ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVIII, № 4, 1985 Механика

УДК 539.376

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ИЛИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

МХИТАРЯН С. М.

Обсуждаются две смешанные задачи о напряженном состоянии плоскости, ослабленной прямолинейным конечным или полубесконечным разрезом, к берегам которого приложена одинаковая нормальная разрывающая нагрузка произвольной интенсивности. Эти задачи рассматриваются в постановке нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций в первом приближении сообразно обобщенному принципу суперпозиции перемещений [1, 2], несколько модифицированному в настоящей работе. Определяющие интегральные уравнения задачи решаются в замкнутой форме методом Карлемана продолжения в комплексную плоскость, позволяющем выражения раскрытий разрезов и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на их концах получить в квадратурах довольно простой структуры. На примере рассматриваемых задач показана эквивалентность энергетического метода Гриффитса и силового критерия Ирвина.

Такими же интегральными уравнениями описываются обсуждаемые здесь задачи в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости плоскости по вертикальной координате изменяется по степенному закону. С этой точки зрения задача о конечном разрезе рассмотрена в [3, 4]. Исследование обширного класса смешанных и контактных задач для линейно-деформируемого основания общего типа, включающего указанный степенной тип, проведено в [5, 6], а также в [7].

Многие краевые задачи, в том числе контактные, нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций рассмотрены в работах [8—10], в которых используется обобщенный принцип суперпозиции перемещений или уточняется этот принцип.

Укажем также на работу [11], позволяющую расширить класс исследуемых здесь задач.

1. Пусть плоскость, отнесенная к правой системе координат Oxy, вдоль оси Ox содержит конечный разрез $L=\{y=0;\ |x|\leqslant a\}$ или полубесконечный разрез $L=\{y=0;\ x\geqslant 0\}$, берега которых загружены одинаковыми по величине и противоположными по направлению вер-

тикальными силами произвольной интенсивности $p(x)$, обладающими конечными равнодействующими и моментами. Пусть далее, материал плоскости подчиняется физическому закону $\sigma_i = K_0 \varepsilon_i^\mu$ $(0 < \mu \leq 1)$, где σ_i и ε_i, соответственно, интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а K_0 и μ — константы материала [1, 2]. Требуется определить раскрытия берегов разрезов и поле напряжений в плоскости, в частности, коэффициенты интенсивности нормальных разрушающих напряжений на концах разрезов.

Основываясь на обобщенном принципе суперпозиции перемещений [1, 2], выведем основные уравнения поставленных задач. Сначала коротко остановимся на этом принципе.

Как известно [1], плоская нелинейная граничная задача для полуплоскости, следующей указанному степенному закону и загруженной на своей границе вертикальной сосредоточенной силой, имеет точное решение. Согласно последнему вертикальные перемещения[1] $v(x)$ граничных точек верхней полуплоскости $y>0$, загруженной на своей границе направленной вдоль Oy вертикальной сосредоточенной силой P, в условиях несжимаемости материала выражаются формулой

$$v(x) = A\frac{P^m}{r^{m-1}}, \quad A = \frac{(2-m)\sin(\lambda\pi/2)}{\lambda K_0^m (m-1) J^m(\mu)}, \quad m = 1/\mu \tag{1.1}$$

$$\lambda = \sqrt{2\mu - 1}/\mu, \quad J(\mu) = 4\int_0^{\pi/2} (\cos\lambda\vartheta)^\mu \cos\vartheta \, d\vartheta$$

где r — расстояние точки приложения силы P от точки $(x, 0)$.

Введя обобщенные перемещения $v_\mu = |v(x)|^\mu$, из (1.1) будем иметь

$$v_\mu = |A|^\mu P/r^{1-\mu} \tag{1.2}$$

Поскольку последние линейно зависят от приложенных сил P, то к ним применяется обычный принцип суперпозиции, что и составляет сущность обобщенного принципа суперпозиции перемещений [1]. Очевидно, что такой принцип в определенном смысле может быть оправдан лишь для значений μ, достаточно близких к единице (случай $\mu = 1$ соответствует линейно-упругому материалу).

Основанные на указанном принципе решения контактных задач о вдавливании штампов в полуплоскость или смешанных задач о разрезах в плоскости характеризуются тем, что в концевых точках штампов или разрезов порядок особенностей напряжений равен $\mu/2$. С другой стороны, анализ асимптотического поведения напряжений вблизи концевой точки трещины в упругопластических степенно упрочняющихся телах при плоской деформации показывает [12], что точный порядок особенности напряжений равен $\mu/(\mu+1)$. По мере приближения μ к единице разница между этими двумя порядками стремится к нулю.

