

УДК 539.374

ОБ УЧЕТЕ ИЗМЕНЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ
 ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МАТЕРИАЛА

ГОХИТЕНИ Г. Б.

1. Существующие теории пластичности предполагают, что упругие свойства материала не зависят от пластических. Однако, экспериментальные исследования [1, 2] указывают на изменение модулей упругости при пластическом деформировании металлов.

Рассмотрим идеальное упругопластическое состояние несжимаемого материала с учетом влияния пластической деформации на его упругие свойства. Ограничимся анализом напряженного и деформированного состояния в процессе приложения нагрузки, а также непосредственно после окончания нагружения. В этом случае восстановлением упругих свойств материала при длительном отдыхе после пластической деформации [2] можно пренебречь и считать, что модуль упругости E является функцией только параметра q , характеризующего предыдущую пластическую деформацию. Выбирая в качестве такого параметра накаляющую пластическую деформацию, запишем основные соотношения в виде [3, 4]

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p, \quad de_{ij}^e = \frac{3}{2E} ds_{ij}, \quad e_{ii} = 0$$

$$f(s_{ij}) = 0, \quad E = E(q), \quad q = \int (2de_{ij}^e de_{ij}^p)^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь s_{ij} , e_{ij} — соответственно, компоненты тензоров напряжения и деформации; e_{ij}^e , e_{ij}^p — соответственно, компоненты упругой и пластической деформации; s_{ij} — компоненты девiatora напряжения; $f=0$ — условие пластичности; по повторяющимся в одичлене нижним индексам здесь и в дальнейшем производится суммирование.

Для того, чтобы установить соотношения связи между напряжениями и деформациями необходимо ввести некоторые постулаты, касающиеся свойств материала в пластической области. В работах [5, 6] такие соотношения получены на основе постулатов А. А. Ильюшина и Л. Друккера. Рассмотрим случай, когда имеет место принцип максимума Р. Мизеса [7]

$$s_{ij} de_{ij}^p \geq s_{ij}^0 de_{ij}^p \quad (1.2)$$

где s_{ij}^0 — компоненты тензора любого возможного напряженного состояния, удовлетворяющего условию

$$f(\varepsilon_{ij}^0) \leq 0 \quad (1.3)$$

В этом случае, в отличие от [5, 6], справедлив ассоциированный закон пластичности

$$de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.4)$$

где $d\varepsilon_{ij}$ — скалярный множитель.

Для условия пластичности Р. Мизеса

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2, \quad k = \text{const} \quad (1.5)$$

из соотношения (1.4) получим

$$de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1), (1.6) интегрируются при условии, что при $\lambda=0$ имеет место чисто упругое состояние тела (компонентам примем индекс e внизу), то есть

$$s_{ij} = s_{ije}, \quad e_{ij} = \frac{3}{2E} s_{ije} \quad \text{при } \lambda=0 \quad (1.7)$$

2. Положим

$$E = E_0 + \delta\omega(q), \quad \omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \omega^{(n)} \quad (2.1)$$

где δ — малый фиксированный параметр, характеризующий изменение модуля упругости при пластической деформации; E_0 — известная постоянная.

В соответствии с (2.1)

$$s_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n s_{ij}^{(n)}, \quad s_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n s_{ij}^{(n)}, \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n q^{(n)}, \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \lambda_n \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{E} = (E_0 + \delta\omega)^{-1} = \frac{1}{E_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\delta \frac{\omega}{E_0} \right)^n \quad (2.3)$$

$$\omega = \omega(q^{(0)} + \delta q^{(1)} + \delta^2 q^{(2)} + \dots) \quad (2.4)$$

Подставим (2.1) — (2.3) в соотношения (1.1), (1.5), (1.6), (2.4) и разложим (2.4) в ряд Тейлора в окрестности $q^{(0)}$. После преобразований получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{e(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{p(n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n de_{ij}^{e(n)} = \frac{3}{2E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^m \left(\frac{\omega}{E_0} \right)^m ds_{ij}^{(n-m) \frac{3}{2} e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d\epsilon_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d\epsilon_m s_{ij}^{(n-m)} \lambda^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^n (s_{ij}^{(n)} s_{ij}^{(n-m)}) = 2k^2 \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n dq^{(n)} = (A + \lambda B)^{1/2} = A^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda \frac{B}{A} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\lambda \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\lambda \frac{B}{A} \right)^3 - \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\lambda \frac{B}{A} \right)^4 + \dots \right)$$

$$A = 2d\epsilon_{ij}^{(0)} d\epsilon_{ij}^{(0)}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \lambda^{n-1} (2d\epsilon_{ij}^{(n)} d\epsilon_{ij}^{(n-m)})$$

