

Р. М. КИՐԱԿՕՅԱՆ

## О ВЕРХНИХ ОЦЕНКАХ ПРОГИБОВ И НАПРЯЖЕНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается способ определения верхних оценок для максимальных прогибов и напряжений упруго-пластических конструкций, основанный на использовании упругих решений соответствующих краевых задач. Способ иллюстрируется на примере гибкой пластинки при линейном упрочнении материала.

Переходя к обобщенным величинам, что позволяет освободиться от влияния неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине, получены более точные верхние оценки при поперечном изгибе. На основе этих оценок получается единая нижняя оценка для несущей способности произвольных идеально-пластических пластин.

Приводятся примеры сравнения с точными решениями.

1. Рассмотрим некоторую конструкцию из линейно упрочняющегося материала. Связь между интенсивностями касательных напряжений  $\sigma_i$  и деформаций сдвигов  $\varepsilon_i$  примем в виде [1]

$$\sigma_i = E\lambda_i [1 - \omega(\varepsilon_i)], \quad 0 < \omega < 1 \quad (1.1)$$

где

$$\omega = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_s \\ \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i > \varepsilon_s \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \text{const}$$

$E$  — модуль Юнга,  $\varepsilon_s$  — предел упругих деформаций,  $0 \leq \lambda \leq 1$  — коэффициент упрочнения материала.

Известно [1], что упруго-пластически деформированное тело можно рассматривать как некоторое приведенное упругое тело с неоднородным модулем упругости  $E_{np}$ . В случае линейного упрочнения и отсутствия разгрузки

$$E_{np} = \begin{cases} E, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_s \\ E \left(1 - \lambda + \frac{\lambda \varepsilon_s}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_i \geq \varepsilon_s \end{cases} \quad (1.3)$$

За пределами упругости с возрастанием интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  модуль приведенного материала  $E_{np}$  монотонно убывает. Следовательно, наименьшее значение  $E_{np}^{min}$  получится в той точке конструкции, где  $\nu$  принимает наибольшее значение, то есть

$$E_{np}^{min} = E \left( 1 - \lambda + \frac{\lambda \varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}} \right) \quad (1.4)$$

Так как

$$E_{np}^{min} > E(1 - \lambda) \quad (1.5)$$

то, полагая

$$E_{np}(0) = E(1 - \lambda) \quad (1.6)$$

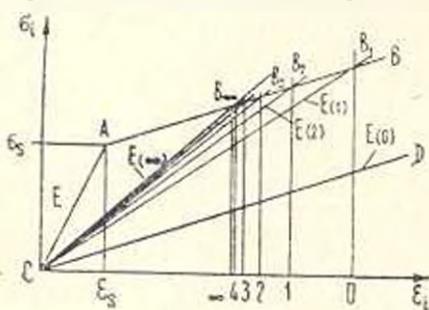
и решая задачу упругого деформирования рассмотренной конструкции при заданных нагрузках и граничных условиях, получим завышенные значения для деформаций. Максимальное значение интенсивности деформаций обозначим через  $\varepsilon_i^{max}(0)$ . Соответствующее значение интенсивности напряжений, подсчитанное по действительной зависимости

$$\sigma_i^{max}(0) = \sigma_i^{max}(0) \left[ 1 - \lambda + \frac{\lambda \varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(0)} \right] \quad (1.7)$$

будет превышать действительное максимальное значение. Таким образом, получены верхние оценки для интенсивностей деформаций и напряжений и нижняя оценка для приведенного модуля

$$\varepsilon_i^{max}(0) > \varepsilon_i, \quad \sigma_i^{max}(0) > \sigma_i, \quad E_{np}^{min}(0) < E_{np} \quad (1.8)$$

Эти оценки очень грубы и не могут представлять практического интереса. Принимая их в качестве нулевого приближения, последующие приближения построим по рекуррентным формулам



Фиг. 1.

