ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

РАССМОТРЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ АСИМПТОТИКИ

Пусть в произвольной неоднородной диспергирующей нелинейной среде распространяется квазимонохроматическая волна $u = \psi e^{i\tau}$, где $\tau = \tau(x_k) - \omega_0 t$ есть эйконал основной немодулированной волны в линейной задаче, ψ — комплексная медленно меняющаяся малая амплитуда [1—3], t — время, x_k — пространственные координаты, $\omega = \omega_0$ — невозмущенная частота. Для получения уравнения, описывающего изменение функции $\psi(x_k, t)$ для произвольной среды, следуя [3], можно вначале рассмотреть линейную постановку задачи, в которой среда описывается уравнением

$$\Delta\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где Δ — заданный линейный операторный многочлен. Для волн высокой частоты значения $\omega_0 = -\frac{\partial\tau}{\partial t}$ и волнового вектора $\alpha_k^{(0)} = \frac{\partial\tau}{\partial x_k}$ велики, поэтому при дифференцировании $u = \psi e^{i\tau}$ основными являются слагаемые, получаемые от производных экспоненциального множителя, которые дают дисперсионное соотношение линейной задачи

$$\Delta(\omega, \alpha_k) = 0, \quad \omega = \omega_0(\alpha_k), \quad \alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2, \alpha_3, \omega)$$

При удерживании слагаемых с более низкой степенью ω при вычислении Δu применяется формула Лейбница [3] и оставляются производные до второго порядка от ψ включительно. Вместо координат x_k вводятся лучевые координаты τ, θ, ζ, где $\theta = \mathrm{const}$, $\zeta = \mathrm{const}$ дают уравнения лучей. В силу однопараметрического произвола в выборе θ, ζ можно считать линии пересечения указанных поверхностей с волной $\tau = 0$ ортогональными и отсчитывать вдоль них координаты z, y соответственно, где $dy = H_\theta d\theta$, $dz = H_\zeta d\zeta$, $H_{\theta,\zeta}$ — параметры Ламе. Тогда можно записать для ψ линейное уравнение [3]. Для получения соответствующего нелинейного уравнения следует знать нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega_0(\alpha_k) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2, \quad a = |\psi| \tag{1.2}$$

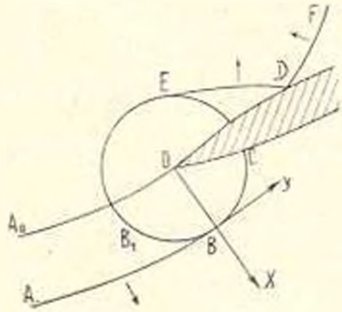
которое обычно находится из осредненного вариационного принципа [3].

Полагая $\omega = \omega_{00} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\alpha_k = \alpha_k^{(0)} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ и оставляя члены до второго порядка по φ, можно получить из (1.2) уравнение для фазы φ. С другой стороны, в вышеуказанном линейном уравнении [3] для ψ можно полагать $\psi = ue^{i\varphi}$ и отделить действительную часть. Сравнение двух подходов позволяет получить для ψ нелинейное уравнение Шредингера [3]

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_\xi - i\Delta_\omega \frac{\partial \ln K}{\partial t}\Big|_\xi - \frac{1}{2}\Gamma \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \Lambda \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\theta} + \Lambda_1 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} -$$

$$- \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}\right) = \Delta_\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2\psi \quad (1.3)$$

Здесь $\xi = \mathrm{const}$ дает уравнение точки, движущейся вдоль луча с групповой скоростью $C_k = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_k}$, значения коэффициентов Γ, Λ, Λ_1 указаны в [3], K есть лучевое решение на волне. В настоящей работе рассматривается типично дифракционная задача. Постановка указанной задачи следующая. При падении монохроматической волны на экран в форме произвольного криволинейного угла образуются области существенно двумерного изменения параметров в окрестности дифракционных лучей (OB и OE фиг. 1). Первый отделяет области света и тени, причем вблизи OB имеется лишь одна падающая волна AB, поэтому можно использовать уравнение (1.3). При этом в качестве основной волны можно взять волну B_1BC, рассеянную вершиной угла O, которая далее называется точечной волной. Как показывает линейное решение для случая плоской волны AB и волнового уравнения [4] вблизи OB решение записывается через интегралы Френеля. В [3] показано, что та же форма решения сохраняется и для произвольной линейной среды и произвольной волны AB. В окрестности OB можно записать для указанного решения



Фиг. 1.

$$\psi = \frac{A}{2\sqrt{k_1 - k_2}\, s} e^{\frac{s}{k^2}} \left\{1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{s}}{k}\right)\right\}, \quad \frac{1}{k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}} \quad (1.4)$$

где $s = -i\omega$, θ_0 — значение θ вдоль OB, k_1 — кривизна обращенных точечных волн, k_2 — кривизна волны AB (фиг. 1) в начальном положении OA_0, c_0 — нормальная проекция фазовой скорости волны в начальной точке O, $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ можно выразить через интегралы Френеля. В (1.3) $K = A$ есть лучевое решение на волне B_1BC.