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\frac{d\omega}{dq} \Big|_{q^{(n)}} + \lambda^2 \left(q^{(n)} \frac{d\omega}{dq} \Big|_{q^{(n)}} + \frac{(q^{(n)})^2}{2} \frac{d^2\omega}{dq^2} \Big|_{q^{(n)}} \right) + \dots \right)$$

Приравнявая в (2.5) члены при одинаковых степенях параметра λ , получим систему уравнений, позволяющую развить метод последовательных приближений для материала, упругие свойства которого зависят от пластических. Ограничимся вторым приближением.

В нулевом приближении

$$d\epsilon_{ij}^{(0)} = \frac{3}{2E_0} ds_{ij}^{(0)} + d\epsilon_0 s_{ij}^{(0)}, \quad s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(0)} = 2k^2 \quad (2.6)$$

Соотношения (2.6) представляют собой уравнения Е. Рейсса и условие пластичности Р. Минзеса для материала с постоянным модулем упругости. Используя (2.5) и (2.6), найдем

$$dq^{(0)} = 2k d\epsilon_0, \quad \omega^{(0)} = \omega(q^{(0)}) \quad (2.7)$$

В первом приближении

$$d\epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2E_0} \left(ds_{ij}^{(1)} - \frac{\omega^{(0)}}{E_0} ds_{ij}^{(1)} \right) + d\epsilon_0 s_{ij}^{(1)} + d\epsilon_1 s_{ij}^{(0)}, \quad s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

$$dq^{(1)} = 2k d\epsilon_1, \quad \omega^{(1)} = q^{(1)} \frac{d\omega}{dq} \Big|_{q^{(0)}} \quad (2.9)$$

Во втором приближении

$$d\epsilon_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2E_0} \left(ds_{ij}^{(2)} - \frac{\omega^{(1)}}{E_0} ds_{ij}^{(2)} + \frac{(q^{(0)})^2 - \omega^{(0)} E_0}{E_0^2} ds_{ij}^{(0)} \right) + d\epsilon_0 s_{ij}^{(2)} + d\epsilon_1 s_{ij}^{(1)} + d\epsilon_2 s_{ij}^{(0)}$$

$$2s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(2)} + s_{ij}^{(1)} s_{ij}^{(1)} = 0 \quad (2.10)$$

$$dq^{(2)} = 2k d\epsilon_2, \quad \omega^{(2)} = q^{(2)} \frac{d\omega}{dq} \Big|_{q^{(0)}} + \frac{(q^{(0)})^2}{2} \frac{d^2\omega}{dq^2} \Big|_{q^{(0)}} \quad (2.11)$$

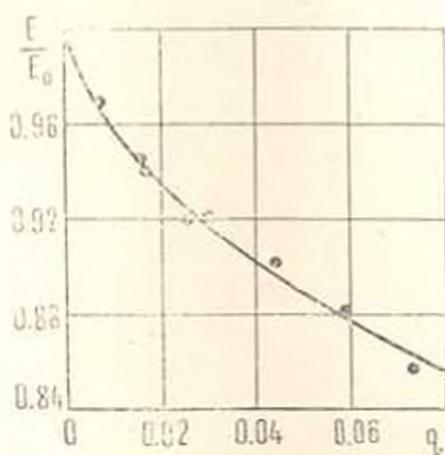
Уравнения (2.6)–(2.11) интегрируются при соответствующих граничных условиях (1.7)

$$s_{rr}^{(n)} = s_{\theta\theta}^{(n)}, \quad s_{\theta\theta}^{(n)} = \frac{3}{2E_0} s_{\theta\theta}^{(n)} \quad (n \geq 0) \quad \text{при } \lambda = 0 \quad (2.12)$$

$$s_{\theta\theta}^{(n)} = 0 \quad (n = 1) \quad \text{при } \lambda = 0 \quad (2.13)$$

