

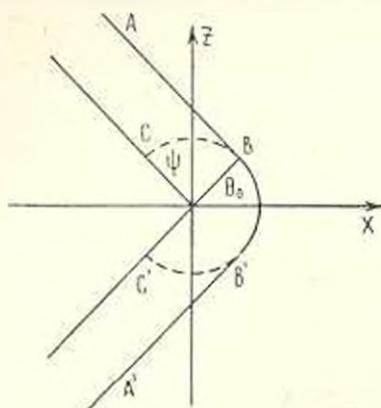
УДК 534.221.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ
 ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ, ОГРАНИЧЕННЫХ СПЕРЕДИ
 ДВУХГРАННЫМИ УГЛАМИ

МАРТИРОСЯН А. Н., САФАРЯН Ю. С.

Задачи соударения плоских тел, ограниченных прямыми двухгранными углами, и полуплоск решены методом [1] в [2,3]. Для цилиндрических стержней подобная задача рассмотрена в [4]. Плоские и осесимметричные задачи соударения тел, часть поверхностей которых свободна, а другая находится на жесткой заделке, а также ограниченных жидкостью, исследованы в [5,6]. Уравнение коротких волн в газовой динамике получены в [9], а для произвольной среды—в [10].

В настоящей статье рассматривается соударение тел конечной высоты $2h$, ограниченных спереди двухгранными углами раствора $\pm 2\psi$ (фиг. 1) и плоскими поверхностями $y = \pm h$, которые движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями $\pm v_0$. Определено решение линейной задачи в виде пластинчатых продольных волн. Затем выведены уравнения коротких волн для продольных волн в пластинках. Найдено их решение, которое сравнивается с линейным.



Фиг. 1

Рассчитано распределение скоростей на ударной волне. При $t \geq 0$, где t —время после соударения, образуется плоский слой и следует решить задачу с условиями, заданными на его верхней и нижней плоскостях и заданными начальными условиями.

Рассмотрим задачу со свободными поверхностями. Выберем начало координат o в вершине соударяющихся углов на их оси симметрии, ось ox направим по направлению скоростей движения, которые совпадают с осью симметрии, ось oy —перпендикулярно поверхностям тел, ось oz находится в плоскости симметрии тела и перпендикулярна оси ox . Обозначим через u_j ($j=1, 2, 3$) компоненты вектора перемещения по осям x, y, z . Пусть u_j^0 обозначают решения задачи о соударении бесконечных по высоте тел, в которой $u_j^0 = 0$, $u_{1,3}^0 = u_{1,3}(x, z)$.

Как для u_1 , так и для u_3^0 имеют место при $t=0$ начальные условия $u_3^0=0$, $u_1^0=0$, $\frac{\partial u_3^0}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial t} = -v_0 \sigma(x - |z|k) + v_0 \sigma(k|z| - x) \quad (1)$$

где $\sigma(x)$ — единичная функция, $k = -\operatorname{tg} \psi$.

Решение динамических уравнений упругой среды в плоской задаче для $u_{1,3}^0$ при условиях (1) можно искать методом интегральных преобразований Лапласа по z и Фурье по (x, z) [7], причем для изображения по Лапласу от u_j^0 запишем

$$\bar{u}_j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_j^0 \exp[-s(\bar{x}x + \bar{\gamma}z)] d\bar{x}d\bar{\gamma} \quad (2)$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Для трансформант после решения уравнений получим

$$\bar{u}_1^0 = \frac{v_0 k (b^2 \bar{x}^2 + a^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2)}{\pi^2 b^2 (\bar{\gamma}^2 - a^2 k^2) \mu}, \quad \bar{u}_3^0 = -\frac{v_0 k (a^2 - b^2) \bar{x} \bar{\gamma}}{\pi^2 b^2 (\bar{\gamma}^2 - a^2 k^2) \mu} \quad (3)$$

$$\mu = (a^2 \bar{x}^2 + b^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2) (b^2 \bar{x}^2 + a^2 \bar{\gamma}^2 - \omega^2) - (a^2 - b^2)^2 \bar{x}^2 \bar{\gamma}^2$$

