\rho_0} \right]^2}} = -\frac{m_2 \psi(1)}{\sqrt{\psi^2(1) + \frac{1}{4} f'^2(1)}}$$

Последнее равенство и (2.4) являются граничными условиями для системы уравнений (2.3). При отсутствии вращения $\psi(\xi) = D = 0$ и формулы для B и E совпадают с соответствующими выражениями (2.6).

Торец деформируемой трубы $\xi = \xi_0 = l/b$ свободен от нормальных сил, следовательно,

$$\int_0^1 \sigma_z(\rho, \xi_0) \rho d\rho = 0 \quad (2.7)$$

Подставляя выражение σ_z из (2.1) и производя интегрирование по частям в полученном двухкратном интеграле, найдем

$$A = -B\xi_0 - \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \left| \left(2H + F + \frac{F}{\rho^2} \right) f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right|_{\rho_0} \rho d\rho$$

Используя выражения компонентов скоростей перемещений, легко проверить, что условие сохранения количества масс—

$$\int_0^{\xi_0} \dot{\xi}(\rho_0, \xi) d\xi = \int_0^1 |\dot{w}(\rho, \xi_0) - \dot{w}(\rho, 0)| \rho d\rho$$

выполняется тождественно.

Из условия равновесия элемента на контактной поверхности трубы $\rho = R(\xi)$ (фиг. 2) для абсолютного значения давления по оси имеем

$$p(\xi) = -\tau_{rz}(\rho_0, \xi) \cos \alpha + \tau_{rz}(\rho_0) \sin \alpha$$

причем

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Суммарная осевая сила, приходящаяся на эту поверхность, то есть сила впрессовывания будет

$$P = 2\pi b^2 \int_0^{\xi_0} R(\xi) \sqrt{1+R'^2(\xi)} p(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

Подставляя выражения для $R(\xi)$ и $p(\xi)$ и производя интегрирование, находим

$$P = b^2 = 2\gamma_0 m_1 \xi_0 + 2u_0(e^{\gamma_0 \xi_0} - 1)(m_1 + \gamma_0 S) + \sqrt{u_0^2 S(e^{2\gamma_0 \xi_0} - 1) + 4B_{\gamma_0} u_0 [1 + e^{-\gamma_0 \xi_0} (\gamma_0^2 - 1)] + B_{\gamma_0} u_0^2 [1 + e^{2\gamma_0 \xi_0} (2\gamma_0^2 - 1)]} \quad (2.9)$$

причем $S = Q - 2B\xi_0$, где

$$Q = -\frac{1}{1-\rho_0^2} \int_0^1 \left[\left(2H + F + \frac{F}{\rho^2} \right) f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega_0 d\rho + \\ + \left[(F + H) f'(\rho_0) + H \frac{u_0}{\rho_0} \right] \omega(\rho_0)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции, входящие в (2.9), и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$P = 2\pi b^2 \xi_0 (\rho_0 + \gamma_0 u_0) (m_1 + \gamma_0 S Q) \quad (2.10)$$

Вращающий момент определится по формуле

$$M^* = 2\pi b^2 q_1 \int_0^{\xi_0} (\rho_0 + \gamma_0 u_0 e^{\gamma_0 \xi})^2 \sqrt{1 + \gamma_0^2 u_0^2 e^{2\gamma_0 \xi}} d\xi \quad (2.11)$$

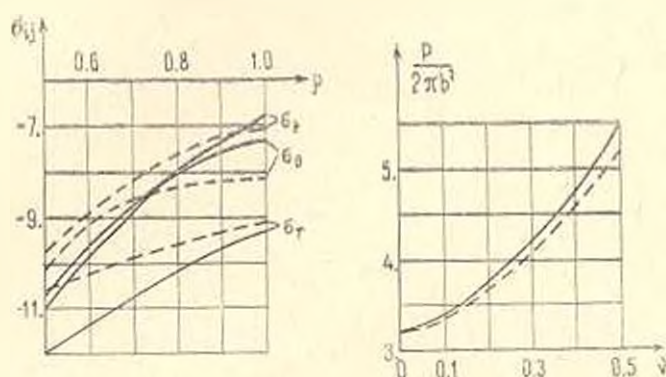
Получено численное решение системы дифференциальных уравнений (2.3) с красивыми условиями (2.4), (2.5), при следующих значениях параметров:

$\gamma = 0.2$; $\xi = 0$, $\xi_0 = 8$, $V_0 = 1$; $u_0 = 0.25$; $\rho_0 = 0.5$; $m_1 = 0.8$; $m_2 = 0.1$; $q_1 = 0.5$

$$q_2=0,125; \beta=0,5; \omega_1=1; F/M=5; G/M=2; H/M=0,5; I/M=1,5; \\ N/M=2,5$$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (2.1), (2.10) на фиг. 3 построены графики напряжений и силы впresseовывания. Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впresseовывания для изотропной трубы. Как видно из графиков, анизотропия существенно влияет на напряженное состояние и на величину силы впresseовывания.