[1] $v(x)$ фактически будут скорости, а не перемещения. Однако, для простоты в дальнейшем будем употреблять термин „перемещения".

Но по мере приближения μ к нулю (случай $\mu=0$ соответствует идеально пластическому материалу) эта разница становится существенной.

Однако, оставаясь в рамках работ [1, 2], обобщенный принцип суперпозиции перемещений можно провести так, чтобы в концевых точках штампов или разрезов получить точный порядок напряжений. А именно, обобщенные перемещения введем следующим образом: $v_{об.}=[|v(x)|]^{\mu/(\mu+1)}$. Тогда согласно (1.1)

$$v_{об.}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{P^{1/(\mu+1)}}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{P^{1-\mu/(\mu+1)}}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}$$

Будем считать, что значения μ весьма близки к нулю. При этом величинами $\mu/(\mu+1)$ по сравнению с единицей будем пренебрегать, в то время как величины $2\mu/(\mu+1)$ будем оставлять. В результате

$$v_{об.}=|A|^{\mu/(\mu+1)}\frac{P}{r^{1-2\mu/(\mu+1)}}$$

Исходя из последней формулы, к $v_{об.}$ опять можно применять обычный принцип суперпозиции, который в конечном итоге обеспечит точный порядок особенностей напряжений в концевых точках штампов или разрезов.

Таким образом, обобщенный принцип суперпозиции перемещений можно провести по-разному для значений μ, близких к единице и близких к нулю. На основе изложенных соображений в дальнейшем будем считать, что в показателе r в формуле (1.2) μ может быть заменен на $2\mu/(\mu+1)$.

Перейдем теперь к выводу основных уравнений поставленных задач. С этой целью отдельно рассмотрим верхнюю и нижнюю полуплоскости $y\gtrless 0$, загруженные на своих границах заданными вертикальными силами $p(x)$, действующими на берегах разреза L, и неизвестными пока нормальными силами $\sigma(x)$, действующими вне разреза L. Силы $\sigma(x)$ только знаком отличаются от разрушающих нормальных напряжений. Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции перемещений, для вертикальных перемещений $v_{\pm}(x)$ граничных точек верхней и нижней полуплоскостей, соответственно, будем иметь следующие выражения:

$$v_{\pm}(x)=\pm A\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}}\right|^{1/\mu}\quad(1/2<\mu<1) \tag{1.3}$$

$$q(x)=\begin{cases}p(x), & x\in L\\ \sigma(x), & x\in L'\end{cases},\quad -\infty<x<\infty$$

где L'—дополнительный к разрезу L интервал.

Далее, как обычно, введем в рассмотрение функцию скачка вертикальных перемещений на разрезе

$$v_{+}(x)-v_{-}(x)=\begin{cases}\chi(x), & x\in L\\ 0, & x\in L'\end{cases}$$

с помощью которой из (1.3) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}} = h(x); \quad h(x) = \begin{cases} (2A)^{-\mu}[\chi(x)]^{\mu}, & x \in L \\ 0, & x \in L' \end{cases}$$

Отсюда по известной формуле обращения ([13], с. 584) получим следующее ключевое уравнение:

$$q(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} h(s)ds \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.4}$$

Так как вследствие непрерывности перемещений функция $\chi(x)$ на концах разреза L обращается в нуль, то при помощи интегрирования по частям уравнение (1.4) можно представить в виде

$$q(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} h'(s)ds \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.5}$$

В случае конечного разреза L из (1.5) получим следующие основные уравнения:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} \psi'(s)ds = g(x) \quad (|x| < a) \tag{1.6}$$

$$\sigma(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{(2A)^{\mu} 2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{\mu}} \psi'(s)ds \quad (|x| > a) \tag{1.7}$$

$$\psi(x) = [\chi(x)]^{\mu}, \quad g(x) = 2\pi \operatorname{ctg}(\pi\mu/2)(2A)^{\mu} p(x) \tag{1.8}$$