построим по рекуррентным формулам

$$E_{np}^{min}(n) = \frac{\sigma_i^{max}(n-1)}{\varepsilon_i^{max}(n-1)} \quad (1.9)$$

$$\sigma_i^{max}(n-1) =$$

$$= E \varepsilon_i^{max}(n-1) \left[ 1 - \lambda + \frac{\lambda \varepsilon_s}{\varepsilon_i^{max}(n-1)} \right]$$

где  $\varepsilon_i^{max}(n-1)$  получается решением упругой задачи при  $E_{np} = E_{np}^{min}(n-1)$ .

Смысл этого рекуррентного процесса можно наглядно представить графически (фиг. 1). На оси  $\varepsilon_i$  числами 0, 1, 2, ...,  $\infty$  обозначены значения соответствующих приближений максимальной интенсивности деформаций

$\varepsilon_1^{\max}(n)$ . Причем, нулевое приближение  $\varepsilon_1^{\max}(0)$  получается из упругого решения задачи, когда связь между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon$  дается линией  $CD$ , параллельной линии  $AB(E^{\max}(0) = E(1-\nu))$ . Имея нулевое приближение  $\varepsilon_1^{\max}(0)$  по действительной диаграмме  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon$  (ломаная  $CAB$ ) определяется нулевое приближение максимального значения интенсивности напряжения  $\sigma_1^{\max}(0)$  — отрезок  $OB_1$ . Соединяя точку  $B_1$  с началом координат  $C$ , находим первое приближение приведенного модуля  $E^{\max}(1) = OB_1/CO$ . Далее, решая упругую задачу по диаграмме  $CB_1$ , определяем первое приближение максимального значения интенсивности деформаций  $\varepsilon_1^{\max}(1)$ . Оно изображено цифрой „1“ на оси  $\varepsilon_1$ . Первое приближение  $\sigma_1^{\max}(1)$  получается путем пересечения с действительной диаграммой  $CAB$  линии  $1B_1$ , параллельной оси  $\varepsilon_1$ . Аналогично строятся и последующие приближения. Так как последовательность минимальных значений модуля  $E^{\max}(n)$  монотонно растет и ограничена сверху значением действительного модуля Юнга материала  $E$ , то она сходится. Предельное значение  $E^{\max}(\infty) = E^*$  характеризуется тем, что для него максимальные значения интенсивности напряжений  $\sigma_1^{\max}(\infty) = \sigma_1^*$  подсчитанные по приведенной диаграмме  $CB_1$  и по действительной диаграмме  $CAB$ , совпадают. На основе этого обстоятельства, значение  $E^*$  можно определить непосредственно, не связываясь с описанным выше процессом последовательных приближений. Пусть решена задача упругого деформирования конструкции. Далее определяется максимальная интенсивность деформаций как функция от неизвестного модуля  $\varepsilon_1^{\max}(E^*)$ . Приравняв значения интенсивности напряжений, подсчитанные для  $\varepsilon_1^{\max}(E^*)$  по соотношениям упругости с модулем  $E^*$  и по соотношениям реального упруго-пластического тела (1.1), (1.2), получим

$$E^* = E \left| 1 - \nu + \frac{\nu \varepsilon_1^{\max}(E^*)}{\varepsilon_1^{\max}(E^*)} \right| \quad (1.10)$$

Это и есть уравнение для определения  $E^*$ . Максимальное значение деформаций (перемещений) и напряжений упругой конструкции с однородным модулем  $E^*$  будет служить в качестве верхних оценок для действительных значений соответствующих величин реальной упруго-пластической конструкции.

Разумеется, что эти оценки намного лучше исходных (1.8). При однородном напряженно-деформированном состоянии, а также при отсутствии пластических свойств материала ( $\lambda = 0$ ) эти оценки совпадают с точными значениями. По мере возрастания неоднородности напряженно-деформированного состояния и возрастания пластических свойств материала расхождение между оценками и точными значениями соответствующих величин увеличивается. Предлагаемые оценки могут быть успешно использованы особенно для конструкций типа гибких пластин и оболочек, неод-

нородность напряженно-деформированного состояния которых из-за мембранных усилий мала.