3. Функции $E(q)$ и $\omega(q)$ определяются из экспериментальных исследований упругих свойств материала, подвергнутого пластическому деформированию. В качестве примера на фиг. 1 представлены результаты испытаний образцов из стали 30ХГС [2]. Значение q в эксперименте изменялось от 0 до 0,073, а снижение модуля упругости при этом не превышало 15%. Примем последнюю величину за δ и аппроксимируем приведенные данные формулой

$$\frac{E}{E_0} = -0,57(q + 0,001)^{1/2} + 1,018 \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Зависимость (3.1) показана на фиг. 1 сплошной линией, а экспериментальные данные — темными точками.

Используя (2.1) и (3.1), получим

$$\omega = (0,12 - 3,8(q + 0,001)^{1/2})E_0 \quad (3.2)$$

4. Для иллюстрации метода рассмотрим упругопластическое состояние цилиндрической толстостенной трубы радиусов a, b ($a < b$) в условиях плоской деформации. Материал трубы — сталь 30ХГС. Зависимость модуля упругости от пластической деформации примем согласно п. 3, $E_0 = 20200$ кг/мм², предел текучести при сдвиге $k = 36,2$ кг/мм² [2].

Изложенным выше методом был проведен анализ напряженного и деформированного состояния трубы при нагружении ее внутренним давлением p , а также при последующей разгрузке. В результате получены выражения для напряжений, перемещений и деформаций в цилиндрических координатах r, θ, z (ось z направлена вдоль оси трубы)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p &= -p_0 + \ln(\rho^2), \quad \varepsilon_6^p = 1 + \varepsilon_1^p, \quad \varepsilon_7^p = \frac{1}{2} + \varepsilon_1^p, \quad \varepsilon_8^p = 0, \quad p_0 = \frac{p}{2k} \\ \varepsilon_1^e &= \frac{\rho_0^2}{2} (1 - \rho^{-2}), \quad \varepsilon_6^e = \frac{\rho_0^2}{2} (1 + \rho^{-2}), \quad \varepsilon_7^e = \frac{\rho_0^2}{2}, \quad \varepsilon_8^e = 0, \quad e_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} e_2 &= -e_3 = -\frac{3k\rho_0^2}{2E_0\rho^2}, \quad u = e\psi, \quad a = \frac{r}{b}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b} \\ \varepsilon_1^{p*} &= \varepsilon_1^p - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2} (1 - \rho^{-2}), \quad \varepsilon_6^{p*} = \varepsilon_6^p - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2} (1 + \rho^{-2}), \quad \varepsilon_7^{p*} = \varepsilon_7^p - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2} \\ \varepsilon_8^{p*} &= 0, \quad \varepsilon_1^{e*} = \varepsilon_1^e - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2} (1 - \rho^{-2}), \quad \varepsilon_6^{e*} = \varepsilon_6^e - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2} (1 + \rho^{-2}) \\ \varepsilon_7^{e*} &= \varepsilon_7^e - \frac{p_0\rho^2}{1-\rho^2}, \quad \varepsilon_8^{e*} = 0, \quad e_1^{p*} = 0, \quad e_2^{e*} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$e_1^{p*} = -e_6^{p*} = e_1 + \frac{3p_0\rho^2}{2E_0(1-\rho^2)\rho^2} \left(1 - \delta \frac{\omega^{(0)}}{E_0} + \lambda \frac{(\omega^{(0)})^2 - \omega^{(0)} E_0^*}{E_0^*} \right)$$

$$\omega^{(0)} = (0,12 - 3,8(q^{(0)} + 0,001)^{1/2}) E_0, \quad q^{(0)} = \frac{3k}{E_0} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1 \right), \quad \omega^{(1)} = 0$$

$$u^{p*} = e_1^{p*} \rho, \quad e_1^{e*} = -e_6^{e*} = e_1 + \frac{3p_0\rho^2}{2E_0(1-\rho^2)\rho^2}, \quad u^{e*} = e_1^{e*} \rho$$