где a, b — скорости продольных и поперечных волн, $\mu = 0$ дает дисперсионные соотношения для этих волн

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{x}^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{x}^2}, \quad \alpha = \frac{\bar{x}}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{\omega} \quad (4)$$

Для преобразования от $\Delta^0 = \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z}$ получится

$$\Delta^0 = \frac{i v_0 k \bar{x}}{\pi^2 b^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - a^2 k^2) (\bar{\gamma}_1^2 - \bar{\gamma}_2^2)} \quad (5)$$

Следует отметить, что полюсы знаменателя $\bar{\gamma} = \pm k$ соответствуют плоским продольным волнам AB и $A'B'$ (фиг. 1) и соответствующим поперечным волнам, причем слагаемые в решении, дающие эти волны, можно получить выделением особенности в решении, поэтому при вычислении интегралов в Δ^0 учитываются только полюсы $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1$ для продольных волн. Тогда можно получить при $z > 0$

$$\Delta^0 = \frac{v_0 k}{\pi \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x} \exp(i\omega(\bar{x}x + \bar{\gamma}z))}{(\bar{\gamma}_1^2 - a^2 k^2) \bar{\gamma}_1} \quad (6)$$

Полное решение плоской задачи для u_1^0, u_3^0 дано в [11]. Обозначим

$$u_i = u_i^0 + U_i \quad (7)$$

причем начальные условия для U_j нулевые, а граничные условия на поверхностях $y = \pm h$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\tau_{zz} = 0$ запишутся в виде

$$a^2 \frac{\partial U_2}{\partial y} + K \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) = -K \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$y = \pm h, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x, z < \infty$$

где $K = a^2 - 2b^2$.

Решение уравнений теории упругости можно искать в виде

$$U_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \iint \bar{U}_{1,2}^{(n)} \exp(i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z)) \cos \bar{\beta}_n y \, d\bar{x} \, d\bar{\gamma} \quad (9)$$

$$\bar{U}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \iint \bar{U}_3^{(n)} \exp(i(\bar{\alpha}x + \bar{\gamma}z)) \sin \bar{\beta}_n y \, d\bar{x} \, d\bar{\gamma}$$

где $\bar{\beta}_1 = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2}$, $\bar{\beta}_2 = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2}$, причем можно получить

$$\bar{U}_1^{(n)} = -\frac{\bar{\beta}_1}{i\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(n)}, \quad \bar{U}_2^{(n)} = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}} \bar{U}_1^{(n)}, \quad \bar{U}_3^{(n)} = -\frac{1}{\bar{\gamma}} [\bar{\alpha} \bar{U}_1^{(n)} - i\bar{\beta}_2 \bar{U}_2^{(n)}] \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), можно получить

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^{(n)} &= -\frac{\bar{\alpha} K (u_1^0 \bar{\alpha} + u_3^0 \bar{\gamma}) |\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)|}{R_1(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \cos \bar{\beta}_1 h} \\ \bar{U}_2^{(n)} &= \frac{b^2 K (u_1^0 \bar{\alpha} + u_3^0 \bar{\gamma}) 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \sin \bar{\beta}_1 h}{\sin \bar{\beta}_2 h \cos \bar{\beta}_1 h R_1(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})} \\ \bar{U}_3^{(n)} &= -\frac{i 2b^2 K \bar{\beta}_1 \sin \bar{\beta}_1 h (\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2) v_0 k \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 \omega^2 a^2 \sin \bar{\beta}_2 h \cos \bar{\beta}_1 h R(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 k^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\beta}_1^2))} \end{aligned} \quad (11)$$

где $R_1(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = |\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)| + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 b^4 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2) \operatorname{tg} \bar{\beta}_1 h \operatorname{ctg} \bar{\beta}_2 h$

