ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 1, 1982 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Л. А. МОВСИСЯН

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Общие вопросы распространения нелинейных волн в диспергирующих средах исследованы в [1, 2]. В работе [1] даны уравнения модуляции для произвольных волн малой амплитуды. В [1, 2] выведены условия устойчивости нелинейного волнового движения, которые формулируются как условия действительности частоты для возмущенной амплитуды и фазы квазимонохроматической волны. В [3] дается вывод нелинейного уравнения Шредингера, описывающего изменение комплексной амплитуды для возмущенного волнового движения произвольной волны в нелинейных неоднородных средах. В [4] дается конкретизация коэффициентов указанного уравнения для изгибных волн в пластинках и показано, что для металлов имеет место неустойчивость периодической волны. Линейная задача распространения волн в идеально проводящих пластинах в магнитном поле изучена в [5]. В [6] рассмотрены линейные колебания пластин с конечной проводимостью.

Обзор некоторых результатов по волнам в нелинейно-магнитоупругой среде приводится в [7].

В настоящей работе рассматриваются одномерные колебания (цилиндрический изгиб) физически нелинейно-упругих пластин из идеально проводящего материала в продольном магнитном поле (H_0, 0, 0). Для вывода дисперсионного соотношения будем рассматривать двумерную задачу в плоскости xz, где ось x направлена по недеформированной пластине, а z — перпендикулярно к ней. В силу нелинейности задачи нужно различать лагранжевы (x, z) и эйлеровы (ξ, η) координаты. Так как перемещения пластинки предполагаются малыми, а коэффициент физической нелинейности значительным, при записи уравнений движения пластинки пренебрегается геометрической нелинейностью и не делается различия между указанными координатами, в то время как для больших величин магнитного поля в уравнениях магнитной индукции соответствующие нелинейные члены удерживаются.

Уравнения движения пластинки берем в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = X(x, z, t)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = Z(x, z, t) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

где ρ — плотность материала пластинки, X, Z — компоненты массовой силы, которая в данном случае будет силой Лоренца

$$\vec{j} \times \vec{H} = (X, Z) \tag{1.2}$$

Уравнения электродинамики внутри пластины имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{1}{c}\left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}\right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \vec{j} = \sigma\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H}\right) \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{V} = \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t}$, u, w — проекции вектора перемещения $\vec{U}$ по осям x и z, $\vec{h}$ — возмущенное магнитное поле, $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$. В первом уравнении последним слагаемым для скоростей волн $\dfrac{\omega}{k} \ll c$ (c — скорость света) можно пренебречь. Тогда из (1.2) и (1.3) для $\sigma \to \infty$ можно получить уравнение индукции

$$\left.\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}\right|_{\xi, \eta} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) \tag{1.4}$$

Проектируя (1.4) на оси ξ и η, получим

$$\left.\frac{\partial h_x}{\partial t}\right|_{\xi, \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(H_0 v_z + h_x v_z - v_x h_z\right)$$

$$\left.\frac{\partial h_z}{\partial t}\right|_{\xi, \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(H_0 v_z + h_x v_z - v_x h_z\right) \tag{1.5}$$

где h_x, h_z, v_x, v_z — проекции векторов $\vec{h}$ и $\vec{V}$ на оси ξ, η (x, z), связанные с недеформированной пластиной.

Переходя от ξ, η к x, z ($\xi = x + u$, $\eta = z + w$) по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \Delta = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial f}{\partial z}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right] \tag{1.6}$$

где учтено, что согласно классической теории можно считать

$$w = w(x, t), \quad u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.7}$$

с точностью до малых третьего порядка получим уравнение в переменных Лагранжа

$$\left.\frac{\partial h_x}{\partial t}\right|_{x, z} = -H_0 \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} +$$

$$
+ v_z\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_x}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + v_x\left[\frac{\partial h_x}{\partial x}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial h_x}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right]
$$

$$
\left.\frac{\partial h_z}{\partial t}\right|_{x,\,z} = H_0\frac{\partial v_z}{\partial x}\left[1-\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \tag{1.8}
$$

$$
+ \frac{\partial F}{\partial x}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + v_z\left(\frac{\partial h_z}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) +
$$

$$
+ v_x\left[\frac{\partial h_z}{\partial x}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial h_z}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right]
$$

где $F = h_x v_z - h_z v_x$.

