

УДК 624.072.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ.
 НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
 СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

ГРИГОРЯН Н. Б.

1. Рассмотрим устойчивость трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной по всей длине следящей силой интенсивностью q .

Задача об устойчивости однородного стержня, шарнирно опертого по концам и нагруженного равномерно распределенной следящей силой, впервые была поставлена Пфлюгером [1]. С помощью метода Бубнова им было определено значение критической силы $q_{кр} = 18,96 EJ/L^2$, где EJ — жесткость стержня на изгиб, L — его длина.

Устойчивость однородного консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной следящей силой, впервые исследована Лейпхольцом в 1962 году [2]. Лейпхольцом и Маданом [3] получено точное значение критической силы $q_{кр} = 40,05 EJ/L^2$.

Значения критических сил однородного стержня при пяти случаях закрепления концов и для пяти законов распределения следящей нагрузки приведены в работе [4].

2. В общем случае рассмотренный стержень является неконсервативной системой флаттерного типа. Устойчивость таких систем исследуется динамическим методом [5]. Используя теорию трехслойных стержней Григорюка—Чулкова [6], уравнение малых поперечных колебаний трехслойного стержня получено в [7]

$$X^{VI} - \left[\frac{1}{\theta k} - \frac{x^2}{\theta} (1-x) \right] X^{IV} - \left[\frac{x^2}{\theta k} (1-x) + \frac{\omega^2}{\theta} \right] X'' + \frac{\omega^2}{\theta k} X = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $k = h^2 \beta L^2$ — безразмерный параметр, характеризующий сдвиговую жесткость заполнителя трехслойного стержня;

$x^2 = qL^2/D$ — безразмерная сжимающая сила;

$\omega^2 = \omega^2 L^4 \rho F/D$ — безразмерная частота колебаний;

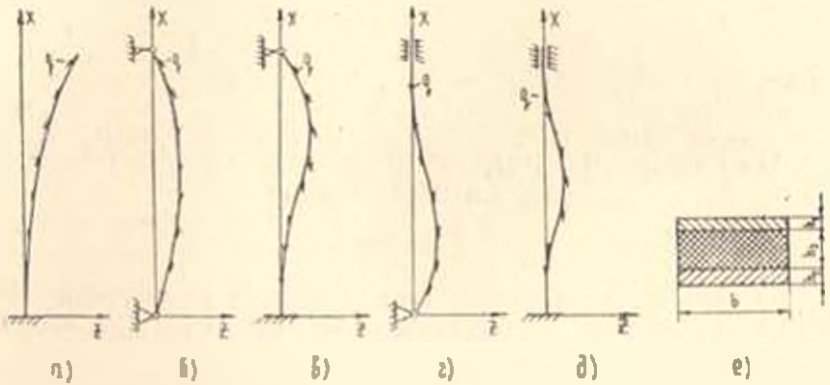
$X = \chi(x)/L$ — безразмерная функция перемещений;

θ — безразмерный параметр, характеризующий изгибную жесткость несущих слоев трехслойного стержня [6];

L, h, D — соответственно длина трехслойного стержня, высота трехслойного пакета и изгибная жесткость трехслойного стержня. Параметры β, ρ, χ представляют сдвиговую жесткость заполнителя, осредненную плотность материала трехслойного пакета и функцию перемещений [6].

3. Рассмотрим следующие варианты граничных условий:

I. Один конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а другой—свободен (фиг. 1а).



Фиг. 1.

Согласно [6] имеем

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \text{ при } x=0 \\ X'' = X^{IV} = X'' - \theta kX^V = 0 \text{ при } x=1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

II. Один конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а на свободном конце имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1а). В этом случае

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \text{ при } x=0 \\ X'' = X^V = X'' - \theta kX^{IV} = 0 \text{ при } x=1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

III. Оба конца трехслойного стержня шарнирно оперты и на нижнем конце имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1б). То есть

$$\begin{aligned} X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \text{ при } x=0 \\ X = X'' = X^{IV} = 0 \text{ при } x=1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

IV. Оба конца трехслойного стержня шарнирно оперты и на обоих концах имеются абсолютно жесткие на сдвиг диафрагмы (фиг. 1б).

$$X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \text{ при } x=0 \text{ и при } x=1 \quad (3.4)$$

V. Нижний конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а верхний конец шарнирно оперт (фиг. 1в).

$$\begin{aligned} X' - X''' = X - kX'' = 0 \text{ при } x=0 \\ X = X'' = X^{IV} = 0 \text{ при } x=1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

VI. Нижний конец трехслойного стержня жестко зашпемлен, а верхний конец шарнирно оперт, и имеется абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма (фиг. 1в).

$$X - kX'' - X' = X''' = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=1 \quad (3.6)$$

VII. Нижний конец трехслойного стержня шарнирно оперт, а верхний конец жестко зашпемлен. На обоих концах имеются абсолютно жесткие на сдвиг диафрагмы (фиг. 1г).

$$X - kX'' = X'' - \theta kX^{IV} = X''' = 0 \quad \text{при } x=0$$

$$X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=1 \quad (3.7)$$

VIII. Оба конца трехслойного стержня жестко зашпемлены (фиг. 1д).

$$X' = X''' = X - kX'' = 0 \quad \text{при } x=0 \quad \text{и при } x=1 \quad (3.8)$$

4. Трехслойный стержень с граничными условиями (3.1) и (3.2) является неконсервативной системой флаттерного типа. Устойчивость такого стержня исследована динамическим методом в работе [7].

