

М. В. БЕЛУБЕКЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Динамическое поведение упругих систем под действием сил диссипативного характера представляет интерес, в частности, потому, что такие силы могут быть причиной дестабилизации системы, хотя в большинстве случаев они приводят к демпфированию колебаний [1, 2].

В настоящей работе рассматривается простой пример такой нагрузки, обусловленной взаимодействием магнитного поля и упругими колебаниями электропроводящей пластинки. Другая модель, учитывающая демпфирование, изучалась в [3].

1. Уравнение, описывающее магнитоупругие колебания пластинки, находящейся в постоянном поперечном магнитном поле H_0 , при справедливости гипотезы магнитоупругости тонких тел имеет следующий вид [4]:

$$D \nabla^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2ik^2}{3c^2} H_0^2 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \quad (1.1)$$

Здесь w — поперечные перемещения частиц пластинки, $2h$ — толщина, D — жесткость пластинки, ρ — плотность, σ — электропроводность материала пластинки, c — постоянная, равная скорости света в вакууме.

Аналогичное уравнение в случае, когда пластинка служит проводником равномерно распределенного продольного электрического тока плотности J_0 , приводится к виду [4, 5]

$$D \nabla^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{(4\pi)^2}{c^3} j_0^2 \frac{2h^3}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (1.2)$$

Здесь координатная плоскость (x, y) , совпадающая со срединной плоскостью пластинки, выбрана так, что направление электрического тока совпадает с направлением оси Ox .

В частном случае, когда колебания зависят только от координаты x , уравнения (1.1) и (1.2) записываются в одинаковой форме

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

где $a^2 = D/(2\rho h)$, $i = 2h^2 H_0^2 / (3\rho c^2)$ в случае поперечного магнитного поля и $i = (4\pi)^2 \sigma h^4 j_0^2 / (15\rho c^4)$ в случае токонесящей пластинки.

В дальнейшем изучаются решения частных задач для уравнения (1.3).

2. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки ($-\infty < x < \infty$) при следующих начальных условиях:

$$w(x, 0) = \psi(x), \quad \partial w(x, 0) / \partial t = \dot{\psi}(x) \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1), приводится в [5]. В случае $\delta < 2a$ решение представляет периодические колебания с экспоненциальным затуханием возмущений, обусловленным параметром δ (наличием магнитного поля).

В случае же $\delta = 2a$ решение указанной задачи имеет вид [5]

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{3}{2} - \frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right|^{-1/2} + I_0(\xi) \exp \left[-\frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right] d\xi \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что возмущения, обусловленные начальным возмущением $\psi(x)$, стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, магнитное поле приводит к неустойчивости пластинки при условии, что $\delta = 2a$ и $\psi(x) \neq 0$.

Следует отметить, что условие $\delta = 2a$ требует наличия сильного магнитного поля напряженностью порядка 10^3 гаусс.

Решение (2.2), полученное в [5] при помощи интегральных преобразований Фурье и Лапласа, можно получить и другим способом.

Уравнение (1.3) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$w = t^\alpha \Phi(\eta), \quad \eta = (x - x_0) / t^\beta, \quad \tau = t \quad (2.3)$$

где α и β — произвольные параметры.

Подставляя (2.3) в уравнение (1.3), для определения функции $\Phi(\eta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\alpha^2 \Phi^{IV} - \frac{\delta}{2} \eta \Phi^{III} - \left[2(x-1) - \frac{\eta^2}{4} \right] \Phi^{II} - \left(x - \frac{3}{4} \right) \eta \Phi^I + 3(2-1)\Phi = 0 \quad (2.4)$$

Представляя решение уравнения (2.4) в виде

$$\Phi(\eta) = \exp(-\beta\eta^2) \quad (2.5)$$

и определяя произвольные параметры α и β так, чтобы уравнение (2.4) удовлетворялось тождественно, что оказывается возможным только при условии $\delta = 2a$, получим следующее решение уравнения (1.3):

$$w = \sqrt{\frac{t}{2\pi\delta}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\delta t} \right] \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) будет решением задачи магнитоупругих колебаний пластинки, удовлетворяющим условию $\delta = 2a$ и начальным условиям вида

$$w(x, 0) = 0, \quad \partial w(x, 0) / \partial t = \delta(x - x_0)$$

где $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция Дирака.

Решение (2.6), которое является частным случаем решения (2.2), показывает возрастание возмущений с течением времени.

