ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 6, 1978 Механика

О. Б. АГАЛАРЯН

К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрение вопросов пластического перераспределения полей напряжений и деформаций в телах с трещинами позволяет глубже понять механизм процесса разрушения и подойти к описанию его реального развития. В связи с этим упруго-пластические задачи теории трещин привлекают к себе большое внимание.

В общей постановке эти задачи связаны с большими математическими трудностями. Однако случай более простого деформированного состояния такого, как антиплоское, исследован достаточно подробно [1—3]. Построение их решений основано на свойствах интеграла, не зависящего от пути интегрирования, введенного Райсом [4] для плоской задачи.

С другой стороны, большой интерес представляет также изучение поля напряжений и деформаций в телах, имеющих острые надрезы и трещины и испытывающих кручение. Решения подобных задач для упруго-пластических тел важны при анализе работы скручиваемых стержней, валов, цилиндров и других деталей машин.

В данной работе изучается задача о кручении упруго-пластических осесимметричных тел, содержащих концентраторы напряжений. Предлагается общий метод решения, позволяющий в ряде случаев эффективно использовать имеющиеся результаты расчетов для антиплоской деформации. В асимптотическом приближении получаются результаты, совпадающие с известными данными для антиплоской деформации.

1. Рассматривается кручение осесимметричного тела из упруго-пластического материала, которое содержит концентратор напряжений (кольцевую выточку, надрез, трещину). Вводится цилиндрическая система координат, ось z которой направлена вдоль оси тела, радиус обозначается через r, а полярный угол—через φ. По условию задачи $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0$, и имеется лишь одно уравнение равновесия для неизвестных напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau_{r\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^2 \tau_{z\varphi}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Это уравнение удовлетворяется тождественно, если определить $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$ через функцию напряжений $\Phi = \Phi(r, z)$ по формулам

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad \tau_{z\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{1.2}$$

Для упруго-пластического тела сдвиговые деформации $\gamma_{r\varphi}$ и $\gamma_{z\varphi}$ являются функциями $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$ вида

$$\gamma_{rz} = 2f(T^2)\tau_{rz}, \quad \gamma_{z\varphi} = 2f(T^2)\tau_{z\varphi} \tag{1.3}$$

где T — интенсивность напряжений ($T^2 = \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{z\varphi}^2$). Подстановка (1.2) в (1.3), а (1.3) в соотношение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma_{z\varphi}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{r\varphi}}{r}\right) = 0 \tag{1.4}$$

дает уравнение для функции напряжений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^3}f(T^2)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r^3}f(T^2)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] = 0 \tag{1.5}$$

причем

$$T^2 = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2$$

На границе тела предполагаются заданными напряжение $\tau_{n\varphi}$ (n — внешняя нормаль к поверхности). Для определенности будем считать, что $\tau_{n\varphi} = 0$. С помощью функции напряжений это условие записывается в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos(n, z) - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos(n, r) = 0 \tag{1.6}$$

В случае, когда тело не ограничено вдоль оси z, на бесконечности задается скручивающий момент M. Задача состоит в решении уравнения (1.5) при заданных условиях (1.6) на границе и фиксированном моменте M на бесконечности (в случае неограниченного тела).

2. С целью использовать особенность рассматриваемых задач, состоящую в наличии концентраторов, запишем (1.5) в эквивалентной форме, выделив члены, содержащие вторые производные,

$$A\Phi - G\Phi = 0 \tag{2.1}$$

где

$$A\Phi = f(T^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + f(T^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$G\Phi = -\frac{3}{r}f(T^2)\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

Вторые производные функции Φ, входящие в выражение для $A\Phi$, имеют, согласно (1.2), решающее значение в местах высоких градиентов напряжений. В частности, вблизи острых углов, вершин выточек и трещин (2.1) заменяется уравнением $A\Phi = 0$. Это уравнение отвечает задаче об антиплоской деформации призматического тела с тем же поперечным сечением, что и рассматриваемое осесимметричное тело. Методы решения задач об антиплоской деформации хорошо разработаны [1—4]. Решение уравнения $A\Phi = 0$ либо само по себе обеспечивает достаточную точность, либо может служить удачным начальным приближением при отыскании $\Phi(r, z)$ в зоне концентрации. При нахождении такого решения необходимо осуществлять стыковку функции Φ при переходе к области, где градиенты напряжений не столь велики, как вблизи от концентратора.