Важно заметить, что с ростом пластических деформаций материал приближается к несжимаемому и его коэффициент поперечной деформации стремится к половине. Предлагаемые оценки получены в предположении о неизменности коэффициента Пуассона. Это приводит к искусственному уменьшению жесткости конструкции, а следовательно, и к завышению деформаций. Оценки от этого становятся несколько грубыми.

2. В качестве иллюстрации предлагаемого способа нахождения верхних оценок рассмотрим задачу круглой гибкой пластинки, деформируемой под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Для простоты будем пользоваться аппроксимирующими выражениями гочных формул максимальных значений прогибов и напряжений упругой пластинки [2]

$$x + Ax^2 = Bq^*, \quad \varepsilon_r^* = x(\beta + \alpha x) \quad (2.1)$$

где  $\alpha, \beta, A, B$  — табличные постоянные,

$$x = \frac{w_c}{h}, \quad q^* = \frac{qa^4}{Eh^3}, \quad \varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon_r^{\max} a^2}{Eh^2} \quad (2.2)$$

$w_c$  — прогиб в центре,  $h$  — толщина,  $a$  — радиус,  $E$  — модуль Юнга материала,  $q$  — интенсивность поверхностной нагрузки пластинки.

Имея в виду (1.10) и (2.1), получим

$$m = \frac{E}{E^*} = \begin{cases} 1, & x \leq x_c \\ \frac{x(\beta + \alpha x)}{\lambda\mu + (1-\lambda)x(\beta + \alpha x)}, & x > x_c \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_r^{\max} = \begin{cases} x(\beta + \alpha x), & x \leq x_c \\ \frac{\lambda\mu}{1 - m(1-\lambda)}, & x > x_c \end{cases}$$

$$x_c = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\lambda\mu}}{2\alpha}, \quad q = \frac{x + Ax^2}{Bm}, \quad \varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon_r^{\max} a^2}{h^2}$$

где  $x_c$  — предел упругих прогибов пластинки в центре. Соотношения (2.3) определяют зависимости между верхними оценками максимального прогиба  $x$ , максимальной интенсивности напряжений пластинки  $\varepsilon_r^{\max}$  от нагрузки  $q$ .

В случае жесткого заземления контура максимальное значение интенсивности напряжений  $\varepsilon_r^{\max}$  получается на крайних верхних волокнах контурных сечений пластинки. Тогда коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами

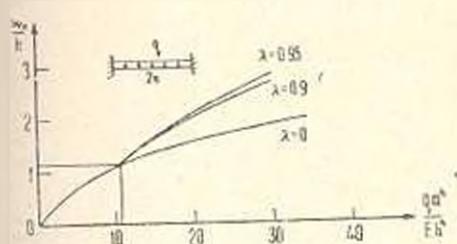
$$\alpha = \sqrt{\beta_c^2 - \beta_r \beta_t + \beta_r^2}, \quad \beta = \lambda \sqrt{\beta_r^2 - \beta_r \beta_t + \beta_t^2} \quad (2.4)$$

где  $\alpha, x_c, \beta_r, \beta_t$  относятся к контуру пластинки. На основе [2] (стр. 456,

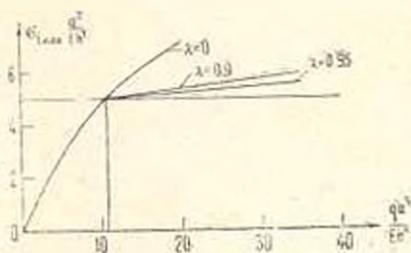
табл. 82) с учетом (2.4) при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  находим

$$\alpha = 0.423, \quad \beta = 3.911, \quad A = 0.471, \quad B = 0.171 \quad (2.5)$$