Для упрощения полученного решения можно рассматривать область на некотором удалении от места соударения и полагать $\frac{h}{x} \gg 1$, что соответствует длинноволновому приближению $\bar{\alpha} h \ll 1$, $\bar{\beta}_1 h \ll 1$. Тогда можно получить, полагая, что

$$\Delta = \Delta^0 + \Delta'$$

$$\Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \Delta' = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

$$\bar{U}_1^{(n)} = \frac{v_0 K k \bar{\alpha}^2 |\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)|}{\omega^4 \bar{\alpha}^2 a^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 k^2) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\beta}_1^2) [1 - c_0^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)]} \quad (12)$$

$$\bar{U}_3^{(n)} = \frac{i v_0 K k \bar{\alpha} |\omega^2 - 2b^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)|}{\pi^2 \omega^4 a^4 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\alpha}^2 k^2) (\bar{\gamma}^2 - \bar{\beta}_1^2) [1 - c_0^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2)]}, \quad c_0^2 = \frac{4b^2}{a^2} (a^2 - b^2)$$

где c_0 есть скорость продольных волн в пластинках [5].

Вычисляя в $\bar{\Delta}$ интегралы по $\bar{\gamma}$ в полюсах, соответствующих продольным $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1$ волнам и волнам в пластинах $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_3$, $\bar{\gamma}_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2}$, получим при $z > 0$

$$\bar{\Delta}^2 = -\bar{\Delta}^0 + \frac{v_0 K k}{\pi \omega a^2 c_0^2} \int \frac{\alpha \left(1 - \frac{2b^2}{c_0^2}\right) \exp(i\omega(\alpha x + \gamma_3 z))}{(\gamma_3^2 - \alpha^2 k^2)(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) \gamma_3} d\alpha \quad (13)$$

где $\gamma_3 = \sqrt{\frac{1}{c_0^2} - \alpha^2}$.

Для получения значения Δ можно к полученному интегралу применить метод [5] вычисления интегралов, основанный на замене контура интегрирования контуром, на котором $\alpha x + \gamma_3 z$ вещественно.

Учитывая, что $\partial \bar{\Delta} / \partial t$ содержит под знаком интеграла ω только в показательной функции, можно видеть, что обратное преобразование от нее будет иметь вид $\delta(t - \alpha x - \gamma_3 z)$ и вычисление интеграла даст

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2 \operatorname{Re} \frac{i v_0 2b^2 k}{\pi c_0^2 a^2} \frac{\alpha_2}{|\gamma_3^2(\alpha_2) - \alpha_2^2 k^2| | -x - \gamma_3(\alpha_2) z | \gamma_3(\alpha_2)} \quad (14)$$

где α_2 находится из уравнения

$$\gamma_3 = \gamma_3(\alpha_2), \quad t - \alpha_2 x - \gamma_3 z = 0, \quad \alpha_2 = \frac{t x + i z \sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}}{x^2 - t^2} \quad (15)$$

Тогда можно получить

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2 \operatorname{Re} \frac{v_0 k 2b^2}{\pi c_0^2 a^2} \frac{\alpha_2}{\frac{1}{c_0^2} - \alpha_2^2 (1 + k^2)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2 + z^2}{c_0^2}}} \quad (16)$$

Как видно из решения, оно будет верно не только для $z > 0$, но и для произвольного z .

Можно из (16) получить асимптотику решения вблизи точечной волны $z = \sqrt{x^2 + z^2} = c_0 t$. Согласно (15) $\alpha_2 \approx \frac{x}{c_0^2 t}$ и обозначая $x = r \cos \psi$, из (15), (16) получится

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} \approx -\frac{2v_0 k 2b^2}{\pi a^2 c_0} \frac{\cos^2 \psi \cos \theta}{\cos^2 \psi - \cos^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}} \quad (17)$$

Вдали от $B_1 B'$ (фиг. 1) $\theta - \psi = O(1)$ и можно записать

$$\Delta \approx \frac{2v_0 \sin 2\psi b^2}{\pi a^2 \sqrt{c_0}} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \psi - \cos^2 \theta} \frac{\sqrt{2\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}}{\sqrt{r}} \quad (18)$$

При $r = c_0 t$ $\Delta = 0$, но при $\theta = \psi$ знаменатель обращается в нуль. Рассмотрим решение около B . Поскольку

$$\varphi_2 = \frac{t \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}}{r}$$