Отмеченная связь с задачей об антиплоской деформации, легко обнаруживаемая с помощью функции Φ, может быть использована и в непосредственном приложении к исходной системе дифференциальных уравнений. С целью получить результаты в форме, по возможности, близкой к форме, используемой в работе [2], перейдем в уравнениях (1.1), (1.4) к новым переменным, считая координаты r и z функциями неизвестных деформаций и напряжений. Преобразования дают

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial \tau_{z\varphi}} + \frac{\partial r}{\partial \tau_{r\varphi}} + g_1 = 0 \\ &\frac{\partial z}{\partial \gamma_{r\varphi}} - \frac{\partial r}{\partial \gamma_{z\varphi}} + g_2 = 0 \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

где

$$g_1 = \frac{2\tau_{r\varphi}}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial \tau_{r\varphi}}\frac{\partial z}{\partial \tau_{z\varphi}} - \frac{\partial r}{\partial \tau_{z\varphi}}\frac{\partial z}{\partial \tau_{r\varphi}}\right]$$

$$g_2 = \frac{\gamma_{z\varphi}}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial \gamma_{r\varphi}}\frac{\partial z}{\partial \gamma_{z\varphi}} - \frac{\partial r}{\partial \gamma_{z\varphi}}\frac{\partial z}{\partial \gamma_{z\varphi}}\right]$$

В этой системе функции g_1 и g_2 малы по сравнению с другими слагаемыми в местах высоких градиентов напряжений. Их отбрасывание приводит к уравнениям задачи об антиплоской деформации. Другим существенным обстоятельством является то, что при задании этих членов как функций новых координат уравнения (2.2) с помощью частного решения сводятся к однородным. Поэтому, задав начальное приближение для функций g_1 и g_2, выполняя указанные преобразования и используя хорошо разработанные методы для антиплоской деформации, получим универсальную процедуру решения задач о кручении последовательными приближениями. Эффективность этого пути зависит от удачного выбора начального приближения. Из сказанного выше следует, что в местах высоких градиентов напряжений в качестве такового можно принять $g_1 = g_2 = 0$. Вне этих областей обычно выполняются соотношения линейной теории упругости, что также облегчает выбор начального приближения.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим концевую зону в вершине прямолинейной трещины, расположенной вдоль радиуса на расстоянии a от оси тела. Для определенности примем степенной закон упрочнения, то есть положим $f(T^2) = \dfrac{1}{2}BT^{\beta}$, где $B > 0$, $\beta > 0$. Для линейно упругого тела $\beta = 0$, $B = \dfrac{1}{G}$ (G — модуль сдвига).

С помощью преобразования переменных $r = a(1-\rho\cos\theta)$, $z = \rho\sin\theta$, вводящего полярную систему координат в вершине трещины, получаем уравнение, эквивалентное исходному.

$$\left[\frac{1}{a^4\rho^2}\Phi_\theta^2 + \frac{1}{a^4}\Phi_\rho^2 + \frac{2\beta}{a^4}\Phi_\rho^2\right]\Phi_{\rho\rho} + \frac{4\beta}{a^4\rho^2}\Phi_\rho\Phi_\theta\Phi_{\rho\theta} +$$

$$+\left[\frac{1}{a^4\rho^4}\Phi_\theta^2 + \frac{1}{a^4\rho^2}\Phi_\rho^2 + \frac{2\beta}{a^4\rho^4}\Phi_\theta^2\right]\Phi_{\theta\theta} +$$

$$+\left[\frac{1}{a^4\rho} + \frac{(4\beta+3)\cos\theta}{a^4(1-\rho\cos\theta)}\right]\Phi_\rho^3 - \frac{(4\beta+3)\sin\theta}{a^4\rho^3(1-\rho\cos\theta)}\Phi_\theta^3 +$$

$$+\left[\frac{(4\beta+3)\cos\theta}{a^4\rho^2(1-\rho\cos\theta)}\Phi_\theta - \frac{(4\beta+3)\sin\theta}{a^4\rho(1-\rho\cos\theta)}\Phi_\rho -\right.$$

$$\left. - \frac{2\beta}{a^4\rho^3}\Phi_\theta + \frac{1}{a^4\rho^3}\Phi_\theta\right]\Phi_\rho\Phi_\theta = 0$$

Представляя Φ в окрестности вершины в виде $\Phi = K\rho^\alpha F(\theta)$, где K и α — постоянные, F — функция угла θ, после перехода к пределу при ρ, стремящемся к нулю, получим

$$\frac{F''}{F} + \frac{\alpha^2[\alpha + 2\beta(\alpha-1)]F^2 + \alpha[\alpha + 4\beta\alpha - 2\beta]F'^2}{\alpha^2F^2 + (1+2\beta)F'^2} = 0 \qquad (3.1)$$

Граничные условия для $F(\theta)$ имеют вид

$$F = 0 \text{ при } \theta = \pi, \quad F' = 0 \text{ при } \theta = 0 \qquad (3.2)$$

Величина α определяется из условия, чтобы свертка $\tau_{ij}\varepsilon_{ij}$ имела асимптотику вида $\frac{1}{\rho}$ при ρ, стремящемся к нулю. Это условие дает

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{1+2\beta}{1+\beta}$$

Решая (3.1) при граничных условиях (3.2), получим

$$F(\theta) = C_1\left[\sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta} + (1+\beta)\cos\theta\right]^{1/2} \times$$

$$\times\left[\sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta} - \beta\cos\theta\right]^{\frac{\beta}{2(1+\beta)}} \qquad (3.3)$$