Следует отметить, что, как видно из (1.4), для дифракционных задач слагаемые в (1.3), содержащие Γ, Λ, Λ_1, имеют более высокий порядок малости [3], причем в линейной плоской задаче имеет место уравнение

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_z - \frac{1}{2}\Delta_\omega \frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{H_2^2\partial\theta^2} - i\Delta_\omega\psi\frac{\partial\ln K}{\partial t}\bigg|_z = 0$$

где $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$. Подставляя сюда (1.4), можно убедиться в его удовлетворении при выполнении соотношений $K = A$

$$\frac{\partial k_1}{\partial t}\bigg|_z = -\frac{\omega\Delta_2}{\Delta_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\frac{1}{H_2^2 c_0}$$

Поскольку $k_1 = k_1(\tau_1)$, $\tau_1 = \frac{\tau_2}{\omega}$ и вдоль луча $\frac{\partial\tau_1}{\partial t}\Big|_z = \frac{\partial\tau_1}{\partial x_k}C_k = \frac{C_n}{c_n}$, где

$C_n = -\frac{\Delta_\tau}{\Delta_\omega}$ и c_n — проекции групповой и фазовой скорости на нормаль к волне, можно получить уравнение

$$\frac{dk_1}{d\tau_1} = \frac{c_n \frac{\partial^2\tau}{\partial\beta^2}\omega}{H_2^2 c_0}$$

которое проверяется непосредственными вычислениями для однородной среды и представляет нетривиальное соотношение для неоднородной среды. Уравнение (1.3) может быть записано в лучевых координатах, связанных не с точечной волной B_1BC, а с волной AB (фиг. 1). Для этого следует ввести лучи, связанные с волной AB, определяемые уравнениями $\bar{s} = \mathrm{const}$, где $\bar{s}$ представляет длину дуги начального положения OA_1 волны AB. Согласно [5] имеет место соотношение, связывающее $\bar{s}$ с лучевой координатой θ для точечной волны

$$\bar{s} = \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}$$

Можно также ввести эйконал волны AB

$$\tilde{\tau}_1 = \frac{\bar{s}}{2\omega} + \tau_1 - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)}$$

где $\tilde{\tau}_1 = \mathrm{const}$ дает уравнение AB в линейной задаче. Указанная форма $\tilde{\tau}_1$ получается из записи уравнения волны относительно точечной волны [5], а также из асимптотики решения (1.4) для больших $\frac{\sqrt{\bar{s}}}{k}$ [3].

Тогда, полагая $u = \psi e^{i\omega\tilde{\tau}}$, $\bar{\tau} = \tilde{\tau}\omega$, $\tilde{t} = \tilde{\tau}_1 - t$, можно снова получить уравнение (1.3), в котором заменено τ_1 на $\tilde{\tau}_1$, K есть лучевое решение на AB, равное [5] $\bar{B} = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$, и удобно полагать в (1.3)

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{H_1(k_1 - k_2)}\frac{\partial}{\partial s}$$

Линейное решение вместо (1.4) можно взять в виде

$$\psi = \frac{B}{2\omega}\{1 - \Phi(\zeta)\}, \qquad \zeta = -\frac{\sqrt{-i\omega}\,\bar{s}\sqrt{k_1 - k_2}}{\sqrt{2c_0}} \tag{1.5}$$

Из (1.5) для $\bar{s} \to -\infty$ получится $\psi \to 0$, а для $\bar{s} \to \infty$ $\psi \to \frac{B}{\omega}$, то есть (1.5) переходит в решение для падающей волны. Нелинейные уравнения вблизи OB (фиг. 1) получаются из (1.3), записанного для координат δ, $\bar{s}$, t в плоской дифракционной задаче в виде

$$(a^2)_t|_\xi - a^2 \frac{\partial \ln K^2}{\partial t}\Big|_\xi - \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.6}$$

$$\varphi_t|_\xi - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2a}\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_\xi = \frac{C_n}{c_n}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\xi, y}$$