Интегро-дифференциальное уравнение (1.6) должно рассматриваться при граничных условиях

$$\psi(\pm a) = 0 \tag{1.9}$$

Введением безразмерных величин

$$\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} = \begin{matrix} x/a \\ s/a \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \sigma_0(\xi) \\ p_0(\xi) \end{matrix} = \begin{matrix} (2A)^{\mu}\sigma(a\xi) \\ (2A)^{\mu} p(a\xi) \end{matrix}$$

$$\varphi'(\xi) = \psi'(a\xi) a^{1-\mu}; \quad -1 \leqslant \xi, \ \eta \leqslant 1$$

уравнения (1.6)—(1.7) преобразуем к следующим:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^{\mu}} \varphi'(\eta)d\eta = f(\xi) \quad (|\xi| < 1) \tag{1.10}$$

$$\sigma_0(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^{\mu}} \varphi'(\eta)d\eta \quad (|\xi| > 1) \tag{1.11}$$

где согласно (1.8)

$$f(\xi) = g(a\xi) = 2\pi \operatorname{ctg}(\pi\mu/2) p_0(\xi) \tag{1.12}$$

При этом условия (1.9) запишутся в виде

$$\varphi(\pm 1) = 0 \tag{1.13}$$

В случае полубесконечного разреза L основные уравнения задачи будут

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^\mu} \varphi'(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (\xi > 0) \tag{1.14}$$

$$\sigma_0(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)}{|\xi-\eta|^\mu} \varphi'(\eta) d\eta \quad (\xi < 0) \tag{1.15}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.16}$$

где обозначения прежние[1].

2. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.13) можно получить из известных результатов [3, 13]. Однако, здесь его решение будет построено методом Карлемана продолжения уравнения в комплексную плоскость, отличным от указанных. Этот метод позволяет кроме раскрытия разреза определить также нормальные разрушающие напряжения вне разреза и, тем самым, найти полное решение задачи.

Основываясь на идеях работы [14], введем в рассмотрение функцию комплексного переменного

$$\Phi(z) = (z^2 - 1)^{\mu/2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{(z-\eta)^\mu} \tag{2.1}$$

В комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси, можно выбирать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Выберем ту ветвь, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет представление

$$\Phi(z) \sim 1 \quad \text{при} \quad z \to \infty$$

Далее, на берегах разреза по отрезку $[-1, 1]$ вещественной оси будем считать

$$z - 1 \to (1-\xi) e^{\pm i\pi}; \quad z + 1 \to 1 + \xi; \quad (z \to \xi \pm i0)$$

$$z - \eta \to \xi - \eta \quad (\xi > \eta); \quad z - \eta \to (\eta - \xi) e^{\pm i\pi} \quad (\eta > \xi) \quad (|\xi| < 1)$$

Тогда для граничных значений выбранной ветви функции $\Phi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза соответственно будем иметь

$$\Phi^+(\xi) = (1-\xi^2)^{\mu/2} \left[e^{i\pi\mu/2} \int\limits_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{(\xi-\eta)^\mu} + e^{-i\pi\mu/2} \int\limits_{\xi}^{1} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)^\mu} \right]$$

$$(|\xi| < 1)$$

$$\Phi^-(\xi) = (1-\xi^2)^{\mu/2} \left[e^{-i\pi\mu/2} \int\limits_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{(\xi-\eta)^\mu} + e^{i\pi\mu/2} \int\limits_{\xi}^{1} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)^\mu} \right]$$

[1] В случае полубесконечного разреза L в качестве a можно брать длину любого конечного отрезка, расположенного на L.

Отсюда

$$\int_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{\mu}} = \frac{(1-\xi^2)^{-\mu/2}}{2i\sin(\pi\mu)} [\Phi^+(\xi)e^{i\pi\mu/2} - \Phi^-(\xi)e^{-i\pi\mu/2}] \tag{2.2}$$

$$(|\xi|<1)$$

$$\int_{\xi}^{1} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^{\mu}} = \frac{(1-\xi^2)^{-\mu/2}}{2i\sin(\pi\mu)} [\Phi^-(\xi)e^{i\pi\mu/2} - \Phi^+(\xi)e^{-i\pi\mu/2}] \tag{2.3}$$

При помощи (2.2) – (2.3) уравнение (1.10) можно свести к элементарной краевой задаче

$$\Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi) = 2i\sin(\pi\mu/2)(1-\xi^2)^{\mu/2}f(\xi) \quad (|\xi|<1) \tag{2.4}$$

о скачке аналитической функции на разрезе. При этом уравнение (1.10) и краевая задача (2.4) в классе типа гельдеровских функций эквивалентны [13, 15].