Подстановка $F(\theta)$ в $\Phi(\rho, \theta)$ и вычисление $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$ дает явные выражения для этих напряжений

$$\tau_{z\varphi} = K_1D^{-1}L_1(\theta)L_2(\theta)\left[\beta\cos\theta + \sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta}\right]$$

$$\tau_{r\varphi} = K_1D^{-1}L_1(\theta)L_2(\theta)\,\frac{1+\beta+\beta\sin^2\theta - \cos\theta\sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta}}{\sin\theta} \qquad (3.4)$$

где K_1 — постоянная, $D = -2(1+\beta)\rho^{\frac{1}{2(1+\beta)}}$

$$L_1 = \sqrt{(1+\beta)\cos\theta + \sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta}}$$

$$L_2 = \left(\sqrt{1+2\beta+\beta^2\cos^2\theta} - \beta\cos\theta\right)^{\frac{\beta}{2(1+\beta)}}$$

Линии постоянной интенсивности напряжений $(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = T^2)$ легко находятся из этих формул. Переходя к декартовой системе координат $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, имеем

$$[x - X(T)]^2 + y^2 = R^2(T)$$

где

$$X(T) = \frac{\beta(1+2\beta)^{1+2\beta}}{2^{1+\beta}(1+\beta)^{1+\beta}} \frac{K_1^{2(1+\beta)}}{T^{2(1+\beta)}} \tag{3.5}$$

$$R(T) = \frac{(1+2\beta)^{1+2\beta}}{2^{1+\beta}(1+\beta)^{1+\beta}} \frac{K_1^{2(1+\beta)}}{T^{2(1+\beta)}} \tag{3.6}$$

Таким образом, линия постоянной интенсивности T является кругом с центром $X(T)$ от вершины трещины и с радиусом $R(T)$. Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с результатом Нейбера [1] и Райса [2].

В случае, когда пластическая зона мала по сравнению с характерными размерами тела, множитель K_1 можно найти с помощью инвариантного интеграла [4]:

$$J = \int_{(L)} U dz - [\tau_{rz}\cos(n, r) + \tau_{\theta z}\cos(n, z)] \frac{\partial V}{\partial r} dl$$

С одной стороны, $J = \frac{K_{III}^2}{2G}$, где K_{III} — коэффициент интенсивности напряжений τ_{yz}. С другой стороны, вычисляя J по контуру внутри пластической зоны, имеем $J = \frac{K_1^{2(1+\beta)} \pi (1+2\beta)^{1+2\beta} \Gamma_0}{2^{1+\beta}(1+\beta)^{1+\beta} T_0^{1+2\beta}}$, где T_0 — предел текучести, Γ_0 — деформация на пределе текучести. Учитывая инвариантность J, получим

$$K_1 = \left[K_{III} \sqrt{\frac{2^{\beta}(1+\beta)^{1+\beta}}{\pi(1+2\beta)^{1+2\beta}}} T_0^{\beta} \right]^{\frac{1}{1+\beta}}$$

Подстановка этого выражения в (3.5), (3.6) дает выражения, полностью совпадающие с результатами Райса [2].

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 V 1975

Հ. Բ. ԱՂԱԼԱՐՅԱՆ

ՃԱՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿ ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է լարումների կոնցենտրատորներ պարունակող առաձգա-պլաստիկական պտտման մարմինների ոլորման խնդիրը։ Առաջարկվում է լուծման ընդհանուր մեթոդ, որը թույլ է տալիս մի շարք դեպքերում էֆեկտիվ օգտագործել հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում ունեցած հաշվարկները։ Ցույց է տրվում, որ ասիմպտոտիկ մոտավորությամբ ստացված արդյունքները ամբողջությամբ համընկնում են հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում հայտնի արդյունքների հետ։

ON THE PROBLEM OF TORSION OF AXISYMMETRIC ELASTIC-PLASTIC SOLIDS WITH A CRACK

O. B. AGALARIAN

S u m m a r y

A problem of torsion of elastic-plastic axisymmetric solids, containing concentrators of stress, is studied.

A general method of solution permitting in some cases to use effectiveiy the results obtained for antiplane strain is suggested. In asymptotic approximation the results are presented coinciding with the well-known data on antiplane strain.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейбер Х.* Теория концентрации касательных напряжений в призматических телах при произвольной нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Прикл. механ., 1961, № 4.
2. *Райс.* Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге. МП. 1967, 2.
3. *Edmunds T. M. and Willis J. R.* Analysis of a crack sited at a notch in an elastic-perfectly plastic strip subjected to longitudinal shear. Int. J. of Fracture, 1976, vol. 12, No. 3, pp. 419–433.
4. *Rice J. R.* A path independent integral and the appropriate analysis of strain concentration by notches and cracks. Trans. ASME. 1968, ser. E, vol. 35, No. 4.