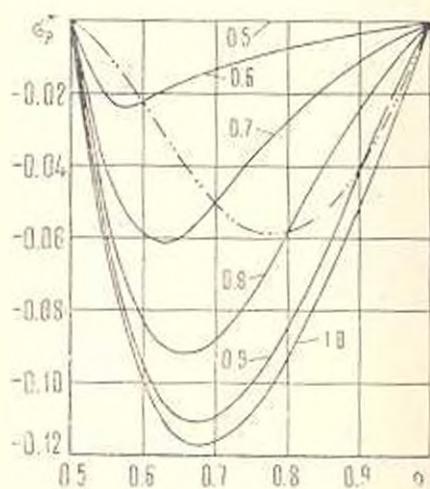
где ρ_0 — граница упругопластической зоны, определяемая из уравнения

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rho_0^2 + \ln(\rho_0^2) \quad (4.3)$$

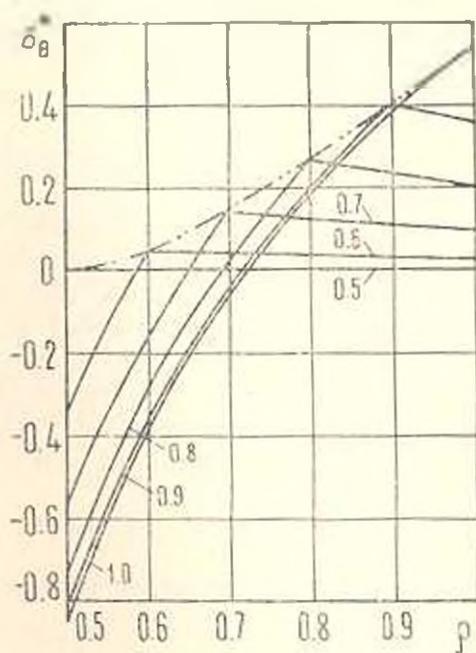
Все компоненты определены с учетом нулевого, первого и второго приближений и представлены в безразмерном виде: напряжения отнесены к $2k$, перемещения — к b ; индекс p относит компоненту к упругопластической зоне $\alpha < \rho < \rho_0$, индекс e — к упругой зоне $\rho_1 < \rho < 1$; звездочкой отмечены компоненты остаточных напряжений, перемещений и деформаций при разгрузке (снижении внутреннего давления до нуля). Предполагается, что разгрузка не сопровождается вторичными пластическими деформациями.

Из (4.1) — (4.3) следует, что члены с δ и λ , учитывающие влияние изменения упругих свойств материала, входят только в выражения для e_1^{p*} , e_6^{p*} и u^{p*} . Формулы для определения остальных компонент (4.1) и радиуса ρ_0 (4.3) совпадают с известным решением той же задачи для трубы из несжимаемого материала с постоянным модулем упругости [3]. Таким образом, изменение упругих свойств материала необходимо учитывать только при разгрузке для определения остаточных перемещений и деформаций в упругопластической зоне трубы.

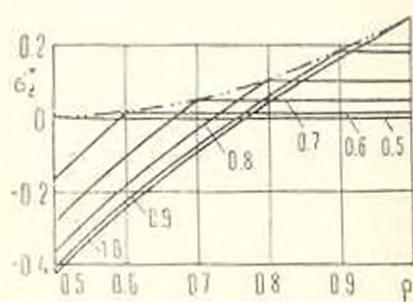
На фиг. 2—6 приведены графики безразмерных компонент остаточных напряжений и радиального перемещения u^* , а также накопленной пластической деформации q в зависимости от радиуса ρ для



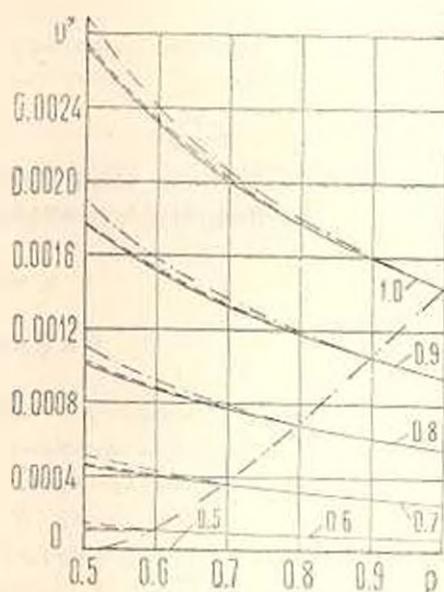
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