для малых $t - \frac{r}{c_0}$ и $\theta - \psi$ можно записать

$$\frac{1}{\frac{1}{c_0^2} - \alpha_2^2} \frac{1}{\cos^2 \psi} \approx \frac{c_0^2 \operatorname{ctg} \psi (\theta - \psi) + i \sqrt{\frac{2c_0}{r}} \sqrt{t - \frac{r}{c_0}}}{2 \left| (\theta - \psi)^2 + \frac{2c_0}{r} \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \right|}$$

В рассматриваемой окрестности $\theta - \psi \sim \sqrt{t - \frac{r}{c_0}}$, тогда получится

$$\Delta \approx - \frac{2v_0 b^2 \cos \psi}{\pi a^2 c_0} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \left(t - \frac{r}{c_0} \right)}}{\sqrt{\bar{\ell}} (\psi - \theta)} \quad (19)$$

при $\theta < \psi$, что соответствует окрестности BB' . Принимая в (19), что $\operatorname{arctg}(-0) = \pi$, получим при $\theta > \psi$ в области около касания плоской и точечной волны решение $\Delta = - \frac{2v_0 b^2 \cos \psi}{\pi a^2 c_0}$, что дает также решение на плоской волне AB , и при $k=0$ дает [3]. Как и в [5], можно в решении учесть следующие по порядку слагаемые и получить сглаженный профиль за счет дисперсии.

Таким образом, получено решение линейной задачи вблизи точечной волны в виде формулы (18) и около B — точки касания плоской и точечной волны в виде (19). Для устранения особенности вблизи волны следует учесть нелинейность. Выведем нелинейные уравнения в окрестности волны для продольных упругих волн в пластинках, которые соответствуют полученной асимптотике. Учитывая только геометрическую нелинейность, можно записать лагранжиан для продольных перемещений в пластинке в виде [12]

$$\alpha = U - T, \quad U = \frac{9}{2} K' c_0^2 + \frac{3}{4} \bar{\mu} \psi_0^2, \quad T = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (20)$$

где $u_x = u$, $u_z = v$, ρ — плотность, $K' = \frac{2\bar{\mu}(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ — модуль объемного

сжатия, $\bar{\mu}$ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_z + \varepsilon_y) = \frac{(1-2\nu)(\varepsilon_x + \varepsilon_z)}{3(1-\nu)}$$

$$\psi_0^2 = \frac{8}{9} \left\{ \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{4\nu-1-\nu^2}{(1-\nu)^2} \varepsilon_x \varepsilon_z + \frac{3}{4} \varepsilon_{xz}^2 \right\}$$

ψ_0 — интенсивность тензора деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Подставляя вышеуказанные соотношения в (20), оставляя малые до третьего порядка относительно производных u и v , можно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{1-\nu} \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 \right] + \\ &+ \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\mu} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Варьируя \mathcal{L} по u , v , получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}}{1-\nu} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\mu} \frac{\partial v}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\bar{\mu}}{1-\nu} \left[3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\mu} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}}{1-\nu} 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\ + \frac{\bar{\mu}}{1-\nu} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{2\nu}{1-\nu} \bar{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\bar{\mu}}{2} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Дифференцируя (22) по x , а (23) по z , складывая их, учитывая, что согласно (18) и (19) производные по r значительно превосходят производные по θ , а также радиальные перемещения U' превосходят по порядку касательные к волне перемещения U_θ , что позволяет в малых нелинейных членах полагать

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}, \quad u = U' \cos \theta, \quad v = U' \sin \theta$$

после преобразований можно получить уравнение

$$c_0^2 = \frac{2\mu}{1-\nu}$$

$$c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + 3c_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U'}{\partial r} \frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} \right) = 0$$

где $\Delta = \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{U'}{r} + \frac{\partial U_0}{r \partial \theta}$, и поскольку $\frac{\partial U'}{\partial r} \gg \frac{U'}{r}$, $\Delta \approx \frac{\partial U'}{\partial r}$, можно сделать упрощение в последнем члене уравнения, которое примет вид

$$c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + 3c_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) = 0 \quad (24)$$