Решение краевой задачи (2.4) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-z} + C \tag{2.5}$$

где C—произвольная постоянная, подлежащая определению. Теперь по формулам Племеля-Сохоцкого из (2.5) определим граничные значения $\Phi^{\pm}(\xi)$ $(|\xi|<1)$ и их выражения подставим в (2.2). Получим

$$\int_{-1}^{\xi} \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{\mu}} = \frac{1}{2}f(\xi) + (1-\xi^2)^{-\mu/2}\frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-\xi} +$$

$$+ C(1-\xi^2)^{-\mu/2} \quad (|\xi|<1) \tag{2.6}$$

что полностью совпадает с известным результатом из [13] (с. 579). Чтобы найти решение исходного уравнения (1.10), остается к (2.6) применить формулу обращения Абеля, которая даст

$$\varphi'(\xi) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{d\xi}\Bigg[\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi}\frac{f(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}} + CG_{\mu}(\xi) +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{\mu/2}f(u)du}{u-\eta}\Bigg] \quad (|\xi|<1) \tag{2.7}$$

$$G_{\mu}(\xi) = \int_{-1}^{\xi}(1-\eta^2)^{-\mu/2}(\xi-\eta)^{\mu-1}d\eta$$

В последнем интеграле положив

$$1+\eta = tv, \quad t = 1+\xi \quad (0 \leqslant t,\ v \leqslant 1)$$

при помощи известной формулы ([16], с. 300, формула 3.197.3) находим

$$G_\mu(\xi)=\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\mu/2}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}F\left(\mu/2,\ 1-\mu/2;\ 1+\mu/2;\ \frac{1+\xi}{2}\right)\quad (|\xi|\leqslant 1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, а $F(a,\ b;\ c;\ x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Легко видеть, что ([17], с. 112, формула (46)) $G_\mu(1)=\pi\,\mathrm{cosec}(\pi\mu/2)$.

Далее, из (2.7) получим

$$\varphi(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu)}{2\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{f(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+CG_\mu(\xi)+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi^2}\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-u^2)^{\mu/2}f(u)du}{u-\eta}\quad(|\xi|\leqslant 1)\qquad(2.8)$$

Очевидно, что $\varphi(-1)=0$. Чтобы удовлетворить и второму граничному условию (1.13), то есть условию $\varphi(1)=0$, в (2.8) положим $\xi=1$ и результат приравняем нулю. Поменяв порядок интегрирования в получающемся при этом повторном интеграле в (2.8) и воспользовавшись формулой 3.228.2 из [16] (с. 304), обнаружим, что $C=0$.

С учетом последнего и (1.12) формулы (2.7) и (2.8) представим в виде

$$\varphi'(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-1}^{\xi}\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}\right]+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{d\xi}\left[\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\mu/2}p_0(u)du\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}\right]\quad(|\xi|<1)\qquad(2.9)$$

$$\varphi(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\int_{-1}^{\xi}\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+$$

$$+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\mu/2}p_0(u)du\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}\quad(|\xi|\leqslant 1)\qquad(2.10)$$

Чтобы не иметь дело с сингулярными интегралами, берущимися в смысле Коши, преобразуем входящий во вторые слагаемые формул (2.9) и (2.10) внутренний интеграл. В результате, как выше, можем записать

$$I_\mu(\xi,u)=\int_{-1}^{\xi}\frac{(1-\eta^2)^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{\mu/2-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{k}M_\mu^k(\xi,u)$$

(2.11)

$$M_\mu^k(\xi,u)=\int_{0}^{1}\frac{v^{k-\mu/2}(1-v)^{\mu-1}}{y-v}\,dv\quad\left(y=\frac{1+u}{1+\xi}\right),\quad a_k=(-1)^k\binom{-\mu/2}{k}$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