Главные члены асимптотики нелинейного решения вдали от луча OB соответствуют отбрасыванию производных от a по y и вблизи точечной волны BC, где $\theta \gg \theta_0$, имеют вид

$$\psi_p = a_p e^{i\varphi_p}, \qquad a_p = -\frac{\sqrt{c_0}\,K}{\sqrt{2\pi}\,\omega^{3/2}\sqrt{k_1 - k_2}\,\bar{s}} \tag{1.7}$$

$$\varphi_p = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega(k_1 - k_2)\bar{s}^2}{2c_0} - \int_0^t \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a_p^2\,dt$$

где p указывает точечную волну. Вблизи волны AB вдали от луча OB $\theta \ll \theta_0$

$$a = \frac{k}{\omega}, \qquad \varphi = \int_0^t \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 \frac{K^2}{\omega^2}\,dt \tag{1.7a}$$

Ясно, что величины $\tau_1 + \varphi$ в асимптотическом решении [1] и $\delta_1 + \varphi$ по (1.7), (1.7a) совпадают. Теперь можно численно решать уравнения (1.6) с начальными условиями, взятыми из линейного решения (1.5), которое может быть записано через интегралы Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt$$

$$\psi = p + iq, \qquad p = \frac{K}{2\omega} - \frac{K}{2\omega}\left\{C\left(\zeta'\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + S\left(\zeta'\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}$$

$$\zeta = -\frac{\sqrt{\omega \bar{s}}\sqrt{k_1 - k_2}}{\sqrt{2c_0}}, \quad q = -\frac{K}{2\omega}\left\{S\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - C\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\} \tag{1.8}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left\{\frac{1}{2} - C\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2} - S\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right\}^2}$$

Согласно (1.8) получается, что при $\bar{s} = 0$ $a = \frac{k}{2\omega}$, в области тени $\bar{s} < 0$ a монотонно стремится к нулю, при $\bar{s} > 0$ a осциллирует около значения $\frac{k}{\omega}$, φ при $\bar{s} < 0$ монотонно растет [10]. Для проведения расчетов следует конкретизировать коэффициенты в уравнениях (1.6) и решении (1.8). В случае однородной среды и плоской волны AB имеют место соотношения [5] $\bar{s} = -y$, $k_2 = 0$, $k_1 = -\frac{1}{\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} t}$, $K = \mathrm{const}$.

Обозначая $\frac{y}{\sqrt{-c_0 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}}} = \mu$, можно (1.6) записать в виде

$$u_n = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} \cdot \frac{\partial a^2}{\partial t}\bigg|_{\mu} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\bigg|_{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} + \frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0$$

где учтено, что для производной вдоль луча в силу стационарности задачи $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} + c_0\frac{\partial}{\partial x} = u_n\frac{\partial}{\partial x} = \frac{u_n}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\mu}$, что согласуется с предыдущим. Полученные уравнения решаются при условии (1.8), удовлетворяемым для малого $t = t_0$. Для уравнений с переменными коэффициентами и волны AB произвольного вида следует решать систему уравнений (1.6), где вместо y введено $\bar{s}$ и $\frac{\partial}{\partial t}\Big| = \frac{C_n}{c_n}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{s}$. Линейное решение (1.5) соответствует одномерному по ζ решению $\psi = f(\zeta)$. Для небольших t можно и в нелинейной задаче считать верной указанную зависимость и получить для однородной среды уравнение

$$f''(\zeta) + 2\zeta f'(\zeta) = i\frac{4tc_0}{u_0}\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 |f|^2 f, \quad \zeta = \sqrt{-\frac{i\omega}{2}}\frac{y}{c_0\sqrt{t}}$$

При $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \sim \frac{1}{t}$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение. Отбрасывая правую часть, можно получить линейное решение, а в нелинейной задаче, игнорируя зависимостью $f(\zeta, t)$ от t, можно решить полученное уравнение для фиксированного t, определяя поперечное изменение ψ вблизи луча OB. Можно получить также точное уравнение для $f(\zeta)$, полагая $\psi = \frac{f(\zeta)}{\sqrt{t}}$. Для произвольных t следует решать уравнения относительно двух независимых переменных t, μ. Полученные уравнения годятся в тех областях дифракции (вблизи луча OB), в которых на бесконечности отсутствует падающая волна. В окрестности же луча OE (фиг. 1) имеются падающая DF и отраженная DE волны. Поэтому решение следует искать в виде

$$u = \psi e^{i\bar{\tau}} + Ce^{i\bar{\chi}}$$

где ψ, $\bar{\tau}$ дают комплексную амплитуду и эйконал отраженной волны DE, а C, $\bar{\chi}$ дают амплитуду и эйконал падающей волны. Подставляя u в уравнение (1.1) и повторяя следующие за (1.1) рассуждения, можно для ψ и C получить отдельные линейные уравнения, записанные в координатах $\bar{\tau}$, $x_{2,3}$ и $\bar{\chi}$, $y_{2,3}$ соответственно, где координаты $x_{2,3}$ и $y_{2,3}$ выбраны вдоль отраженной и падающей волн. Далее можно ввести волновые векторы α_k и β_k для отраженной и падающей волн и соответствующие линейные дисперсионные соотношения

$$\Delta_1 = \Delta(\alpha_k, \omega_0) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\alpha_k); \quad \Delta_2 = \Delta(\beta_k, \omega_0) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\beta_k)$$