1. При весьма малых значениях γ в системе уравнений (2.3), принимая $\gamma=0$, приходим к двум отдельным дифференциальным уравнениям



Фиг. 3

$$f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{f}{\rho^2} = 0, \quad \psi' - \frac{\psi}{\rho} = 0 \quad (2.12)$$

решения которых при краевых условиях (2.4) и (2.5) соответственно будут

$$f = \frac{\rho_0 m_2}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right), \quad \psi = \frac{\gamma}{2} \frac{\rho_0 m_2}{\rho_0} \rho \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в формулы напряжений (2.1), получим

$$\sigma_r = - \frac{2(\rho_0 m_2 - m_2)}{1 - \rho_0^2} (\xi_0 - \xi) - \frac{1}{1 - \rho_0^2} \int_{\xi}^{\xi_0} \left[F + G - 4H + \frac{2(F - G)}{\rho^2} + \right. \\ \left. + \frac{F + G}{\rho^3} \right] \omega_0 \rho d\rho + \int_{\xi}^{\xi_0} \left(F - G + \frac{F + G}{\rho^2} \right) \frac{\omega_0}{\rho} d\rho, \quad \tau_{rz} = \tau_r + \left(F - G + \frac{F + G}{\rho^2} \right) \omega_0 \\ \sigma_z = \sigma_r + \left(F + 2H + \frac{F}{\rho^2} \right) \omega_0, \quad \tau_{z\theta} = \frac{m_1 - \gamma m_2}{1 - \rho_0^2} \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho_0 m_1 - m_2}{1 - \rho_0^2} \rho \quad (2.14)$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1 - M_0^2 - N_0^2}}{\sqrt{F + G + 4H + (F - G) \frac{2}{\rho^2} + \frac{F + G}{\rho^4} + L\alpha^2 \rho^2}}, \quad \tau_{\theta 1} = -q_1 \frac{\rho^2}{\rho^4}, \quad \tau_{\theta 2} = L\alpha \rho \omega_0$$

$$\alpha = \nu \beta \omega_1 \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)$$

Скорости перемещений согласно (2.2) будут

$$u = \frac{\nu_0 H_0}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) e^{\nu}, \quad v = \beta \omega_1 \rho \left(1 + \nu \frac{H_0}{\rho_0} e^{\nu} \right)$$

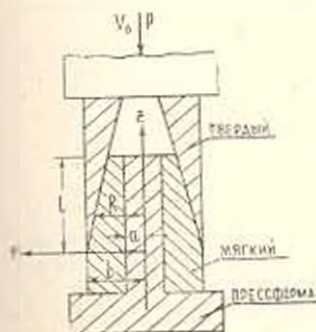
$$w = \frac{2H_0 \rho_0}{1 - \rho_0^2} e^{\nu} + T \quad (2.15)$$

Сила впresseвывания и момент вращения определяются по (2.9) и (2.11), причем значение Q определится по формуле

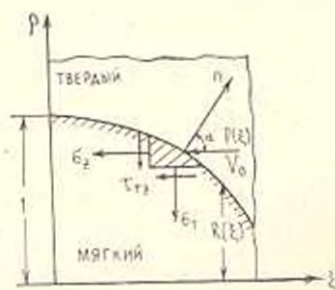
$$Q = - \frac{F + (F + 2H) \rho \delta}{\rho_0} \omega_0(\rho_0) + \frac{1}{1 - \rho_0^2} \int \left[F + G + 4H + \frac{2(F - G)}{\rho^2} + \frac{F + G}{\rho^4} \right] \omega_0 \rho d\rho$$