Уравнение (2.4) имеет также частные решения в виде полиномов по η . Здесь они не приводятся, так как для рассматриваемых вопросов не представляют интереса. Более содержательные решения получаются при комбинировании полиномов по η и функций вида (2.5). В частности, таким способом получается решение вида

$$w = \frac{1}{1 - 2\pi\delta t} \left[\frac{3}{2} - \frac{(x - x_0)^2}{2\delta t} \right] \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\delta t} \right] \quad (2.7)$$

При получении (2.7) существенно используется условие $\delta = 2a$.

Решение (2.7) удовлетворяет начальным условиям

$$w(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad \partial w(x, 0) / \partial t = 0$$

Решения (2.6) и (2.7) являются фундаментальными решениями задачи магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки и, следовательно, решение при произвольных начальных условиях (2.1) имеет вид (2.2).

Таким образом, наличие добавочного члена, зависящего от скорости перемещения, в уравнении колебаний пластинки может привести к неустойчивости бесконечной пластинки.

Возникает вопрос — возможна ли неустойчивость для пластин конечных размеров?

3. Рассмотрим решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial^2 w(0, t) / \partial x^2 = 0 \\ w(l, t) = 0, \quad \partial^2 w(l, t) / \partial x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соответствующие задачи колебаний шарнирно-опертой пластинки-полосы в поперечном магнитном поле или при наличии стороннего тока исследовались в [4—6].

Граничные условия (3.1) позволяют решать задачу методом разделения переменных. Представляя решение в виде

$$w = X(x) T(t) \quad (3.2)$$

получим для определения $X(x)$ самосопряженную задачу. При этом, в зависимости от параметра δ , необходимо рассматривать три случая.

В случае $\delta < 2a$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и граничным условиям (3.1), имеет вид

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \cos \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{a^2 - \delta^2/4} t \right] + B_k^{(1)} \sin \left[\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{a^2 - \delta^2/4} t \right] \right\} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\delta}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A_k = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$$

$$B_k^{(1)} = \frac{l}{(k\pi)^2} (\alpha^2 - \delta^2/4)^{-1/2} \int_0^l \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \varphi(\xi) + \psi(\xi) \right] \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$$

Из (3.3) видно, что в этом случае колебания имеют затухающий характер с экспоненциальным затуханием в зависимости от времени. Частоты колебаний, по сравнению с частотой собственных колебаний пластинки при $\delta = 0$, уменьшаются, причем уменьшение одинаково для всех гармоник. Следует отметить, что коэффициенты $B_k^{(1)}$, в отличие от A_k , более сложным образом зависят от начальных условий и, кроме того, зависят также от коэффициента δ . С возрастанием δ (напряженности магнитного поля) коэффициенты $B_k^{(1)}$, характеризующие амплитуду колебаний, возрастают.

Если $\delta = 2\alpha$, решение представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k^{(2)} t) \exp \left[-\frac{\delta}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.4)$$

где

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\frac{\delta}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \varphi(\xi) + \psi(\xi) \right] \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$$

В этом случае колебания аперiodические, так как начальные возмущения затухают со временем, не переходя положения равновесия. Здесь, в отличие от (3.3), характер затухания слагаемых, содержащих коэффициенты A_k или $B_k^{(1)}$, в зависимости от времени, различный.

В случае $\delta > 2\alpha$ решение имеет вид

$$w = \sum \left\{ A_k^{(3)} \exp \left[-\frac{1}{2} (\delta^2 - 4\alpha^2)^{1/2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 t \right] + B_k^{(3)} \exp \left[\frac{1}{2} (\delta^2 - 4\alpha^2)^{1/2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 t \right] \right\} \exp \left[-\frac{\delta}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.5)$$

где

$$A_k^{(3)} = \frac{1}{2} A_k - \left(\frac{l}{k\pi} \right)^2 (\delta^2 - 4\alpha^2)^{-1/2} B_k^{(2)}$$

$$B_k^{(3)} = \frac{1}{2} A_k + \left(\frac{l}{k\pi} \right)^2 (\delta^2 - 4\alpha^2)^{-1/2} B_k^{(2)}$$

Характер колебаний здесь такой же, как и в случае $\delta = 2a$. При этом чем больше δ (напряженность магнитного поля), тем быстрее затухают слагаемых с коэффициентами $A_k^{(3)}$ и тем медленнее затухание слагаемых с коэффициентами $B_k^{(3)}$.

Таким образом, для ограниченной пластинки с граничными условиями (3.1) второй член уравнения (1.3) приводит к затуханию колебаний. Если для бесконечной пластинки условие $\delta = 2a$ есть условие перехода от затухающих колебаний к возрастающим во времени колебаниям, то при граничных условиях (3.1) условие $\delta = 2a$ означает переход от периодических колебаний с затуханием к аperiodическим колебаниям.