Как и при выводе (1.3), следует полагать $\psi = ae^{i\tau}$, $C = be^{i\chi}$ и ввести нелинейные дисперсионные соотношения

$$\omega = \omega_0(\alpha_k) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2; \quad \Omega = \omega_0(\beta_k) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$

Полагая, как и выше, $\omega = \omega_{00} - \frac{\partial\tau}{\partial t}$, $\Omega = \omega_{00} - \frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\alpha_k = \alpha_k^{(0)} + \frac{\partial\tau}{\partial x_k}$, $\beta_k = \beta_k^{(0)} + \frac{\partial\chi}{\partial y_k}$, можно во втором порядке получить уравнение для τ, χ. Сравнение этих уравнений с соотношениями, полученными отделением действительной части в вышеуказанных линейных уравнениях для ψ, C, позволяет написать связанные уравнения нелинейной дифракционной задачи вблизи луча OE

$$\begin{gathered}
i\Delta_{1\omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{\xi} - i\psi\Delta_{1\omega}\frac{\partial \ln K}{\partial t}\Big|_{\xi} + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \right.\\
\left. + 2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2\psi + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial b^2}\right)_0 |C|^2\psi \\
i\Delta_{2\omega}\frac{\partial C}{\partial t}\Big|_{\xi_1} - iC\Delta_{2\omega}\frac{\partial \ln H}{\partial t}\Big|_{\xi_1} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta_1}\left(\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2^2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_3^2}\frac{\partial^2 C}{\partial y_3^2} + \right.\\
\left. + 2\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2\partial\beta_3}\frac{\partial^2 C}{\partial y_2\partial y_3}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2 C + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 |C|^2 C
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\xi_1 = \mathrm{const}$ есть уравнение движения точки вдоль луча падающей волны с групповой скоростью, $y_{2,3}$ отсчитываются вдоль падающей, а $x_{2,3}$ — вдоль отраженной волны, Π есть лучевое решение для падающей волны.

В линейной задаче уравнения разделяются, причем ψ дается (1.4), где $x_2 = H_2(\theta - \theta_0)$, а в падающей волне решение одномерно и $C = \Pi(\zeta_1)$, $\chi = \omega(\zeta_1 - t)$.

Для примера рассматривается уравнение для напряженности электрического поля, которое при $\varepsilon_2 |\bar{E}_1|^2 \ll 1$ имеет вид [6]

$$\Delta \bar{E} + \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \varepsilon_0 \bar{E}\right) - \frac{1}{c_0^2} \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_2 |\bar{E}_1|^2) \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.10)$$

Решение ищется в виде

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \bar{E}_1 + \frac{1}{2} \bar{E}_1^*, \qquad \bar{E}_1 = (C e^{i\chi} + \psi e^{i\tau}) \bar{e} \qquad (1.11)$$

где $\bar{E}_1^*$ комплексно сопряжено $\bar{E}_1$, $\bar{e}$ — единичный вектор поляризации, перпендикулярный плоскости распространения падающей и отраженной волн, $\bar{e} \nabla \varepsilon_0 = 0$.

Учитывая, что для модуля амплитуды поля имеем

$$|\bar{E}_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\tau - \chi + \beta - \gamma)}$$

из уравнения (1.10), умножая его поочередно на $e^{-i\chi}$, $e^{-i\tau}$ и осредняя по $\tau - \chi$, можно получить уравнения модуляций

$$\Delta_{1\omega} i \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{\tau} - \Delta_{1\omega} i \psi \frac{\partial \ln K}{\partial t}\Big|_{\tau} + \Delta \psi + \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{c_0^2} \psi (a^2 + 2b^2) = 0$$

$$\Delta_{2\omega} i \frac{\partial C}{\partial t}\Big|_{\chi} - \Delta_{2\omega} i C \frac{\partial \ln \Pi}{\partial t}\Big|_{\chi} + \Delta C + \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{c_0^2} C (2a^2 + b^2) = 0 \qquad (1.12)$$

$$\Delta_{1\omega} = \Delta_{2\omega} = \frac{2\omega\varepsilon_0}{c_0^2}, \qquad \Delta = \sum_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_1^3 \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}$$