Согласно теории [9] коротких волн в окрестности точечной волны можно ввести переменные $\xi = r - c_0 t$, θ , t , причем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = \frac{\partial \Delta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial t} \Big|_r = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \Big|_\xi - c_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \approx -2c_0 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi \partial t} + c_0^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi^2}$$

Тогда получится уравнение

$$c_0^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \theta^2} \right) + 2c_0 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \xi \partial t} + 3c_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (25)$$

В силу линейного решения можно считать $\Delta = \Delta \left(\frac{\xi}{t}, \theta \right)$ и, кроме того

$$r \approx c_0 t, \quad \Delta \approx \frac{\partial U'}{\partial r} = -\frac{1}{c_0} v_r, \quad v_r = \frac{\partial U'}{\partial t} \quad (26)$$

тогда

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} - \frac{1}{c_0 t} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial \xi \partial t} + 3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial \xi} \right) = 0$$

Введем $v_0 = \frac{\partial U_0}{\partial t}$, тогда можно показать, что

$$\frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \approx \frac{\partial v_0}{\partial r} \quad (27)$$

Вводя переменные $\frac{2\xi}{3\gamma c_0 t} = \psi$, $\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma Y$, $\frac{v_r}{c_0 t} = -\mu$, $\frac{v_0}{c_0 t \sqrt{\frac{3}{2}}} = \nu$,

где γ — постоянная, $\theta_0 = \psi$, можно получить известные из газовой динамики уравнения [5]

$$\frac{\partial \mu}{\partial Y} = \frac{\partial \nu}{\partial \psi}, \quad (\mu - \nu) \frac{\partial \mu}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} = 0 \quad (28)$$

В отличие от волн в жидкости [9], [10] и в металлах [8], как видно из уравнения (24), нелинейность имеет обратный знак, что приводит к непрерывным волнам сжатия и ударным волнам разгрузки. В настоящей задаче имеет место сжатие около ВС (фиг. 1).

Выбирая $\gamma = \frac{2v_0 b^2 \cos \psi}{c_0 a^2}$, можно (19) записать в следующем виде:

$$\mu = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{Y-2B}}{-Y} \quad (29)$$

Формула (29) дает линейное решение вблизи B . Решение уравнений (28), переходящее вдали от волны [13] в (29), определено в [14] и имеет вид

$$\delta = -\frac{1}{2} (Y+c)^2 \operatorname{tg}^2 \mu = -\mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu\pi + B \sin^2 \mu\pi, \quad c = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \mu\pi - \mu \right) (Y+c) \quad (30)$$

где c — постоянная величина, имеющая порядок 1.

Как показано в [13], для непрерывного перехода в одномерное по радиусу решения около точечной волны, следует выбирать $B=0$. Линии постоянных μ даны в [13], [14].

Определим нелинейное решение вблизи точечной волны вдали от B при $b < b_c$. Уравнения (28) можно применять всюду в волновой области, причем для малых $\theta - \psi$ производные по Y можно отбросить и $\mu - \delta + \frac{1}{2} a \frac{d\delta}{dY} = 0$. Решение полученного одномерного уравнения имеет вид

$$\delta = 2\mu + \frac{\mu^2}{c_1} \quad (31)$$

где c_1 — постоянная. Для определения c_1 следует использовать тот факт, что вдали от волны $-\delta \gg 1$ и правый член первой части можно отбросить. Тогда линейное решение примет вид $\delta = \frac{\mu^2}{c_1}$, или переходя

к δ, μ , получим $\mu = \sqrt{\frac{2c_1 c_0 \gamma^2}{3a}}$. С другой стороны, из (18) можно получить, после сравнения с данным значением μ , что

$$c_1 = \frac{3v_0 \sin^2 2\psi b^2}{\pi^2 a^2 c_0 \cos^2 \psi} \frac{2 \cos^2 \psi}{(\cos^2 \psi - \cos^2 \theta)^2} \quad (32)$$