Приняв во внимание известные формулы ([16], с. 300 формула 3.197.3 и с. 304 формула 3.228.3), находим

$$
M_\mu^k(\xi, u) = \begin{cases} \dfrac{1+\xi}{1+u}\cdot\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(k+1-\mu/2)}{\Gamma(k+1+\mu/2)}F\left(1,\ k+1-\mu/2;\ k+1+\mu/2;\ \dfrac{1+\xi}{1+u}\right) & (\xi<u) \\ \dfrac{\Gamma(\mu-1)\Gamma(k+1-\mu/2)}{\Gamma(k+\mu/2)}F\left(1,\ 1-k-\mu/2;\ 2-\mu;\ \dfrac{\xi-u}{1+\xi}\right) - \\ \qquad -\left(\dfrac{1+u}{1+\xi}\right)^{k-\mu/2}\left(\dfrac{\xi-u}{1+\xi}\right)^{\mu-1}\mathrm{ctg}(\pi\mu) & (u<\xi) \end{cases} \tag{2.12}
$$

Формулы (2.11) и (2.12) в сочетании с эффективными вычислительными процедурами из [18] для гипергеометрической функции могут быть использованы при числовых расчетах для раскрытия разреза $\varphi(\xi)$.

Обратимся теперь к уравнению (1.11). Сопоставление (2.1) и (2.5) даст

$$
\sigma_0(\xi) = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\,\mathrm{sgn}\,\xi(\xi^2-1)^{-\mu/2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta^2)^{\mu/2}p_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi} \quad (|\xi|>1)
$$

Это соотношение после перехода к прежним переменным примет вид

$$
\sigma(x) = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\,\mathrm{sgn}\,x(x^2-a^2)^{-\mu/2}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-s^2)^{\mu/2}p(s)ds}{s-x} \quad (|x|>a) \tag{2.13}
$$

Отсюда для коэффициентов интенсивности нормальных разрушающих напряжений на концах разреза получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned} K_1 &= -\lim_{x\to a+0}[(x-a)^{\mu/2}\sigma(x)] = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi(2a)^{\mu/2}}\int_{-a}^{a}(a-s)^{\mu/2-1}(a+s)^{\mu/2}p(s)ds \\ K_2 &= -\lim_{x\to -a-0}[|x+a|^{\mu/2}\sigma(x)] = \frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi(2a)^{\mu/2}}\int_{-a}^{a}(a-s)^{\mu/2}(a+s)^{\mu/2-1}p(s)ds \end{aligned} \tag{2.14}
$$

Таким образом, нормальные разрушающие напряжения вне разреза, взятые с обратным знаком, даются формулой (2.13), а их коэффициенты интенсивности на концах разреза — формулами (2.14). В предельном случае $\mu\to1$ формулы (2.14) переходят в выражения коэффициентов интенсивности в известной задаче Гриффитса [19].

Отметим, что введенная по формуле (2.1) функция $\Phi(z)$ в данном случае представляет собой аналог известного комплексного потенциала для линейно-упругой полуплоскости.

3. Теперь построим решение уравнения (1.14). Введем функцию

$$
\Phi(z) = z^{\mu-1}\int_0^\infty\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(z-\eta)^\mu} \tag{3.1}
$$

В комплексной плоскости $z=\xi+i\tau$, разрезанной вдоль луча вещественной оси, можно выбирать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Выберем ту ветвь, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет асимптотическое представление

$$\Phi(z)\sim\frac{1}{z}\quad \text{при}\quad z\to\infty$$

Далее, на берегах разреза по лучу $[0, \infty)$ вещественной оси будем считать $(z\to\xi\pm i0)$

$$z\to\xi;\; z-\eta\to\xi-\eta\quad(\xi>\eta),\; z-\eta\to(\eta-\xi)e^{\pm i\pi}\;(\eta>\xi)$$

Тогда после определения граничных значений выбранной ветви функции $\Phi(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза будем иметь

$$\int_0^\xi\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu}=\frac{\xi^{1-\mu}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^+(\xi)e^{i\pi\mu}-\Phi^-(\xi)e^{-i\pi\mu}\right]\quad(|\mu|<1)\tag{3.2}$$

$$\int_\xi^\infty\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)^\mu}=\frac{\xi^{1-\mu}}{2i\sin(\pi\mu)}\left[\Phi^-(\xi)-\Phi^+(\xi)\right]\tag{3.3}$$

При помощи (3.2) и (3.3) уравнение (1.14) можно свести к эквивалентной краевой задаче

$$\Phi^+(\xi)=e^{-i\pi\mu}\Phi^-(\xi)+2ie^{-i\pi\mu/2}\sin(\pi\mu/2)\xi^{\mu-1}f(\xi)\quad(\xi>0)\tag{3.4}$$