На фиг. 2 и 3 приведены графики зависимости верхних оценок от нагрузки для рассмотренного случая при трех значениях  $\lambda$ . Качественно аналогичными получаются эти графики и для остальных способов опирания пластинки.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. Как отмечалось выше, предлагаемые оценки становятся грубыми при поперечном изгибе, особенно когда материал пластинки стремится к идеально пластическому. Ниже, путем перехода к обобщенным величинам, эти оценки существенно улучшаются при отсутствии мембранных сил. Используя соотношения между изгибающими моментами и кривизнами срединной плоскости в рамках теории поперечного изгиба пластин можно записать

$$m_i = D(1 - \Omega) \kappa_i, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.1)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $m_i$  и  $\kappa_i$  — аналоги интенсивностей напряжений и деформаций:

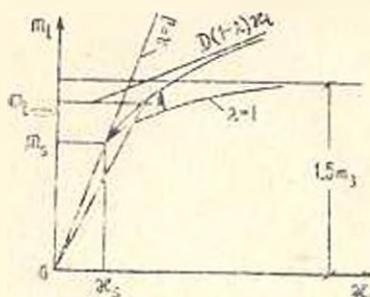
$$m_i = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_3^2}, \quad \kappa_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2} \quad (3.2)$$

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \kappa_i \leq \kappa_s = \frac{3\varepsilon_s}{2h} \\ \left(1 - \frac{9\varepsilon_s}{4h\kappa_i} - \frac{27\varepsilon_s^2}{16h^2\kappa_i^2}\right), & \kappa_i > \kappa_s \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь через  $\kappa_s$  обозначено значение интенсивности кривизны пластинки, после достижения которого появляются остаточные деформации. На фиг. 4 представлен график зависимости (3.1) для линейно упрочняющегося материала. В пределах упругости ( $\kappa_i < \kappa_s$ ) этот график является прямой линией с угловым коэффициентом  $D$ . Моменту появления пластических деформаций соответствуют значения  $m_i$  и  $\kappa_i$ , которые служат аналогами пределов упругости  $\sigma$  и  $\varepsilon_s$ . С развитием областей пластических деформаций график  $m_i \sim \kappa_i$  отклоняется от прямой линии, непрерывно на-

клоняясь в сторону оси  $x_1$ . График имеет асимптоту с угловым коэффициентом  $(1-\lambda)D$ . При идеально-пластическом материале  $\lambda = 1$  и асимптота становится параллельной оси  $x_1$ . Предельное значение интенсивности моментов  $m_{пр}$ , которое характеризует несущую способность сечения, оказывается в полтора раза больше предела упругости  $m_0$ .

Поступая так, как в пункте 1, для нахождения нижней оценки приведенной жесткости упруго-пластически деформированной пластинки  $D^*$  получим следующее уравнение:



Фиг. 4.

$$D^* = D \left\{ 1 - \lambda \left[ 1 - \frac{9z_0}{4h^2(z_0^*(D^*))} + \frac{27z_0^3}{16h^3(z_0^*(D^*))^3} \right] \right\} \quad (3.4)$$

где  $z_0^*(D^*)$  — наибольшее значение интенсивности кривизн упругой пластинки при данных нагрузках и граничных условиях, определенное как функция от неизвестной жесткости  $D^*$ . Максимальные значения прогиба и напряжений упругой пластинки с однородной жесткостью  $D^*$  будут служить в качестве верхних оценок этих величин. Они не зависят от неоднородности напряженно-деформированного состояния по толщине и могут быть полезными в случае поперечного изгиба пластин.

Так как в теории поперечного изгиба однородных упругих пластин как изгибающие моменты, так и их интенсивность  $m_1$  не зависят от жесткости пластинки, то нижнюю оценку минимальной жесткости  $D^*$  можно определить и следующим образом. Из упругого решения задачи определяется максимальное значение интенсивности моментов  $m_1^{max}$ , откладывается это значение вдоль оси  $m_1$  и проводится линия, параллельная оси  $x_1$  до пересечения с действительной диаграммой  $m_1 \sim x_1$  упруго-пластической пластинки в точке  $A$  (фиг. 4). Угловым коэффициентом линии  $OA$  будет равняться искомому значению нижней оценки минимальной жесткости  $D^*$ .