Тогда нелинейное одномерное решение вблизи точечной волны $\mu = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2 \delta}$, где c_1 указано выше. Знак перед корнем выбран из условия $\mu=0$ при $\delta=0$, поскольку и в нелинейной задаче на волне имеется непрерывность μ . Следует отметить, что при малых $\gamma, \mu \sim \gamma, \mu \sim \gamma^2$, решение вблизи точечной волны имеет второй порядок малости. При подходе к B имеем $\theta \approx \psi$

$$c_1 \approx -\frac{3v_0 \cos \psi 2b^2}{\pi^2 a^2 c_0 (\theta - \psi)^2}$$

Тогда получится нелинейное решение в виде $\delta \approx 2\mu - \frac{1}{2} Y^2 c_2 \mu^2$. То же значение получится из формулы (30) при $Y \gg 1, \mu \sim \gamma$. Решения (31),

(32) описывают окрестность точечной волны нелинейной задачи, в то время как (30) дает значения δ , ν в окрестности касания волн AB и BB' . Вне точечной волны $B'BC$ позади плоского фронта AB имеют место волны сжатия непрерывного вида. Она состоит из параллельных прямых $x \cos \delta - y \sin \delta = c_0 t$, где c_0 — нормальная скорость нелинейной волны. На основании уравнения (24) можно показать, что скорость характеристик $c_p \approx c_0 - \frac{3}{2} u_r$. Подставляя в уравнение прямых, на которых $u_r = \text{const}$, и используя переменные δ , Y , μ , ν , получим вблизи B

$$\mu' = \delta - \frac{1}{2} Y^2$$

где через μ' , ν' обозначены μ , ν впереди волны BC . Интегрируя первое уравнение (28) и удовлетворив условию на AB $\nu' = 0$, $\mu' = 0$, получим $\nu' = -\delta Y + \frac{1}{2} Y^2$. Полученное решение удовлетворяет уравнениям (28), и в силу него $\mu' = 0$ на первой волне, $\mu' = -1$ на последней волне, позади которой идет постоянное течение. Поскольку позади BC значение μ меньше значения впереди, имеет место ударная волна разрежения BC . Условия на ударной волне имеют вид [10]

$$-\nu' = (\mu - \mu') Y \sqrt{2\delta - \mu - \mu'}, \quad \frac{d\delta}{dY} = -\sqrt{2\delta - \mu - \mu'}$$

подставляя сюда μ' , ν' , а также δ и ν из (30), получим вдоль ударной волны уравнение

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{(Y+c) \operatorname{tg}^2 \mu \pi - \sqrt{-\frac{1}{2}(Y+c)^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \frac{1}{2} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi + \frac{1}{2} Y^2}}{-(Y+c)^2 \operatorname{tg} \mu \pi \frac{\pi}{\cos^2 \mu \pi} + 1 + \cos 2\mu \pi + \pi B \sin 2\mu \pi}$$

при начальных условиях $Y=0$, $\mu=0$.

Величина c выбирается из требования, чтобы $\mu = -\frac{1}{2}$ при $Y = -c$. Помимо нелинейности, вообще говоря, нужно учитывать и дисперсию, что приведет к добавлению в (24) члена с производными четвертого порядка, однако принятая в данной работе схема без дисперсии, как и в теории мелкой воды, достаточно хорошо отражает явление соударения в окрестностях волн. Разумеется, данный вывод верен для достаточно сильных волн.

Учтем геометрическую и физическую нелинейность [15] согласно [8]

$$U = \frac{\bar{v}}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\bar{v}}{3} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right)^2 + \left(\frac{-A}{\mu} + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_k} +$$

$$+ \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\bar{\mu}}{3} \right) \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_e} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} +$$

$$+ \frac{c}{3} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3, \quad i, k, e = 1, 2, 3$$

где A, B, C — постоянные модули второго порядка, дающие физическую нелинейность. Запишем нелинейную часть. Отделив индекс 2 и учитывая, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \approx 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \approx -\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