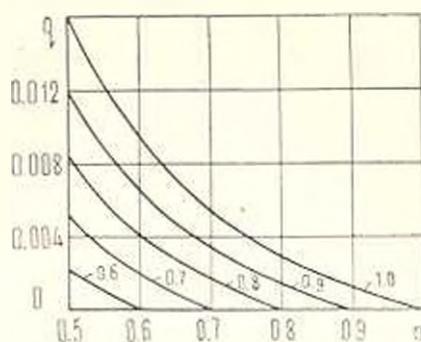


Фиг. 5

различных значений радиуса ρ , при $\delta = 2\mu$. Нулевое, первое и второе приближения величины ν^* показаны на фиг. 5 штрих-пунктирной, штриховой и сплошной линиями, соответственно.

Из фиг. 5 следует, что в упругопластической области величина ν^* ,

определенная с учетом изменения модуля упругости, существенно меньше, чем μ^* , вычисленная при условии $E = \text{const}$. На внутренней поверхности трубы разница между ними составляет от 5,5% при $\rho_1 = 1,0$ до 25% при $\rho_1 = 0,6$.



Фиг. 6

Остаточные напряжения (фиг. 2—4) удовлетворяют условию

$$\sigma_0^* - \sigma_p^* < 1 \quad (4.4)$$

откуда, с учетом (1.3) и (2.6) следует, что вторичные пластические деформации при разгрузке отсутствуют.

Величина q (фиг. 6) не превосходит 0,017, то есть принадлежит исследованному экспериментально диапазону q (см. п. 3).

**ՆՅՈՒԹԻ ՊԸԱՍՏԻԿ ԿԵՅՈՐՈՄԱՅԻՆՈՅԻ ԿԵՊԸՈՐՈՐ ԱՌԱՋԳԱՆԱՆ
ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԽՅԱՐԵ**

Գ. Ե. ԳՈՆՇՏՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դիտարկվում է անսեղմելի նյութի իզոտրոպական առաձգապլաստիկական վիճակը նրա առաձգական հատկությունների վրա պլաստիկական դեֆորմացիաների ազդեցության հաշվառումով: Բերված են երակետային կապակցությունների պայմաններում Սիդհարթի պլաստիկության պայմանի դեպքում: Ստացված է նշված նյութից խողովակի համար մոտավոր անալիտիկ լուծում նրան ներքին ճնշմամբ բեռնավորման, ինչպես նաև բեռնաթափման դեպքում: Ցույց է տրված, որ խողովակի նյութի առաձգական հատկությունների փոփոխության հաշվառումը ազդում է գեներացիաների և տեղափոխությունների բաշխման վրա միայն բեռնաթափման դեպքում:

THE CONSIDERATION OF CHANGE OF ELASTIC PROPERTIES DURING PLASTIC STRAIN OF MATERIAL

G. E. GOHSSTEIN

S u m m a r y

This paper deals with the perfect elastic-plastic state of incompressible material taking into account the influence of plastic deformation on its elastic characteristics. The linearization of basic equations was carried out in accordance with the R. Mises criterion of plasticity. An approximate analytic solution was found for the cylindrical tube of the above mentioned material both under the internal pressure load and in relieved state. It has been shown that the change of the elastic properties of the tube material influences the distribution of strain and displacement only in the relieved state.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков А. М. Некоторые особенности кривой нейтрального нагружения.—Изв. АН СССР, ОТИ, 1958, № 8.
2. Жиков А. М. Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение.—Инженерный сб., 1960, т. 30.
3. Соколоцкий В. В. Теория пластичности. М.: «Высшая школа», 1969.
4. Клошников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
5. Ильющин А. А. О постулате пластичности.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
6. Ильющин А. А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести.—ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
7. Полев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругоупругоупругого тела. М.: «Наука», 1978.

Всесоюзный заочный политехнический институт

Поступила в редакцию
1.IX.1982