Задаем прогиб пластинки в виде монохроматической волны

$$
w = a\cos\theta,\ \theta = \omega t - kx \tag{1.9}
$$

Используя (1.7), (1.9) и отыскивая решение (1.8) до третьего порядка малости включительно в виде

$$
h_x = h_x^{(0)} + h_x^{(1)} + h_x^{(2)},\ h_z = h_z^{(0)} + h_z^{(1)} + h_z^{(2)} \tag{1.10}
$$

получим

$$
h_x^{(0)} = 0, \quad h_z^{(0)} = H_0 ak\sin\theta
$$

$$
h_x^{(1)} = \frac{1}{2}H_0 a^2k^2\cos 2\theta,\ h_z^{(1)} = -\frac{z}{2}H_0 a^2k^3\sin 2\theta \tag{1.11}
$$

$$
h_x^{(2)} = -zH_0a^3k^4(\cos\theta - \cos^3\theta),\ h_z^{(2)} = -\frac{1}{2}H_0a^3k^3\sin\theta\cos 2\theta
$$

Из (1.1) обычным образом получается уравнение изгибных колебаний пластин с учетом силы Лоренца [6]

$$
\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\int_{-h}^{h}\left(Z + z\frac{\partial X}{\partial x}\right)dz -
$$

$$
- h\frac{\partial}{\partial x}(\tau^+ + \tau^-) - (\sigma_z^+ - \sigma_z^-), \quad M = \int_{-h}^{h}\sigma_x\, z\,dz \tag{1.12}
$$

Для определения напряжений $\sigma_z^{\pm}$, $\tau^{\pm}$ на поверхностях $z = \pm h$ должны быть использованы условия непрерывности компонент суммарного тензора напряжений и h_z при $z = \pm h$ на границе пластины с диэлектриком.

Вне пластины, пренебрегая током смещения, можно полагать

$$
\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{h}_z}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{h}_z}{\partial \eta} = 0 \tag{1.13}
$$

При этом в окончательных формулах можно отбросить члены с множителем h, что соответствует отбрасыванию членов порядка ha и ha^2 соответственно в линейном и нелинейном слагаемых в дисперсионном соотношении.

Записывая (1.13) в переменных (x, z)

$$\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial \bar{h}_z}{\partial x}+\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial x}-\frac{\partial \bar{h}_z}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial \bar{h}_z}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial \bar{h}_x}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{1.14}$$

ищем решение также в виде (1.10). В указанных порядках получим

$$\bar{h}_z^{\pm}=\pm C e^{\mp kz}\cos\theta+\left[\pm C_1 e^{\mp 2kz}-\frac{1}{10}Cak(1\mp kz)e^{\mp kz}\right]\cos 2\theta-$$

$$-\frac{1}{2}Cak\,e^{\mp kz}(1\pm kz)+\left[(A_1+A_2z)e^{\mp 2kz}+z(B_1+B_2z+B_3z^2)e^{\mp kz}\right]\cos\theta$$

$$\tag{1.15}$$

$$\bar{h}_x^{\pm}=C e^{\mp kz}\sin\theta+\left[C_1 e^{\mp 2kz}+\frac{1}{10}Cak(3kz\mp 1)e^{\mp kz}\right]\sin 2\theta-$$

$$-\frac{1}{k}\{[A_2(1\mp 2kz)\mp 2A_1k]\,e^{\mp 2kz}+[B_1+z(2B_2\mp kB_1)+z^2(3B_3\mp$$

$$\mp kB_2)\mp B_3kz^3]\,e^{\mp kz}\}\sin\theta$$

$$A_1=-C_1ak,\quad A_2=\pm C_1ak^2$$

$$B_1=\frac{C}{4}a^2k^2,\quad B_2=\pm\frac{3}{40}Ca^2k^4,\quad B_3=\mp\frac{1}{20}Ca^2k^5$$