получим нелинейную часть U в виде

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{4} + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_e}{\partial x_l} \frac{\partial u_e}{\partial x_k} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\bar{\mu}}{3} \right) \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_e} \frac{\partial u_e}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{B}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \frac{c}{3} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 - \left(\frac{\bar{\mu}}{4} + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^3 + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\bar{\mu}}{3} \right) \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^2 \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 - \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^3 \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 \right\} -$$

$$- \frac{A}{12} \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^3 \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 + \frac{B}{2} \left[-\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^2 \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 \right] +$$

$$+ \frac{c}{3} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^3 \left[\frac{-3\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} + 3 \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^2 - \left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \right)^3 \right], \quad i, k, e = 1, 3$$

Учитывая, что наибольшими по порядку являются компонента перемещения U' и производные по r , можно полагать $u_i \approx U' n_i$, где

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial U'}{\partial z} n_i n_k, \quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \approx \left(\frac{\partial U'}{\partial r} \right)^2$$

Тогда получим для нелинейного члена в U

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial r} \right)^2 \frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}} \xi, \quad \xi = 1 + \frac{1}{\bar{\mu}(1-\bar{\nu})^2} \left[\frac{1}{3} A(1-3\bar{\nu}+3\bar{\nu}^2-2\bar{\nu}^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} B(2-8\bar{\nu}+12\bar{\nu}^2+7\bar{\nu}^3) + \frac{c}{3} (1-2\bar{\nu})^3 \right]$$

Первое слагаемое в ξ дает геометрическую, а остальные члены соответствуют физической нелинейности.

Тогда нелинейное уравнение (24) примет вид

$$c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + 3\xi c_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) = 0$$

Подобно тому, как получено (25), можно ввести переменные r, θ, t и получить

$$\frac{\partial v_r}{c_0 t \partial \xi} \approx \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \quad -\frac{2 \partial v_r}{\partial t} - \frac{1}{t} v_r - \frac{1}{t} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + 3 v_r \frac{\partial v_r}{\partial \xi} = 0$$

Для $\xi > 0$, что соответствует полимерам, можно ввести вышеуказанную замену, где вместо $\frac{3}{2}$ стоит $\frac{3}{2} \xi$, и получить (28). Все приведенные решения и уравнения при этом не меняются. Для отрицательных ξ , что соответствует металлам [8], или жидкостям, вводим переменные

$$\frac{v_r}{c_0 t} = \mu, \quad \frac{v_0}{c_0 t^{3/2} \sqrt{-\frac{3}{2} \xi}} = \nu, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{-\frac{3}{2} \xi} Y$$

и уравнения снова имеют вид (28). AB является ударной волной сжатия, на которой

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \sqrt{2\xi - \mu}, \quad \nu = -\mu \sqrt{2\xi - \mu}$$

Области, позади AB , соответствует $\mu = 1$, $\nu = -Y$. В точке B $\xi = 1$, $\nu = -1$, $Y = 1$. Таким образом, задача совпадает с рассмотренной в [10], [13], [14], только знаки Y , ν меняются на обратные. Решение в окрестности B дается (30), где $c = 0$, $B = 0$ и условия на ударной волне в ходе решения уравнения на ней удовлетворены достаточно точно [14]. Таким образом, для жидких и твердых тел [8], [9], [16], которым соответствует $\xi < 0$, что приводит к ударным волнам сжатия, решение получается в конечном виде. Для $\xi > 0$ результаты расчетов

ударной волны BC приведены на фиг. 2. Отметим, что вблизи BC вдали от B имеет место одномерное по ξ решение, причем впереди BC $\mu' = -1$, $\nu' = Y$ и вместо (31) можно получить

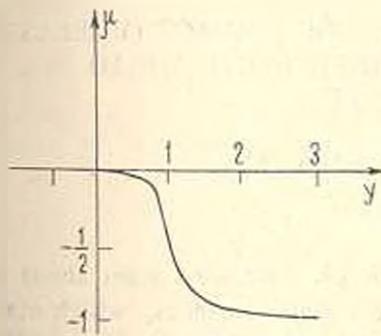
$$\xi + 1 = 2(\mu + 1) + \frac{(\mu + 1)^2}{c_2} \quad (33)$$