где $\Delta_1 = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c_0^2} - \sum_1^3 \alpha_k^2$, $\Delta_2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c_0^2} - \sum_1^3 \beta_k^2$, причем производные по нормали к волнам (по x_1, y_1) можно отбросить. В плоской задаче эти уравнения можно записать в неподвижных координатах x_1, x_2

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \alpha_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \alpha_2\right) i - \psi \left(\frac{\partial \ln K}{\partial x_1} \alpha_1 + \frac{\partial \ln K}{\partial x_2} \alpha_2\right) i +$$

$$+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{c_0^2} \psi (a^2 + 2b^2) = 0 \qquad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\beta_1 + \frac{\partial C}{\partial x_2}\beta_2\right)i - C\left(\frac{\partial \ln \Pi}{\partial x_1}\beta_1 + \frac{\partial \ln \Pi}{\partial x_2}\beta_2\right) + \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} +$$

$$+ \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \varepsilon_0}{c_0^2} C\,(2a^2 + b^2) = 0$$

что должно облегчить численное решение.

Начальные условия для (1.13) берутся из (1.4) при $t = t_0 \approx 0$ и условия $C = \Pi$, при $t = t_1 \gg 1$, а граничные условия находятся интегрированием одномерных по лучу уравнений для a, φ, b, χ, получаемых из (1.12) подобно (1.7), (1.8). При поляризации вектора $\overline{E}$ в плоскости распространения волн

$$\overline{E}_1 = (Ce^{i\chi} + \psi' e^{i\overline{\varphi}})\,\overline{e}_1 + (C' e^{i\overline{\chi}} + \psi e^{i\overline{\varphi}})\,\overline{e} \qquad (1.14)$$

где $\overline{e}_1$ и $\overline{e}$ параллельны падающей и отраженной волнам.

Подставляя (1.14) в (1.10), учитывая соотношения для векторов

$$\left.\frac{d\overline{e}_1}{dt}\right|_{\overline{\varphi}} = -\frac{c_0^2}{2\omega\varepsilon_0^2}\overline{\beta}(\nabla\varepsilon_0\overline{e}_1); \quad \left.\frac{d\overline{e}}{dt}\right|_{\overline{\chi}} = -\frac{c_0^2}{2\omega\varepsilon_0^2}\overline{\alpha}(\nabla\varepsilon_0\overline{e})$$

умножая (1.14) на $e^{-i\overline{\varphi}}$, $e^{-i\overline{\chi}}$ соответственно, можно получить после осреднения по $\overline{\varphi} - \overline{\chi}$ уравнения $\chi - \chi' = \varkappa$, $\varphi - \varphi' = \mu$,

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\beta_k i + \psi i\Delta\overline{\varphi} + \Delta\psi + \lambda\{\psi(p + b'^2) + bb'\psi' e^{-i\mu} +$$

$$+ \overline{e}_1\overline{e}\,(\psi' b'^2 + \psi bb' e^{-i\mu})\} = 0$$

$$2\frac{\partial\psi'}{\partial x_k}\beta_k i + \psi' i\Delta\overline{\varphi} + \Delta\psi' + \lambda\{\psi'(p + b^2) + \psi bb' e^{i\mu} +$$

$$+ \overline{e}_1\overline{e}\,(\psi bb' e^{i\mu} + \psi' b^2)\} = 0$$

$$2\frac{\partial C'}{\partial x_k}\alpha_k i + C' i\Delta\overline{\chi} + \Delta C' + \lambda\{C'(p + a^2) + Caa' e^{i\varkappa} +$$

$$+ \overline{e}_1\overline{e}\,(C' aa' e^{i\varkappa} + Ca^2)\} = 0 \qquad (1.15)$$

$$2\frac{\partial C}{\partial x_k}\alpha_k i + Ci\Delta\overline{\chi} + \Delta C + \lambda\{C(p + a'^2) + C' aa' e^{-i\varkappa} +$$

$$+ \overline{e}_1\overline{e}\,(C' a'^2 + Caa' e^{-i\varkappa})\} = 0$$

где $p = b^2 + a'^2 + b'^2 + a^2 + \overline{e}_1\overline{e}\,2\,(aa'\cos\mu + bb'\cos\varkappa)$, $\lambda = \frac{\omega^2}{c_0^2}\varepsilon_0\varepsilon_1$ и можно заменять $2\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\alpha_k = 2\frac{\omega}{c_0^2}\varepsilon_0\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\overline{\varphi}}$.