Далее, следуя известной процедуре [13, 19], решение краевой задачи (3.4) представим в виде

$$\Phi(z)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi e^{i\pi\mu/2}}z^{\mu/2-1}\int_0^\infty\frac{\eta^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-z}\tag{3.5}$$

Теперь по формулам Племеля-Сохоцкого из (3.5) найдем $\Phi^\pm(\xi)$ $(\xi>0)$ и подставим в (3.2). В результате получим

$$\int_0^\xi\frac{\varphi'(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^\mu}=\frac{1}{2}f(\xi)+\frac{\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{2\pi}\xi^{-\mu/2}\int_0^\infty\frac{\eta^{\mu/2}f(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\quad(\xi>0)$$

Отсюда по формуле обращения Абеля с учетом (1.12) будем иметь

$$\varphi(\xi)=2\cos^2(\pi\mu/2)\int_0^\xi\frac{p_0(\eta)d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}}+\frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\int_0^\infty u^{\mu/2}p_0(u)du\int_0^\xi\frac{\eta^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}\quad(\xi>0)\tag{3.6}$$

Легко показать, что

$$J_\mu(\xi,u)=\int_0^\xi\frac{\eta^{-\mu/2}d\eta}{(\xi-\eta)^{1-\mu}(u-\eta)}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\dfrac{\xi^{\mu/2}}{u}F\left(1,1-\mu/2;1+\mu/2;\dfrac{\xi}{u}\right) & (\xi<u)\\[2ex] \dfrac{\Gamma(\mu-1)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(\mu/2)}\xi^{\mu/2-1}F\left(1,1-\mu/2;2-\mu;1-\dfrac{u}{\xi}\right)-\operatorname{ctg}(\pi\mu)u^{-\mu/2}(\xi-u)^{\mu-1} & (u<\xi)\end{cases}$$

Очевидно, что (3.6) удовлетворяет условию (1.16).

Обращаясь к вопросу определения нормальных напряжений вне разреза, заметим, что сопоставление (1.15), (3.1) и (3.5) даст

$$\sigma_0(\xi)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}|\xi|^{-\mu/2}\int_0^{\infty}\frac{\eta^{\mu/2}p_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}\quad(\xi<0)$$

Перейдя к прежним переменным, отсюда получим

$$\sigma(x)=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}|x|^{-\mu/2}\int_0^{\infty}\frac{s^{\mu/2}p(s)ds}{s-x}\quad(x<0)\qquad(3.7)$$

Итак, нормальные разрушающие напряжения вне полубесконечного разреза, взятые с обратным знаком, даются формулой (3.7).

Для коэффициента интенсивности нормальных напряжений на конце разреза из (3.7) находим

$$K_0=-\lim_{x\to-0}\left[|x|^{\mu/2}\sigma(x)\right]=\frac{\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\mu/2-1}p(s)ds\qquad(3.8)$$

В предельном случае $\mu\to1$ (3.8) совпадает с известным результатом [19].

4. Формулами (2.14) и (3.8) дается асимптотическое поведение нормальных напряжений вблизи концевых точек разрезов. При помощи известного метода [20] получим такие же формулы для вертикальных обобщенных перемещений. При этом для простоты ограничимся первой задачей и рассмотрим симметричное загружение берегов конечного разреза: $p(-x)=p(x)$

Тогда согласно (2.14)

$$K_1=K_2=K=\frac{(2a)^{1-\mu/2}\sin(\pi\mu/2)}{\pi}\int_0^{a}\frac{p(s)ds}{(a^2-s^2)^{1-\mu/2}}\qquad(4.1)$$

и можем записать, что ($H(x)$—функция Хевисайда)

$$\sigma(x)\simeq\sigma_1(x)=-KH(x-a)|x-a|^{-\mu/2}\quad x\to a+0\qquad(4.2)$$

С другой стороны, исходя из (1.3), будем иметь

$$\left|\frac{v_*(x)}{A}\right|^{+}=w(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(s)ds}{|x-s|^{1-\mu}}\quad(-\infty<x<\infty)\qquad(4.3)$$

Далее, введя в рассмотрение образы Фурье

$$[\overline{w}(\lambda),\ \overline{q}(\lambda),\ \overline{\sigma}_1(\lambda)]=\int_{-\infty}^{\infty}[w(x),\ q(x),\ \sigma_1(x)]\,e^{i\lambda x}dx$$