4. Рассмотрим приближенные решения задачи для других граничных условий, не допускающих разделения переменных.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t) / \partial x = 0 \\ w(l, t) = 0, \quad \partial w(l, t) / \partial x = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

что соответствует условиям для пластинки, заделанной по краям $x = 0$ и $x = l$.

Представляя решение уравнения (1.3) в форме

$$w = X(x) e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

и имея в виду граничные условия (4.1), для определения $X(x)$ получим самосопряженную задачу. Это обстоятельство позволяет надеяться, что метод Галеркина применим для задачи с граничными условиями (4.1). В качестве системы функций, используемых в методе Галеркина, берутся собственные функции соответствующей задачи колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля ($\delta = 0$). Первые два приближения показывают, что характер колебаний аналогичен колебаниям с граничными условиями (3.1). Условие перехода от периодических колебаний к аperiodическим определяется равенством $\delta \approx 1.72 \cdot 2a$. Точное решение этой же задачи [6] дает для условия перехода значение $\delta \approx 1.7 \cdot 2a$.

В случае граничных условий

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t) / \partial x = 0 \\ \partial^2 w(l, t) / \partial x^2 = 0, \quad \partial^3 w(l, t) / \partial x^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

подстановка (4.2) в уравнение (1.3) и условия (4.3) приводит к самосопряженной задаче относительно функции $X(x)$. Характер решения, полученного методом Галеркина, такой же, как и в случае граничных условий (3.1) и (4.2). Условие перехода от периодических колебаний к аperiodическим дается равенством $\delta \approx 1.33 \cdot 2a$.

Рассмотрим уравнение (1.3) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t) / \partial x = 0 \\ \partial^2 w(l, t) / \partial x^2 = 0, \quad \partial^3 w(l, t) / \partial x^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

которые соответствуют граничным условиям для полосы-пластины с заделанным краем при $x = 0$ и свободным краем при $x = l$.

Решение уравнения (1.3) представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) u_k(x) \quad (4.5)$$

где

$$u_k = \sin \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k x - a_k (\cos \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k x)$$

$$a_k = (\cos \lambda_k l + \operatorname{ch} \lambda_k l)^{-1} (\sin \lambda_k l + \operatorname{sh} \lambda_k l)$$

Здесь $u_k(x)$ — известные собственные функции задачи колебаний консолидной балки [7] (каждое слагаемое из (4.5) удовлетворяет граничным условиям (4.4)), λ_k — соответствующие собственные значения, являющиеся корнями следующего уравнения:

$$\cos \lambda_k l \operatorname{ch} \lambda_k l = -1$$

Для определения функций $f_k(t)$ применяется метод Галеркина. В первом приближении функция $f_1(t)$ определяется из следующего уравнения:

$$b_1^2 \dot{f}_1(t) + \delta_1^2 l \left(1 - \frac{2a_1}{\lambda_1 l}\right) f_1(t) + b_2^2 a^2 f_1(t) = 0 \quad (4.6)$$

Так как $\lambda_1 l \approx 1.875$ [7], то легко показать, что $2a_1 > \lambda_1 l$, и, следовательно, решение уравнения (4.6) экспоненциально возрастает по времени t для произвольного значения параметра δ . Это свойство решения уравнения (4.6) сохраняется и при учете последующих приближений по методу Галеркина, а также если вместо функций $u_k(x)$ используются полиномы, удовлетворяющие граничным условиям (4.4).

Физически такое решение не будет верным, так как пластинка не может терять устойчивость при произвольно малом δ (произвольно малой напряженности магнитного поля).

Отметим, что если решение задачи с граничными условиями (4.4) представить в виде (4.2), то для определения функции $X(x)$ получается несамосопряженная задача. Поэтому задача решалась также при помощи модифицированного метода Галеркина для несамосопряженных задач, предложенного в [8]. После представления решения в виде (4.2) приближенное решение задачи строится при помощи функций, удовлетворяющих граничным условиям как несамосопряженной задачи относительно $X(x)$, так и соответствующей сопряженной задачи. Исследование характеристического уравнения относительно ω , которое получается вследствие применения модифицированного метода Галеркина, показывает, что корни уравнения имеют отрицательную мнимую часть при произвольно малом δ , то есть получается экспоненциально возрастающее по времени решение (неустойчивое решение).

Приведенные приближенные исследования задачи в случае граничных условий (4.4), хотя и дают физически неверный результат, однако указывают на возможность существования неустойчивости.

5. Другое приближенное решение уравнения (1.3) с граничными условиями (4.4) можно получить с использованием автомодельного решения (2.3).