Приравнивая $\bar{h}^{-}$ значению h_z из (1.10)—(1.11) при $z=\pm h$, можно получить

$$C=H_0ak\left(1+\frac{1}{10}a^2k^2\right),\quad C_1=\pm\frac{H_0}{10}a^2k^2 \tag{1.16}$$

на основании чего $\bar{h}_z^{\pm}$ при $z=\pm h$ из (1.15) будет (с точностью до членов $\sim h$)

$$\bar{h}_z^{\pm}=H_0ak\cos\theta-\frac{H_0}{2}a^2k^2 \tag{1.17}$$

На поверхностях пластины $z=\pm h$ условие непрерывности компоненты тензора полных напряжений имеет вид

$$\sigma_z^{\pm}+\Pi_z^{\pm}=\bar{\Pi}_z^{\pm} \tag{1.18}$$

здесь

$$\Pi_z=\frac{1}{8\pi}h_z^2-\frac{1}{8\pi}(H_0+h_z)^2$$

есть компонента тензора максвелловских напряжений.

В силу непрерывности h_x получится

$$\sigma_z^{\pm}=\frac{H_0}{4\pi}(h_z^{\pm}-\bar{h}_z^{\pm})+\frac{1}{8\pi}\left[(h_z^{\pm})^2-(\bar{h}_z^{\pm})^2\right] \tag{1.19}$$

С учетом (1.11) и (1.17) получим

$$\sigma_z^+ - \sigma_z^- = -\frac{H_0^2}{2\pi} ak \left(1 - \frac{1}{2} a^2 k^2\right) \cos\theta \tag{1.20}$$

Следует отметить, что предположение малости kh несколько сужívает рассмотрение вопроса, не описывая процессы с коротковолновой асимптотикой (по аналогии с явлением заострения гребней в волнах на воде, которые не описываются длинноволновой теорией [1]). Вместе с тем для достаточно малых h указанное предположение позволяет описать все типичные задачи распространения волн модуляции в пластинах.

Согласно [8], напряжение σ_x, записанное во втором порядке, будет

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x \left| 1 + \frac{16}{27} \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3} \gamma_2 \varepsilon_x^2 \right|, \quad \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

откуда

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left| 1 + D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \right|$$

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}, \quad D_1 = \frac{16}{45} \gamma_2 h^2 \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^3} \tag{1.21}$$

Подставляя (1.9), (1.20) и (1.21) в (1.12), умножая на $\cos\theta$ и осредняя по θ от 0 до 2π, получим нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{2\rho h} \left(\frac{3}{4} DD_1 k^6 - \frac{1}{4\pi} H_0^2 k\right) a^2 k^2$$

$$\omega_0^2 = D \frac{k^4}{2\rho h} + \frac{1}{4\pi\rho h} H_0^2 k \tag{1.22}$$

Согласно [3] условие продольной устойчивости нелинейных волн в адиабатическом приближении имеет вид [1]

$$\left(\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right) > 0 \tag{1.23}$$

Как видно из (1.22)

$$\frac{\partial\omega}{\partial a^2} = \frac{1}{4\pi\rho\omega_0} \left(\frac{3}{4} DD_1 k^8 - \frac{H_0^2}{4\pi} k^3\right) \quad \text{и} \tag{1.24}$$

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2} \lessgtr 0 \ \text{при} \ \frac{H_0^2}{4\pi} \gtrless Dk^3 (4 \pm 3\sqrt{2}) \tag{1.25}$$

Для металлов [8] $\gamma_2 < 0$ и по (1.24) $\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2} < 0$. Тогда для верхних знаков (1.25) согласно (1.23) имеется неустойчивость периодических волн, в то время как для сильных магнитных полей волны устойчивы в продольном направлении. Если же считать $\gamma_2 > 0$ (для сред типа жидкости), то возможны следующие варианты:

а) случай $3 DD_1 \pi k^5 < H_0^2$ $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2} < 0\right)$; совпадает с предыдущим;

б) случай $3DD_1\pi k^6 > H_0^2 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial a^2} > 0\right)$: для верхнего знака в (1.25) имеет место устойчивость, а для нижнего знака, то есть для больших магнитных полей—неустойчивость нелинейного волнового движения.