§ 3. Внешнее винчивание. Пусть теперь цилиндрическая труба с внутренним и внешним радиусами a и b , соответственно, из идеально-жестко-пластического ортотропного материала плотно насажена на недеформируемую трубу (прессформа), на которую с наружной стороны соосно впresseвывается, одновременно вращаясь вокруг своей оси в положительном направлении с угловой скоростью ω_1 , труба из значительно более твердого материала с внутренним, монотонно возрастающим по оси трубы относительным радиусом $R = 1 - \nu \omega_0 \exp(\nu \xi)$. Материал этой трубы считаем абсолютно жестким, а координатную систему закрепляем с ней как в случае внутреннего внедрения (фиг. 4). Принимаем, что деформируемая труба по всей толщине при $z > 0$ переходит в чисто пластическое состояние.

Заменяя в выражениях (2.1) — (2.2) знаки функции $f(\rho)$ и $\psi(\rho)$, для компонентов напряжений получим



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2A - 2B\xi + \int_{\rho_0}^{\rho} \left(Ff' - G \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho \\ \sigma_t &= \sigma_r + \left(Ff' - G \frac{f}{\rho} \right) \omega, \quad \sigma_z = \sigma_r + \left[(F+H)f' + H \frac{f}{\rho} \right] \omega \\ \tau_{rz} &= -2L\xi\omega, \quad \tau_{r\theta} = \frac{D}{\rho^2}, \quad \tau_{z\theta} = B\rho + \frac{E}{\rho}\end{aligned}\quad (3.1)$$

причем

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - M_0^2 \xi^2 - N_0^2 \xi^4}}{\sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f f'}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\xi^2}}$$

Соответственно, для компонентов скоростей перемещений (в долях b) будем иметь

$$u = -f(\xi)e^{\xi}, \quad v = K\xi - 2\xi(\rho)e^{\xi}, \quad w = \frac{1}{\rho}(\rho f)'e^{\xi} + T \quad (3.2)$$

Система дифференциальных уравнений (2.3) примет вид

$$\begin{aligned}f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{1 + \xi^2 \rho^2}{\rho^2} f - \frac{\tau_{rz} M_0}{\sqrt{1 - M_0^2 \xi^2 - N_0^2 \xi^4}} \times \\ \times \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f f'}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\xi^2} = 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\xi' - \frac{\xi}{\rho} + \frac{\tau_{r\theta} N_0}{2\sqrt{1 - M_0^2 \xi^2 - N_0^2 \xi^4}} \sqrt{(F+H)f'^2 + 2H \frac{f f'}{\rho} + (G+H) \frac{f^2}{\rho^2} + 4L\xi^2} = 0$$

Исходя из допущения о недеформируемости вдавливаемой трубы и прессформы, а также из того, что нормальная скорость перемещения на поверхности $\rho = R(\xi)$ заменяется радиальной $u(\xi, \xi)$, для функции $f(\rho)$ имеем граничные условия

$$f(\rho_0) = 0, \quad f(1) = u_0 V_0 = u_n \quad (3.4)$$

Далее на контактной поверхности $\rho = 1$ принимаем условие $v = \beta V$, где $V = \omega_1 R$ — линейная скорость точки внутренней поверхности жесткой трубы, находим $K = \beta \omega_1$ и значение

$$\xi(1) = \frac{\tau}{2} \beta \omega_1 u_n \quad (3.5)$$

Граничные значения τ_{rz} и $\tau_{r\theta}$ на внутреннем и на внешнем поверхностях в продольном и в кольцевом направлениях считаем известными $-m_1, q_1$ и $-m_2, q_2$, соответственно, где $m_i, q_i > 0$ и очевидно $m_i^2 + q_i^2 \leq 1$.

Используя эти граничные условия, находим

$$B = \frac{\rho_0 m_2 - m_2}{1 - \rho_0^2}, \quad E = \frac{\rho_0 m_1 - m_1}{1 - \rho_0^2} \rho_0, \quad D = q_1 = q_1 \rho_0^2 \quad (3.6)$$

Из статического условия (2.7) определяем

$$A = -B\xi_0 + \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \int_{\xi_0}^1 \left[\left(2H + F + \frac{F}{\rho^2} \right) f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega \rho d\rho$$

Легко убедиться, что условие сохранения количества масс удовлетворяется тождественно.