Рассмотрим решение задачи для больших моментов времени. Учитывая, что большим значениям t соответствуют малые значения η , уравнение (2.4) заменим следующим уравнением:

$$\alpha^2 \Phi^{1V} - \delta(\alpha - 1)\Phi^{III} + \alpha(\alpha - 1)\Phi = 0 \quad (5.1)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.1), определяются по формуле

$$r^{\pm} = (2\alpha^2)^{-1} [\delta(\alpha - 1) \pm \sqrt{\delta^2(\alpha - 1)^2 - 4\alpha^2\alpha(\alpha - 1)}] \quad (5.2)$$

Исследование решений уравнения (5.1) на основе (5.2) показывает, что наибольший интерес представляет случай

$$\delta = 2\alpha^{1/2}(\alpha - 1)^{-1/2}, \quad \alpha > 1 \quad (5.3)$$

С учетом (2.3), (5.3) и при $x = 0$ приближенное решение уравнения (1.3) для больших t представляется в виде

$$w = t^2 \left[C_1 \exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_2 \frac{x}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_3 \exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_4 \frac{x}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) \right] \quad (5.4)$$

где

$$\mu = (2\gamma)^{1/2} \delta^{-1/2} \quad (5.5)$$

Точное удовлетворение граничным условиям (4.4) при помощи функции (5.4) оказывается невозможным. Если же удовлетворить точно условиям на конце $x = 0$, приближенно условию $\partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0$ с учетом, что $l \gg (\mu l)^2$, и требовать вместо $\partial^3 w(l, t)/\partial x^3 = 0$ выполнения условия

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.6)$$

то из (5.4) получается приближенное решение в виде

$$w = Ct^2 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}} x - \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}} x \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}} x \right) \quad (5.7)$$

Выполнение условия (5.6) требует, чтобы α было меньше $3/2$. Поэтому, согласно (5.3), в решении (5.7) α должно удовлетворять следующему неравенству:

$$1 < \alpha < 3/2 \quad (5.8)$$

Если принять (5.7) как приближенное решение задачи, то оно показывает, что пластинка неустойчивая при условии (5.3), где α удовлетворяет неравенству (5.8). Из (5.3) и (5.8) получается минимальное критическое значение параметра δ , следовательно, и напряженности магнитного поля в виде

$$\delta_* = 2\sqrt{3}a$$

Заметим, что для бесконечной пластинки критическое значение получается в виде $\delta = 2a$.

Таким образом, показано, что второй член в уравнении (1.3) (магнитное демпфирование) при определенных условиях и для бесконечной области ($-\infty < x < \infty$) приводит к дестабилизации. Рассмотренные задачи для ограниченной области ($0 \leq x \leq l$) показывают, что указанный член имеет в основном демпфирующий характер. Исключение составляет задача с граничными условиями (4.4). В этом случае приближенные решения показывают на возможное наличие дестабилизирующего эффекта.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1978

Մ. Վ. ԲԵԼՍԵԿԻԱՆ

ՄԱԿՐՆՈՒՄԱԿՈՒՉՊՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԷԱՐՑԵՐ

Ս Վ Բ Ե Լ Ս Ե Կ Ի Ա Ն

Էլեկտրամագնիսական դաշտի և սալի առավելական տեղափոխումների փոխազդեցությունը հաշվի առնող պարզ նմանորինակի (մոդելի) հիման վրա քառամասիքվում է դիսսիպատիվ ուժերի ազդեցությունը սալի առանձնումների բնույթի վրա:

Ցույց է արվում, որ այդ ուժերը, որոնք հիմնականում ունեն մարդ պղծեցություն, որոշակի պայմանների դեպքում կարող են առաջ բերել համակարգի անկայունություն:

ON MAGNETOELASTIC VIBRATION IN PLATES

M. V. BELUBEKIAN

S u m m a r y

The effect of dissipation loads on the mode of vibration in plates is discussed, using a simple model. This model takes into account the interaction of electromagnetic field with the plate's elastic displacements. It is shown that these loads, producing a damping effect generally, under certain conditions produce a destabilizing effect as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз, 1961.
2. Цицело Г. Основы теории устойчивости конструкций. М. «Мир», 1971.
3. Smith T. E., Herrmann G. Stability of circulatory elastic systems in the presence of magnetic damping. *Acta Mechanica*, 1971, No. 12.
4. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость гонимых стержней и пластин. М. «Наука», 1977.
5. Белубекян М. В. О некоторых особенностях задач магнитоупругости токонесущих пластин. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. XI, № 2.
6. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 1.
7. Рэлей Д. В. Теория звука, т. 1. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955.
8. Prasad S. N., Herrmann G. Adjoint variational methods in nonconservative stability problems. *Int. J. Solids Structures*, 1972, vol. 8.