Постоянная c_2 вдоль луча $\theta = \text{const}$ находится из сравнения с линейным решением (29) и имеет вид

$$\mu \approx -1 + \frac{\sqrt{Y - 2\xi}}{\pi Y}, \quad c_2 = -\frac{2}{\pi^2 Y^2}$$

при этом $\nu = Y$. Для $Y \gg 1$, $\mu \approx -1$ из (30) можно получить асимптотический переход от (30) к (33). То же самое относится к μ' , ν' , где имеется непрерывный переход от решения вблизи B к решению вдали от B . На ударной волне BC вдали от B $2\xi - \mu - \mu' = 0$ или $\nu = Y$,

$\mu + 1 = \frac{3}{\pi^2 Y^2}$, при этом условие на BC удовлетворяется.



Фиг. 2

Полученное решение переходит в решение, найденное численным методом и показано на фиг. 2, где ему соответствуют значения $Y > 1.5$.

При расчетах выбрано $c = -1$, при этом условия на ударной волне выполнены достаточно точно.

Авторы благодарят А. Г. Багдоева за ценные советы.

ԱՌՋԵՎԻՑ ԵՐԿԵՒՍՏ ԱՆՎՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱՆ
ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՄԲ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԲԱԽՄԱՆ
ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ու. մ.

Գիտարկվում է $2h$ վերջավոր բարձրությամբ մարմինների բախումը, որոնք առջևից սահմանափակված են $\pi - 2\psi$ բացվածքով երկնիստ անկյուններով և հարթ մակերևույթներով, որոնք շարժվում են իրար հանդեպ հավասար հաստատուն արագություններով, Գծային խնդրի լուծումը որոշվում է հրկայնական աչառակ ալիքների տեսքով: Դրանով է լուծման ասիմպտոտիկայի բանաձևը և որոշված է լուծումը ճակատային ալիքների մոտ:

Այնուհետև դուրս է բերված սալերի մեջ երկայնական ալիքների համար կարճ ալիքների հավասարումները: Դրանով է նրանց լուծումը, որոնք միացվում են դծայինի հետ: Հաշվարկված է հարվածային ալիքների վրա արագությունների բաշխումը:

LINEAR AND NONLINEAR PROBLEMS OF IMPACT OF ELASTIC BODIES OF FINITE DEPTH. BOUNDED FROM AHEAD BY DIHEDRAL ANGLES

A. N. MARTIROSIAN, Y. S. SAFARIAN

S u m m a r y

The impact of bodies of finite depth $2h$, bounded from ahead by two-sided angles with opening $\pi - 2\psi$ and plane surfaces, which move towards one another with constant velocities is considered. The solution of linear problem in the form of plate longitudinal waves is determined. The formula for the asymptotic of the solution is obtained and the solution near the wave fronts is determined.

Furthermore short waves equations for longitudinal waves in plates are obtained. Their solution which is matched with the linear one is found. The distribution of velocities on shock wave is calculated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
2. Малков М. А. Двумерная задача об упругом соударении стержней.—Докл. АН СССР, 1965, т. 148, № 4, с. 782—785.
3. Малков М. А. Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.—ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 467—475.
4. Skalak R. Longitudinal impact of some infinite bars.—Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1, 59—64.
5. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—ДАН СССР, 1976, т. 226, № 3, с. 537—540.
6. Мартиросян А. Н. Некоторые нестационарные граничные задачи для упругой среды, граничащей с жидкостью.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. 35, № 2.
7. Нобя Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными М.: ИЛ, 1962.
8. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
9. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1980, т. 22, № 5, с. 586—599.
10. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 15—23.
11. Мартиросян А. Н. Решение некоторых нестационарных граничных задач теории упругости. Кандидатская диссертация, Ереван: ЕрГУ, 1977. 150 с.
12. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
13. Zahalak G. I., Myers M. K. Conical flow near singular rays.—Journal of Fluid Mechanics, 1974, vol. 64, № 3.
14. Багдоев А. Г., Гургенян А. А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 1, с. 39—55.
15. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1974.
16. Ниццл У. К., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин: Изд. АН ЭССР, 1972. 174 с.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
13.IX.1983