Из условия равновесия элемента вблизи контактной поверхности $\rho = R(\xi)$ (фиг. 5) для абсолютного значения осевого давления получим

$$p(\xi) = -\sigma_z(1, \xi) \cos \alpha - \tau_{rz}(1) \sin \alpha \quad (3.7)$$

причем

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+R'^2}}, \quad \cos \alpha = -\frac{R'}{\sqrt{1+R'^2}}$$

Сила впрессовывания определяется по формуле (2.8), где следует положить $R=1-u_0 e^{\gamma \xi}$, а значение $p(\xi)$ — согласно (3.7). Находим

$$P/\pi b^2 = 2\xi_0 m_2 + 2u_0(e^{\gamma \xi_0} - 1)(\gamma S - m_2) - \gamma^2 u_0^2 S(e^{\gamma \xi_0} - 1) - \\ + 4B u_0 [1 + e^{\gamma \xi_0}(\gamma \xi_0 - 1)] - B u_0^2 [1 + e^{2\gamma \xi_0}(2\xi_0 - 1)] \quad (3.8)$$

где $S = Q - 2B\xi_0$, причем

$$Q = \frac{1}{2(1-\rho_0^2)} \int_{\xi_0}^1 \left[\left(2H + F + \frac{F}{\rho^2} \right) f' + \left(2H + G - \frac{G}{\rho^2} \right) \frac{f}{\rho} \right] \omega \rho d\rho - \\ - \int_{\rho_0}^1 \left(F f' - G \frac{f}{\rho} \right) \frac{\omega}{\rho} d\rho - [(F + H)f'(1) + H u_0] \omega(1)$$

Разлагая в степенной ряд экспоненциальные функции и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

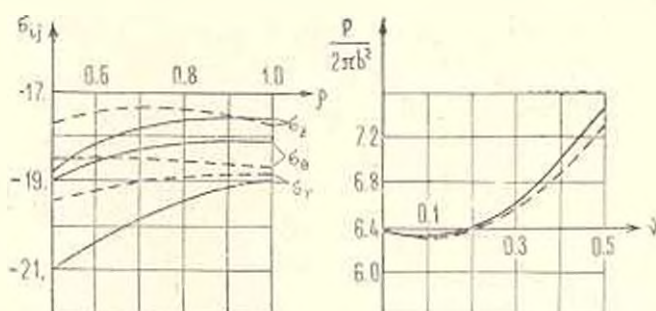
$$P/\pi b^2 = 2\xi_0(1 - \gamma u_0)(m_2 + \gamma^2 u_0 Q) \quad (3.9)$$

Вращающий момент будет

$$M^* = 2\pi b^2 q_2 \int_0^{\xi_0} (1 - \gamma u_0 e^{\gamma \xi})^2 \sqrt{1 + \gamma^2 u_0^2 e^{2\gamma \xi}} d\xi$$

1. При весьма малых значениях γ система (3.3) сводится к дифференциальным уравнениям (2.12), решения которых при граничных условиях (3.4) и (3.5) будут

$$f = \frac{\rho_0 u_0}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad \varphi = \frac{\gamma}{2} \rho \omega_1 u_0 \rho$$



Фиг. 6

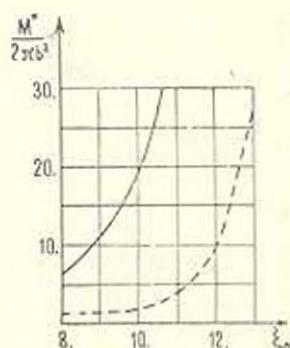
Формулы напряжений (3.1) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\frac{2(m_2 - \rho_0 m_1)}{1 - \rho_0^2} (z_0 - z) - \frac{1}{2(1 - \rho_0^2)} \int_{z_0}^z \left[F + G + 4H + (F - G) \frac{1 + \rho_0^2}{\rho^2} + \right. \\ & \left. + (F + G) \frac{\rho_0^2}{\rho^4} \right] \omega_0 \rho d\rho + \int_{z_0}^z \left[F - G + (F + G) \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right] \frac{\omega_0}{\rho} d\rho \\ z_0 = & z_r + \left[F - G + (F + G) \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right] \omega_0, \quad z_s = z_r + \left[F + 2H + F \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right] \omega_0 \\ z_{rs} = & \frac{\rho_0 m_2 - m_1}{1 - \rho_0^2} \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{m_2 - \rho_0 m_1}{1 - \rho_0^2} \rho, \quad z_0 = q_1 \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \\ z_{0s} = & L z \omega_0, \quad z = \nu \omega_1 (1 - \rho_0^2) \end{aligned}$$