При $a' = 0$, $b = 0$, $\chi' = \chi$, $\varphi' = \varphi$ из (1.15) получаются уравнения (1.12), где учтено, что согласно уравнениям лучей $\frac{dx_k}{dt} = \frac{c_0^2}{\omega\varepsilon_0}\alpha_k$. Применяя соотношение для суммы производных по x_k от правых частей [7], можно получить

$$\Delta\tau = \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} = \frac{\omega\varepsilon_0}{c_0^2}\frac{\partial \ln J}{\partial t}\Big|_{\tau} - \alpha_k\gamma_0\frac{\partial \frac{1}{\varepsilon_0}}{\partial x_k} = -\frac{2\omega\varepsilon_0}{c_0^2}\frac{\partial \ln K}{\partial t}\Big|_{\tau}$$

откуда $K = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{J}}$ и, подобно этому, $H = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{J_1}}$, где J_1, J — якобианы преобразований от $x_{1,2,3}$ к t, θ, τ для падающей и отраженной волн. Таким образом, получено линейное решение и сформулирована нелинейная задача в окрестности дифракционного луча.

В качестве другого примера применения уравнений (1.9) можно рассмотреть волны изгиба в пластинах. В пренебрежении влиянием продольных волн на изгибные можно получить следующие соотношения для связи лагранжиана с прогибом $u(t, x_1, x_2)$

$$L = T - V, \qquad T = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2, \qquad V = \frac{3}{4}G\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi_0^2\left(1 + \frac{\gamma_2}{2}\psi_0^2\right)dx_3$$

$$\psi_0^2 = \frac{8}{3}\left(\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{x_2}^2 + \varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x_2} + \frac{\varepsilon_{x_1x_2}^2}{4}\right)$$

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

$$\varepsilon_{x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\varepsilon_{x_1x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2x_3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$$

h есть толщина пластины, оси x_1, x_2 выбраны в плоскости пластины.

После вычисления интеграла получится

$$\frac{V}{G} = \frac{1}{2}h\left(u_{x_1}^4 + u_{x_2}^4 + 2u_{x_1}^2u_{x_2}^2\right) + \frac{h^3}{6}\left(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2\right) +$$

$$+ \frac{h^5}{80}\left(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} + u_{x_1x_2}^2\right)^2, \qquad u_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

Записывая u в виде суммы отраженной и падающей волн

$$u = a\cos\tau + b\cos T, \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = \beta_2$$

и вводя осредненный лагранжиан

$$\overline{L} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L\,d\overline{\tau}\,d\overline{\gamma}$$

можно получить

$$\overline{L} = \frac{1}{4}\rho h\,(a^2\omega_1^2 + b^2\Omega^2) - \frac{3Gh}{16}\,(a^4k_1^4 + b^4k_2^4) -$$

$$-\frac{Gh}{2}\,a^2b^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 - \frac{Gh}{4}\,a^2b^2k_1^2k_2^2 -$$

$$-\frac{Gh^3}{12}\,(a^2k_1^4 + b^2k_2^4) - \frac{Gh^5\gamma_2}{80}\,(a^4k_1^8 + b^4k_2^8) -$$

$$-\frac{Gh^5\gamma_2}{60}\,a^2b^2k_1^4k_2^4 - \frac{Gh^5}{120}\,a^2b^2\gamma_2 K_1^2$$

$$k_1^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad k_2^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2, \quad K_1 = k_1^2k_2^2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2$$

Здесь введены разные обозначения для частот отраженной и падающей волн $\omega_1 = -\frac{\partial\tau}{\partial t}$ и $\Omega = -\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}$.

Варьируя $\overline{L}$ по a, b и учитывая, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, можно получить следующие нелинейные дисперсионные соотношения:

$$\omega_1 = \omega_0(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{2\omega\rho}\left\{\frac{Gh^4}{10}\gamma_2 k_1^8 a^2 + K_1^2\,\frac{Gh^4\gamma_2}{30}\,b^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Gh^4\gamma_2}{15}\,k_1^4k_2^4b^2 + \frac{3}{2}\,Ga^2k_1^4 + 2Gb^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + Gb^2k_1^2k_2^2\right\} \qquad (1.16)$$

$$\Omega = \omega_0(\beta_1, \beta_2) + \frac{1}{2\omega\rho}\left\{\frac{Gh^4\gamma_2}{10}\,k_2^8b^2 + K_1^2\,\frac{Gh^4\gamma_2}{30}\,a^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Gh^4\gamma_2}{15}\,k_1^4k_2^4a^2 + \frac{3}{2}\,Gb^2k_2^4 + 2Ga^2\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + Ga^2k_1^2k_2^2\right\}$$

$$\Omega_0 = \omega_0(\beta_1, \beta_2)$$

где $\omega_0(\alpha_1, \alpha_2) = h\sqrt{\frac{G}{3\rho}}\,k_1^2$, $\omega_0(\beta_1, \beta_2) = h\sqrt{\frac{G}{3\rho}}\,k_2^2$, что позволяет конкретизировать коэффициенты в правых частях (1.9) для изгибных волн. В условиях плоской задачи производные по $x_2 = y_2$ можно отбросить, причем

$$\Delta_1 = \omega - \omega_0(\alpha_1, \alpha_2), \quad \Delta_2 = \omega - \omega_0(\beta_1, \beta_2)$$