При граничных условиях (3.3) — (3.8) трехслойный стержень представляет неконсервативную систему дивергентного типа. Устойчивость таких систем можно исследовать статическим методом. Уравнение устойчивости таких стержней получим, если в (2.1) подставить $\omega = 0$

$$X^{VI} - \left[\frac{1}{\theta k} - \frac{x^2}{\theta} (1-x) \right] X^{IV} - \frac{x^2(1-x)}{\theta k} X'' = 0 \quad (4.1)$$

Решение этого дифференциального уравнения с переменными коэффициентами можно представить в виде бесконечного степенного ряда

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \quad (4.2)$$

Подставляя ряд (4.2) и его производные в уравнение (4.1), получим рекуррентное соотношение для определения A_n

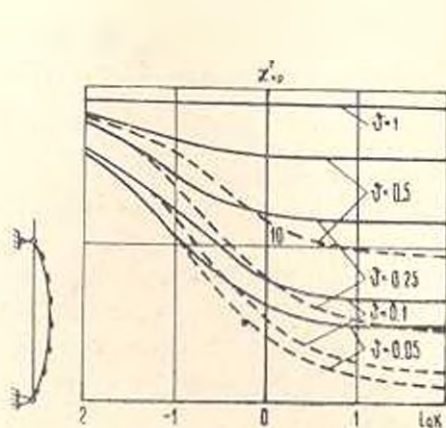
$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\theta k} [(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2} - kx^2(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)A_{n-3} + x^2(n-5)(n-6)A_{n-3}] \quad (4.3)$$

С помощью этой формулы все постоянные A_n , начиная с A_0 , выразим через первые шесть постоянных A_0, A_1, \dots, A_5 и подставим в (4.2). Тогда в выражении X (4.2) останутся лишь шесть неизвестных постоянных A_0, A_1, \dots, A_5 . Подставляя полученное выражение X в граничные условия (3.3) — (3.8), получим системы из шести алгебраических линейных однородных уравнений относительно A_0, A_1, \dots, A_5 . Для существования нетривиального решения этих систем уравнений необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Из этого условия получим детерминантное уравнение

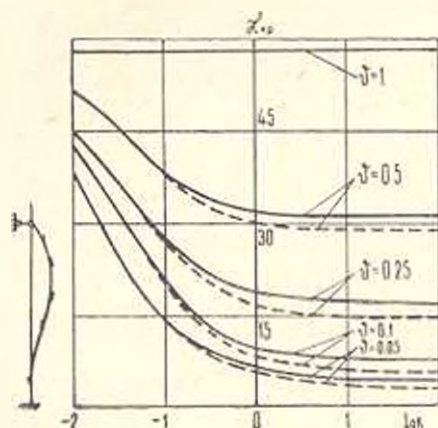
$$\Delta(x^2) = 0 \quad (4.4)$$

Разработан алгоритм, который позволяет численно определить значение критической силы при различных значениях жесткостных параметров θ и k для всех граничных условий.

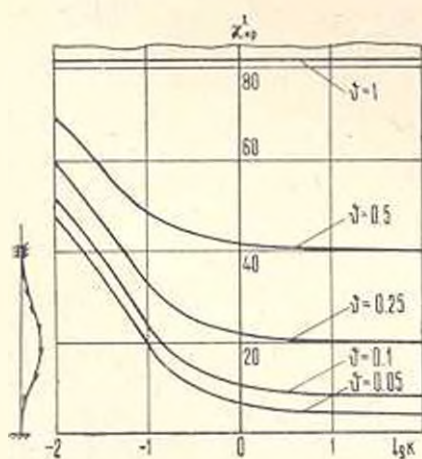
5. Проведены расчеты на ЭВМ и определены значения первых критических сил для последних шести вариантов граничных условий. На фиг. 2—5 представлены графики зависимостей величины критических сил от значений сдвиговой жесткости заполнителя для граничных условий III—VIII при различных значениях изгибной жесткости несущих слоев δ . На фиг. 2 и 3 штриховые линии соответствуют граничным условиям III и V, а сплошные линии—граничным условиям IV и VI.