где

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1 - M_0^2 z_{rs}^2 - N_0^2 z_0^2}}{\sqrt{F + G + 4H - 2(F - G) \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + (F + G) \frac{\rho_0^4}{\rho^4} + L z^2 \rho^2}}$$

Скорости перемещений, соответственно, будут



Фиг. 7

$$u_0 = -\frac{\nu u_* \rho_0}{1 - \rho_0^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \exp(\nu \xi)$$

$$v = \nu \omega_1 \rho (1 + \nu u_0 \exp(\nu \xi)), \quad w = \frac{2u_*}{1 - \rho_0^2} \exp(\nu \xi) + T$$

Сила впрессовывания определится по формуле (3.9), причем

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{2(1 - \rho_0^2)} \int_{z_0}^z \left[F + G + 4H + (F - G) \frac{1 + \rho_0^2}{\rho^2} + \right. \\ & \left. + (F + G) \frac{\rho_0^2}{\rho^4} \right] \omega_0 \rho d\rho - \int_{z_0}^z \left[F - G + (F + G) \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right] \frac{\omega_0}{\rho} d\rho - \end{aligned}$$

$$= \frac{[2H + F(1 + \sigma_0)] \sqrt{1 - M_0 m_2^2 - N_0 q_2^2}}{\sqrt{F + G + 4H + 2(F - G)\rho_0^2 + (F + G)\rho_0^4 + Lx^2}}$$

Численное решение системы дифференциальных уравнений (3.3) с краевыми условиями (3.4), (3.5) получено при следующих значениях параметров

$\alpha = 0,2$; $\beta = 0$; $\xi_0 = 8$; $V_0 = 1$; $u_0 = 0,25$; $v_0 = 0,5$; $m_1 = 0,1$; $m_2 = 0,8$; $q_1 = 0,5$; $q_2 = 0,125$; $\rho = 0,5$; $\omega_1 = 1$; $F/M = 5$; $G/M = 2$; $H/M = 0,5$; $L/M = 1,5$; $N/M = 2,5$

На основании численных расчетов, выполненных на ЭВМ ЕС-1022, по формулам (3.1) и (3.9) построены графики напряжений и силы впрессовывания (фиг. 6). Для сравнения пунктирной линией показан график напряжений и силы впрессовывания для изотропной трубы. На графиках видно влияние анизотропии на напряженное состояние и силу впрессовывания. На фиг. 7 показан график изменения крутящего момента M^* в зависимости от глубины внедрения ξ_0 в случае внутреннего (сплошная линия) и внешнего внедрения (пунктирная линия).

ԿՈՇՏ ՊԱՆՍՅՈՒ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐՊՏՈՒՏԱԿՈՒՄԸ

Ա. Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է սեփական առանցքի շուրջը պտտվող կոշտ գլանային մարմնի ներդրումը անիզոտրոպ իդեալական-կոշտ-պլաստիկ խողովակի մեջ, որի նյութը ենթարկվում է Միզեսի-Հիլլի հոսունության պայմանին: Լուծման մեջ դեֆորմացիաների արագությունների տեղերը ֆունկցիա է շառավղային և երկայնական կոորդինատներից: Ստացված են գլանային անիզոտրոպ խողովակի մեջ առաջացած լարումները, ներդրման ուժը և պտտող մոմենտը որոշող արտահայտություններ: Դիտարկվում է աբստրին և ներքին ներդրումը: Բերված են թվային օրինակներ:

THE SCREW DISPLACEMENT OF A RIGID CYLINDRICAL BODY IN A PLASTIC ANISOTROPIC PIPE

A. G. HAKOBIAN

S. V. P H O P H O U

The penetration of a rigid cylindrical body with simultaneous rotation around its axis in an anisotropic ideal rigid plastic pipe is considered, the material of which obeys the Mises-Hill flow criterion. In the

solution the tensor of speed strain is a function of radial and longitudinal coordinates. We have obtained relations which determine the stress appearing in a cylindrical anisotropic pipe as well as the penetration force and the rotating moment. Internal and external penetration are considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
2. Шоршоров М. Х., Колесниченко В. А., Алексин В. П. Клинопрессовая сварка давлением разнородных материалов. М.: Металлургия, 1982. 112 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
1.IV.1985