откуда получится

$$\Delta_{\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} = \frac{2\omega}{\alpha_1^2}, \qquad \Delta_{\beta_1}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial\beta_2^2} = \frac{2\omega}{\beta_1^2}, \quad \Delta_{1\omega} = \Delta_{2\omega} = 1$$

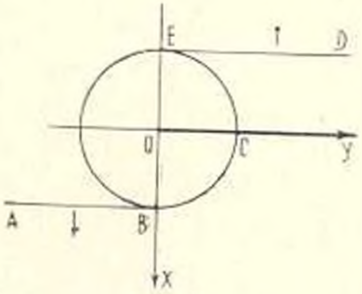
Уравнения (1.9) следует решать при начальных условиях, взятых для χ по (1.4) при $t = t_0$, где t_0 мало, то есть вблизи отражающего угла, а для C берется значение $C = \Pi$ при $t = t_1$, где t_1 достаточно велико, то есть на больших расстояниях от угла.

Таким образом, каждое из уравнений (1.9) записано в своей системе координат и рассчитывается первое в направлении возрастающих значений $t > t_0$, второе — уменьшающихся $t < t_1$, при этом уравнения связаны посредством правых частей. Это осложняет решение (1.9) или эквивалентной им системы четырех действительных уравнений для a, φ, b, χ, которые, по-видимому, следует решать, задавая, кроме a, φ, при $t = t_0$, также и некоторые значения b, χ так, чтобы после расчета задачи получились заданные при $t = t_1$ значения b, χ. Однако при рассмотрении однородной среды и нормального падения на плоский экран плоской падающей волны AB координатные оси x_1 и y_1 параллельны. Аналогично вышеприведенным уравнениям вблизи луча OB можно записать уравнения вблизи луча OE (фиг. 2) в плоской задаче ($x_1 = -y_1 = x$, $x_2 = y_2 = y$, $\alpha_1 = -\beta_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta_2 = \beta$), записывая по-прежнему

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi} = \frac{u_0}{c_0}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\delta,\mu}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi_1} = \frac{u_0}{c_0}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\delta',\mu}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{2a}\frac{\partial^2 a}{\partial\mu^2} = $$

$$= -\frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 - \frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$



Фиг. 2.

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} = 0$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{2b}\frac{\partial^2 b}{\partial\mu^2} = -\frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 - \frac{c_0}{u_0}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b^2}\right)_0 b^2$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial\mu}\frac{\partial\chi}{\partial\mu} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2\chi}{\partial\mu^2} = 0$$

Здесь $\delta' = \mathrm{const}$ соответствует фронту падающей волны DF, для которой значения u_0, c_0 противоположны по знаку значениям для DE, причем в первых двух уравнениях производные берутся при $\delta = \mathrm{const}$ или отнесены к отраженной волне. Следует отметить, что для полученных уравнений картина волн дается на фиг. 2.

В нелинейном решении вблизи OB согласно результатам [2], полученным для одномерной нестационарной задачи при $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$ для больших t при $y < 0$ и малых $\frac{K}{\omega}$, как и в (1.8), будет осциллирующий волновой пакет, а при $y > 0$ возникают отрицательные солитоны (коэффициент дисперсии в уравнении Кортевега-де-Вриза, описывающем квазипростую волну, отрицателен), число которых определяется $\frac{K}{\omega}$. При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ начальное решение (1.8) распадается на множество солитонов. Поскольку в (1.6) член $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \sim \omega a^2$ и по порядку меньше остальных членов ~ 1, поправка в первом уравнении (1.6) за счет нелинейности будет $\sim \omega a^2$ и можно считать $\varphi \approx \varphi_0$, тогда a дается (1.8).