которые в общем случае трактуются в рамках теории обобщенных функций, соотношение (4.3) представим в виде

$$\bar{w}(\lambda) = 2\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)|\lambda|^{-\mu}\bar{q}(\lambda)$$

откуда вытекает, что [20]

$$\bar{w}(\lambda) \sim \bar{w}_a(\lambda) = 2\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)|\lambda|^{-\mu}\bar{\sigma}_1(\lambda) \quad (|\lambda| \to \infty)$$

Но

$$\bar{\sigma}_1(\lambda) = -Ke^{ia\lambda}\Gamma(1-\mu/2)[\sin(\pi\mu/4) + i\cos(\pi\mu/4)\,\mathrm{sgn}\,\lambda]\,|\lambda|^{\mu/2-1}$$

При этом была использована таблица образов Фурье некоторых обобщенных функций из [20] (с. 43). Опять воспользовавшись этой таблицей, окончательно находим

$$w(x) \sim w_a(x) = \begin{cases} 2K\dfrac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\cos(\pi\mu/2)(a-x)^{\mu/2}, & x \to a-0 \\ 0, & x \to a+0 \end{cases} \tag{4.4}$$

где $w_a(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $\bar{w}_a(\lambda)$. Следовательно,

$$w_*(x) = [v_*(x)]^{\alpha} \sim A' w_a(x) \quad x \to a \tag{4.5}$$

В предельном случае $\mu \to 1$ формулы (4.2) и (4.4) — (4.5) переходят в известные асимптотические формулы для нормальных напряжений и вертикальных перемещений в окрестности края трещины на ее продолжении [21].

Отметим, что если в (4.3) A' заменить на θ_ν/ν и μ — на $1-\nu$, где θ_ν — определенная константа [5], то обобщенные перемещения $[v_*(x)]^{\alpha}$ совпадут с истинными вертикальными перемещениями граничных точек линейно-упругой верхней полуплоскости, модуль упругости которой изменяется по степенному закону

$$E(y) = E_0 y^{\nu} \qquad (0 \leqslant \nu < 1) \tag{4.6}$$

Таким образом, обобщенные перемещения можно истолковать и в указанном смысле.

Теперь запишем уравнение энергетического баланса [21, 22]

$$dU = -d\Pi \tag{4.7}$$

для тела с распространяющимся разрезом (трещиной), выражающее условие локального разрушения тела. Здесь U — потенциальная энергия тела к моменту разрушения, а Π — поверхностная энергия разрушения, причем

$$d\Pi = 2\gamma\, da$$

где γ — плотность поверхностной энергии. Следовательно, уравнение (4.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial U}{\partial a} = G = -2\gamma \tag{4.8}$$

где G — интенсивность освобождающейся энергии тела (приток энергии в вершину трещины), расходуемой на его разрушение.

Для вычисления G воспользуемся известным подходом Ирвина [21, 22], предполагая, что конец трещины $x=a$ мысленно продвигается вправо на величину Δa. Тогда

$$G=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{2\Delta a}\int_0^{\Delta a}\sigma(x)2w_-(x)dx$$

так как $\sigma_y=-\sigma(x)$. Воспользовавшись асимптотическими формулами (4.2), (4.4)—(4.5), будем иметь

$$G=-2K^2A^{\mu}\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\cos(\pi\mu/2)\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_0^{\Delta a}\left(\frac{\Delta a-x}{x}\right)^{\mu/2}dx$$

Вычислив входящий сюда элементарный интеграл, окончательно получим

$$G=-2K^2A^{\mu}\cos(\pi\mu/2)\Gamma(\mu)\Gamma^2(1-\mu/2) \tag{4.9}$$

Сопоставление (4.8) и (4.9) показывает, что в данном случае энергетический критерий Гриффитса, когда G достигает критической величины $G_c=\mathrm{const}$, эквивалентен силовому критерию Ирвина, когда K достигает критической величины $K_c=\mathrm{const}$.

Рассмотрим частный случай, когда $p(x)=p_0=\mathrm{const}$. Тогда из (4.1) находим

$$K=2^{\mu/2-1}\sin(\pi\mu/2)p_0a^{\mu/2}[\pi\Gamma(\mu)]^{-1}\Gamma^2(\mu/2) \tag{4.10}$$

Сопоставляя (4.8) и (4.9), для предельной разрушающей нагрузки получим следующее выражение:

$$p_0=\left[\frac{2^{2-\mu}\gamma}{A^{\mu}\cos(\pi\mu/2)\Gamma(\mu)a^{\mu}}\right]^{1/2}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu/2)}$$

которое при переходе к линейно-упругой плоскости (указанным выше способом), состоящей из двух полуплоскостей, модули упругости которых по их глубине изменяются по степенному закону (4.6), совпадает с формулой (4.7) из [3].