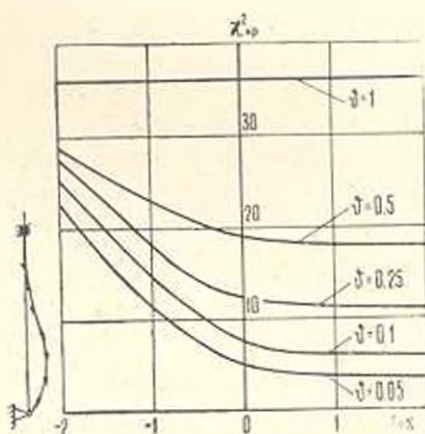
Фиг. 2. Граничные условия III и IV



Фиг. 3. Граничные условия V и VI



Фиг. 4. Граничные условия VII



Фиг. 5. Граничные условия VIII

При $\delta = 1$ величина критической силы не зависит от сдвиговой жесткости заполнителя k и полностью совпадает со значением критической силы однородного стержня. Когда жесткость заполнителя на сдвиг увеличивается, то во всех случаях закрепления концов трехслойного стержня значения критических сил возрастают и стремятся к величине критической силы соответствующего однородного стержня. Отметим также, что абсолютно жесткая на сдвиг диафрагма на обоих концах трехслойного стержня (граничные условия IV) имеет сильное стабили-

зирующее влияние лишь при больших k . Так, например, когда $\theta = 0,5$ и $k = 100$, критическая сила при граничных условиях IV получается на 63,8 % больше, чем при граничных условиях III. А при $\theta = 0,5$ и $k = 0,01$ разница составляет всего лишь 0,1 %.

У трехслойных конструкций, применяемых в практике, всегда $\theta \leq 0,1$. Причем, чем меньше θ , тем рациональнее построена эта конструкция, поскольку при этом обеспечивается легкость конструкции. Когда же $\theta \geq 0,25$, конструкция может трактоваться как двухслойная. Например, при $\theta = 0,25$ получим двухслойный стержень симметричной структуры, а при $\theta = 0,5$ — двухслойный стержень с отношением собственных изгибных жесткостей слоев как 1:3,72. Параметр k в случае двухслойных конструкций характеризует сдвиговую жесткость клея, соединяющего два слоя друг с другом.

**ՀԱՎԱՍԱՐԱԶՍՔ ԲԱՇԽՎԱԾ շԵՏՆՎՈՂ ՌԻՃՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ
ԵՒԱՇԵՐՏ ՉՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Ն. Բ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկվում է եռաշերտ ձողի կայունությունը, որը բեռնավորված է ամբողջ երկարությամբ հավասարաչափ բաշխված տանգենցիալ հետևող սեղմող ուժով: Օգտագործված է Գրիգորյուկ-Չուկովի եռաշերտ ձողերի տեսությունը: Քննարկվում են այնպիսի եզրային պայմաններ, որոնց դեպքում եռաշերտ ձողը հանդիսանում է դիվերգենտային ոչ կոնսերվատիվ համակարգ: Այդպիսի համակարգի կայունությունը ուսումնասիրվում է ստատիկ մեթոդով:

Գնահատված են զանազան տիպի եզրային պայմանների ազդեցությունը կրիտիկական ուժի մեծության վրա: Գիտարկված են կրող շերտերի ըստ ժաման ունեցած կոշտության և լցունի ըստ սահքի ունեցած կոշտության ազդեցությունները կրիտիկական ուժի մեծության վրա: Քննարկված է երկշերտ ձողերի դեպքը:

**STABILITY OF A SANDWICH ROD LOADED WITH UNIFORMLY
DISTRIBUTED FOLLOWER FORCE.**

N. B. GRIGORIAN

S u m m a r y

The paper deals with the problem of stability of a sandwich rod loaded with uniformly distributed follower force.

The influence of proper flexible rigidities of faces and shear stiffness of the core on the divergent load is investigated.

Different boundary conditions are treated. The article also deals with a two-layer rod.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pflüger A.* Stabilitätsprobleme der Elastostatik.—Berlin (Göttingen) Heidelberg, Springer-Verlag, 1950, s. 337.
2. *Leipholtz H.* Die Knicke last des einseitig Stabes mit gleichmässig verteilter tangentialer Längsbelastung.—ZAMP, 1962, 13, № 6, s. 581—589.
3. *Leipholtz H., Madan P.* On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces.—Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 1975, 44, № 5, p. 347—357.
4. *Petersen C.* Einige weitere Lösungen nichtkonservativer Knickeprobleme.—Der Stahlbau, 1972, 41, № 7, s. 198—203.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.—М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
6. *Григорюк Э. И., Чулков П. П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.—М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
7. *Григорян Н. Б.* Устойчивость трехслойного стержня при следящей равномерно распределенной нагрузке.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 6, с. 55—61.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
24.11.1983