Можно уточнить коэффициенты в (1.9) и учесть продольные компоненты перемещения u_1 и u_2. Тогда следует полагать

$$u = a\cos\theta + c\cos 2\theta + b\cos\chi + d\cos 2\chi$$

$$u_{1,2} = v_{1,2} + a_{1,2}\sin\theta + c_{1,2}\sin 2\theta + b_{1,2}\sin\chi + d_{1,2}\sin 2\chi$$

и после проведения выкладок получится в основном порядке a^4

$$a_{1,2} = b_{1,2} = c = 0, \quad d = 0$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2}\rho h\left\{\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2 + 2C_1^2\omega^2 + 2d_1^2\Omega^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2C_2^2\omega^2 + 2d_2^2\Omega^2 + \frac{1}{2}\omega^2a^2 + \frac{1}{2}\Omega^2b^2\right\} - 2Gh\left\{C_1^2\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2\right) + \right.$$

$$+ d_1^2\left(2\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + C_2^2\left(2\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + d_2^2\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right) +$$

$$+ 3(C_1C_2\alpha_1\alpha_2 + d_1d_2\beta_1\beta_2) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2\right\} - \frac{Gh^3}{12}(a^2k_1^4 + b^2k_2^4) -$$

$$- Gh\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}a^2\left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2\right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}b^2\left(\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial v_2}{\partial x_2}a^2\left(\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}b^2\left(\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)(a^2\alpha_1\alpha_2 + b^2\beta_1\beta_2) - a^2C_1\alpha_1k_1^2 -$$

$$- b^2d_1\beta_1k_2^2 - \alpha_2C_2a^2k_1^2 - \beta_2db^2k_2^2 + \frac{3}{16}a^4k_1^4 + \frac{3}{16}b^4k_2^4 +$$

$$\left. + \frac{1}{2}a^2b^2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + \frac{1}{4}k_1^2k_2^2a^2b^2\right\} - \frac{G\gamma_2h^5}{80}(a^4k_1^4 + b^4k_2^4) -$$

$$- \frac{G\gamma_2h^5}{120}a^2b^2K_1^2 - \frac{Gh^5\gamma_2}{60}a^2b^2k_1^4k_2^4$$

Варьируя $\bar{L}$ по $v_{1,2}$, можно получить уравнения для среднего течения, причем в дифракционной задаче $\left|\frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_2}\right| \gg \left|\frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_1}\right|$, $\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = 0$. Тогда после вариации $\bar{L}$ по a, b, $C_{1,2}$, $d_{1,2}$, $v_{1,2}$ получатся соотношения

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = -\frac{3k_1^2}{2(h^2k_1^2 - 12)} a^2$$

$$\beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 = -\frac{3k_2^2}{2(h^2k_2^2 - 12)} b^2$$

а в правые части дисперсионных соотношений (1.16) добавится соответственно

$$\frac{3G}{\Omega_0^2}\frac{k_1^4 a^2}{h^2k_1^2 - 12} - \frac{G}{2\Omega_0^2} A\left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2\right)$$

$$\frac{3G}{\Omega_0^2}\frac{k_2^4 b^2}{h^2k_2^2 - 12} - \frac{G}{2\Omega_0^2} A\left(\beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right)$$

где

$$A = a^2\left(\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right) + b^2\left(\beta_2^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right)$$

Полученные уравнения имеют место при высоких частотах, однако предположено, что ωh все еще невелико, что позволяет применять классическую теорию пластин, хотя обобщения [9] на высокочастотные уравнения могут быть проделаны подобным же путем. Представляет интерес исследование устойчивости волновых движений при условии наличия двух эйконалов.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 I 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԲԱՐՁՐ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՅԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԴԻՏԱՐԿՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ալիքի դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդայի համար ստացված է գծային խնդրի լուծումը և դուրս են բերված ոչ գծային խնդրի հավասարումների դիֆրակցիոն ճառագայթների շրջակայքում:

A NON-LINEAR DIFFRACTION PROBLEM FOR HIGH FREQUENCY ASYMPTOTICS

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

In the problem on reflection of an arbitrary quasi-monochromatic wave from the wedge a linear solution in the neighbourhood of diffraction rays is suggested. The non-linear equations for complex amplitude of the wave in the region with no incident wave ahead of the point wave at infinity, as well as the coupled equations for complex amplitudes of incident and reflected waves for the regions with incident wave are derived. The coefficients of equations for the electrodynamic problem and for the problem of bending waves in plates are specified, and the problem of numerical computation of non-linear waves parameters is formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, изд. «Наука», 1973.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
4. *Петрашень Г. И., Николаев Б. С., Коузов Д. П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, в. 32.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычис. математ. и матем. физики, 1972, т. XII, № 6.
6. *Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д.* О самофокусировке аксиально симметричных пучков электромагнитных волн. В сб.: Теория дифракции и распространения волн. Труды VI Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. 1973.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. IV. М., Гостехиздат, 1953.
8. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
9. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., изд. АН СССР, 1973.
10. *Цыдыпов Ч. Ц.* Распространение ультракоротких радиоволн. «Наука», Сибирское отделение, 1977.