Можно также для неустойчивого случая расширить область устойчивости в следующем за адиабатическим приближении [4].

Для проверки точности полученного решения, то есть соотношения (1.7), на котором оно основано, запишем первое уравнение (1.1) в приближенном виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} h_z \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \tag{1.26}$$

где отброшено слагаемое $\frac{\partial \tau_x}{\partial x}$, которое дает вклад z^2 в u. Поскольку в уравнениях индукции u входит в виде квадратичных и кубических членов, достаточно в правую часть (1.26) подставить линейное решение.

Тогда получится

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + z^2 \frac{H_0^2}{16\pi G} a^2 k^3 \sin 2\theta \tag{1.27}$$

Учитывая в уравнениях (1.8) добавочный член из (1.27), получим (1.11), где лишь к $h_x^{(2)}$ и $h_z^{(2)}$ добавляются слагаемые соответственно $\frac{H_0^2 a^2 k^4}{16\pi G} z \cos \theta$ и $-\frac{H_0^2 a^2 k^3}{16\pi G} z^2 \sin \theta$. Подобным же образом видоизменяются решения (1.15), к которым соответственно добавляется

$$\tilde{h}_x^{\pm} = \pm \frac{C}{16\pi G} H_0^2 a^2 k^4 e^{\mp kz} \frac{1}{2} z^2 \cos \theta$$

$$\tilde{h}_z^{\pm} = -\frac{C}{16\pi G} H_0^2 a^2 k^4 e^{\mp kz} \frac{1}{2} z^2 \sin \theta \tag{1.28}$$

Поскольку при определении (1.22) члены, содержащие множитель h, отброшены, видно, что (1.28) не влияет на окончательные результаты.

Таким образом, в рассматриваемых порядках (для малых kh) классическая теория изгиба, даваемая (1.7), дает те же результаты, что и уточненная теория.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 14 XII 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են ֆիզիկորեն ոչ գծային առաձգական իդեալական հաղորդիչ նյութից սալի միջակ ծռման տիպի տատանումները երկայնական մագ-

նիտային դաշտում։ Ընդունվում են սալերի դասական տեսության ենթադրությունները և խնդիրը լուծվում է Լագրանժյան կոորդինատներում։ Այդ կոորդինատներով գրվում են սալի մագնիսաառաձգականության հավասարումները և Մաքսվելի հավասարումները դիէլեկտրիկի համար։ Ստացված ոչ գծային դիսպերսիոն արտահայտությունը ցույց է տալիս, որ ուժեղ մագնիսական դաշտը տիպիկ ոչ գծային առաձգական սալերի համար բերում է ոչ գծային տատանումների կայունության (ոչ կայունության մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում)— և ոչ կայունության հեղուկի տիպի (ոչ գծային հատկությունների տեսակետից) սալերի համար։

THE NONLINEAR VIBRATIONS OF PLATES IN LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

One-dimensional bending vibrations of a physically nonlinear elastic plate made out of an ideal conducting material in a longitudinal magnetic field are considered. The assumptions of classical theory of plates are accepted and the problem is solved in Lagrangian coordinates in which the equations of magnetoelasticity for plate and Maxwell's equations for dielectric are written. The obtained nonlinear dispersive relation shows that the strong magnetic field brings about stability of nonlinear vibrations of plates with typical nonlinear elastic characteristics (which are unstable in the absence of a magnetic field) and unstability of fluid-like (with respect to nonlinear properties) plates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 6.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения изгибных волн в нелинейно-упругих пластинках. Изв. АН АрмССР, Механика, 1979, т. 32, № 5.
5. *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections. Proc. Vibrat. Problems, 1962, vol. 3, № 4.
6. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
7. *Селезов И. Т.* Распространение нелинейных магнитоупругих и магнитоакустических волн. Нелинейные волны деформации, т. 10, Таллин, 1977.
8. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.