Согласно сказанному в первом пункте, в (4.10) μ может быть заменен на $2\mu/(\mu+1)$, что даст

$$\bar K=2^{-1/(\mu+1)}\sin[\pi\mu/(\mu+1)]p_0a^{\mu/(\mu+1)}\{\pi\Gamma[2\mu/(\mu+1)]\}^{-1}\Gamma^2[\mu/(\mu+1)]$$

В таблице даны приведенные значения коэффициентов интенсивности

$$L=K(p_0a^{\mu/2})^{-1},\quad \bar L=\bar K[p_0a^{\mu/(\mu+1)}]^{-1}$$

при различных μ.

Значения L, $\bar L$

μ	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1
L	0.95	0.93	0.90	0.87	0.84	0.81	0.79	0.74	0.71
$\bar L$	0.87	0.85	0.83	0.81	0.79	0.76	0.74	0.73	0.71

По мере приближения μ к единице значения L и $\bar L$ все меньше и меньше отличаются друг от друга.

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՄ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՃԱՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԵՎ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ԶԵՎԱՓՈԽՎՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Հաստատված սողքի ու գծային տեսության դրվածքով, երբ լարումների և դեֆորմացիաների միջև կախվածությունը տրվում է աստիճանային օրենքով, առաջին մոտավորությամբ կամ առաձգականության գծային տեսության դրվածքով, երբ հարթության առաձգականության մոդուլը ըստ ուղղաձիգ կոորդինատի փոփոխվում է աստիճանային օրենքով, դիտարկված են վերջավոր և կիսաանվերջ ճաքերով թուլացված հարթության լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրները։ Որոշիչ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները կառուցված են փակ տեսքով՝ հավասարումները կոմպլեքս տիրույթ շարունակելու Կառլեմանի մեթոդով։ Ճաքերի ծայրակետերի շրջակայքում նորմալ լարումների և տեղափոխությունների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնց օգնությամբ ձևակերպված է ճաքերի տարածման պայմանը։ Ցույց է տրված Գրիֆիթսի էներգետիկ և Իրվինի ուժային հայտանիշների համարժեքությունը։

ON STRESSED STATE OF PLANE STRAINED WITH A DEGREE LAW, WEAKENED BY FINITE OR SEMIFINITE CROSS SECTION

S. M. MCHITARIAN

Summary

By means of the Karleman method of continuation closed solutions of mixed problems about stressed state of plane strained with a degree law with sections of finite or semifinite length are built into the complex plane. The equivalence of Griffit's energetic criterion and forced criterion is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.—ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.
2. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения.—ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 813—820.
3. *Попов Г. Я., Радиолло М. В.* К теории трещин в неоднородных или ортотропных средах.—ПМ, 1975, т. 11, вып. 5, с. 36—44.
4. *Пальцун Н. В., Приварников А. К.* О напряженном состоянии возле щели в пространстве с переменным модулем упругости.—ПМ, 1967, т. 3, вып. 9, с. 138—141.
5. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев—Одесса: Вища Школа, 1982. 168 с.

6. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
7. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
8. *Арутюнян Н. Х., Александров В. М.* Некоторые вопросы механики ледяного покрова. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979. 399 с.
9. *Арутюнян Н. Х., Сумбатян М. А.* Плоская задача теории ползучести для слоя.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1980, т. 33, № 3, с. 18—28.
10. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости.— МТТ, 1983, № 1, с. 107—113.
11. *Гольдштейн Р. В.* К пространственной задаче теории упругости для тел с плоскими трещинами произвольного разрыва. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт № 122, 1979. 66 с.
12. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material.— J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, N. 1, p. 1—12.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. *Carleman T.* Uber die Abelsche Integralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen.—Math. Z., 1922, Bd. 15, Heft 1/2, s. 111—120.
15. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля.—ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4, с. 748—751.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973. 296 с.
18. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
19. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
20. *Lighthill M. J.* Introduction to Fourier analysis and generalised functions. Cambridge: at the University press, 1959. 79 p.
21. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
22. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI.1983