Тот факт, что для однородных упругих пластин интенсивность изгибающих моментов прямо пропорциональна параметру нагрузки  $q$ , показывает, что несущая способность произвольной идеально пластической пластинки ограничена снизу единственным неравенством

$$q_{пр} > \frac{3}{2} q_0 \quad (3.5)$$

где  $q_0$  — то значение параметра нагрузки, при котором в какой-то точке (или точках) пластинки впервые достигается предел упругости материала. Например, в случае круглой защемленной по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой,  $q_{пр} = 1.828 q_0$  [3] и нижняя оценка несущей способности (3.5) отличается от точной не более 18%.

Рассмотрим задачу определения верхней оценки для максимального прогиба шарнирно опертой по контуру круглой пластинки, изгибаемой под действием равномерно распределенной нагрузки. В случае значения параметра  $\bar{\lambda} = 0.95$  и несжимаемости материала уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{D^*}{D} = \begin{cases} 1, \bar{q} = \frac{qha^2}{2\bar{\epsilon}_s D} \leq \bar{q}_*, = 3.429 \\ 0.05 + 4.886 \frac{1}{q} - 19.144 \frac{1}{q^2}, \bar{q} > \bar{q}_* \end{cases} \quad (3.6)$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты некоторых расчетов, выполненных с помощью (3.6). В последней строке приведены отношения верхних оценок  $w^{*oa}$  максимальных прогибов упруго-пластической пластинки к максимальным прогибам упругой пластинки  $w^*$ . Из точного решения задачи упруго-пластического изгиба, когда в центре пластинки пластическая зона деформаций достигает половины толщины, имеем ([1], стр. 222)

Таблица 1

$\bar{q}$	3.429	4	5	6	7	8
$D^*/D$	1	0.972	0.874	0.776	0.692	0.623
$\frac{w^{*oa}}{w^*} = \frac{D}{D^*}$	1	1.029	1.144	1.289	1.445	1.604

$$\bar{q} = 5, \quad \frac{w^{*oa}}{w^*} = \frac{5.322}{0.286} = 1.126 \quad (3.7)$$

В данном случае верхняя оценка максимального прогиба  $\frac{w^{*oa}}{w^*} = 1.144$  отличается от точного значения (3.7) менее 1.6%.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 7 1 1980

И. И. ГИРЯЧАНЯН

ԱՐՄԱՋԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԿՎԱՄՔՆԵՐԻ  
ԵՎ ԼՍՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԻՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա ռ ի յ ի ն ի մ

Առաջարկվում է առաձգա-սլլաստիկական կոնստրուկցիաների մաթեմատիկական ճկվածքների և լարումների փերին գնահատականների որոշման եղանակ, որը հենված է համապատասխան եզրային խնդիրների առաձգական լուծումների

օգտագործման վրա: Եղանակը ցուցադրվում է ճկուն սալերի օրինակի վրա՝ նյութի դժային ամրապնդման դեպքում:

Անցնելով ընդհանրացված մեծությունների, որը թույլ է տալիս ազատ-վելու րստ հաստության լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի անհամասեռության աղղեցությունից, ստացվում են ավելի ճշգրիտ վերին զնահատականներ լայնական ծման դեպքում: Այդ զնահատականների հիման վրա կամայական իդիալական առաձգական սալերի համար ստացվում է կրող ունակության միասնական ստորին զնահատական:

Բերվում են ճշգրիտ լուծումների հետ համեմատության օրինակներ:

## ON THE UPPER VALUES OF FLEXURE AND STRESS IN ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES

R. M. KIRAKOSIAN

### S u m m a r y

A method to define the upper values of maximum flexure and stress in elastic-plastic structures, based on elastic solutions for corresponding boundary problems, is proposed. A flexible plate with linear hardening of the material is used to illustrate the method. A transition to generalized values, permitting to eliminate the heterogeneity of a stress-strain state across the thickness, provides more accurate upper values under cross-bending. On the basis of these values a common lower value for the carrying capacity of arbitrary perfectly-plastic plates is obtained.

Some examples of comparison with accurate solutions are presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, М., Физматгиз, 1963.
3. Ходж Ф. Пластический анализ конструкций, 1965.