

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, И. Н. ЗЛАТИНА

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Динамические контактные задачи для упругого полупространства при отсутствии сцепления между штампом и основанием рассматривались ранее в работах Н. М. Бородачева, В. Г. Буряка, А. О. Awojobi and F. Grooten-huis; Karasudhi et al. [1—5]. Для решения этих задач использовались, как правило, два метода: сведение поставленной задачи к интегральному уравнению Фредгольма I рода [1, 2] или к парным интегральным уравнениям [3—5].

В работе [2], где решается плоская задача, было построено приближенное решение, основанное на аппроксимации ядра уравнения Фредгольма. В статье [1] то же интегральное уравнение Фредгольма I рода исследовалось методом, восходящим к Зоммерфельду [6]. Полученная при помощи этого метода двучленная низкочастотная асимптотика не может быть, по-видимому, улучшена при помощи регулярной процедуры.

В работах [1, 4, 5] поставленные динамические задачи для полупространства сводились к парным интегральным уравнениям, решение которых строилось с помощью известного метода [7, 8], развитого применительно к статическим проблемам. В работе [4] авторы используют низкочастотное разложение весовой функции, входящей в парные уравнения задачи, и строят два первых члена разложения. Этот метод вряд ли корректен, так как используемые приближения не являются равномерными, о чем свидетельствует, например, тот факт, что слагаемые, содержащие логарифмы частоты, в плоском случае отсутствуют. Кроме того, заметим, что интегральные уравнения Фредгольма II рода, к которым сводятся парные интегральные уравнения в [3, 5], не допускают эффективного асимптотического решения для низких частот.

В связи с этим представляется интересным рассмотрение решения плоской и осесимметричной контактной задачи, которое основано на сведении парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Последнее, в свою очередь, решается для случая малого параметра  $ka$  ( $k$  — одно из волновых чисел,  $a$  — характерный параметр штампа в плане).

Ряд родственных задач о динамическом контакте полуплоскости с упругими накладками изучен в работах [9, 10].

1. Рассмотрим сначала случай, когда на упругом полупространстве расположен жесткий ленточный штамп под действием силы  $Pe^{i\omega t}$ , направленной вдоль оси  $z$ . В предположении, что трение между штампом и основа-

нием отсутствует, для амплитудных значений вектора перемещений и тензора напряжений имеем следующие граничные условия:

$$w|_{z=0} = \delta, \quad 0 < x < a \quad (1.1)$$

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad a < x < \infty \quad (1.2)$$

$$\tau_{xz}|_{z=0} = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (1.3)$$

Здесь  $\delta$  — неизвестная амплитуда колебаний штампа.

Решение динамических уравнений будем искать согласно [11] в потенциалах Гельмгольца — Лямэ  $F$  и  $\Phi$ , которые связаны с  $u$  и  $w$  с помощью соотношений

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.4)$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.5)$$

и удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\Delta F + k_1^2 F = 0 \quad (1.6)$$

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0 \quad (1.7)$$

Здесь  $k_1^2 = \frac{\omega^2 d}{G} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ ;  $k_2^2 = \frac{\omega^2 d}{G}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига,  $d$  — плотность.

Решение уравнений (1.6), (1.7) представим в виде интегралов

$$F = \int_{\Gamma_+} \gamma_1^{-1} A_1(\lambda) e^{-\gamma_1 z} \cos \lambda x d\lambda \quad (1.8)$$

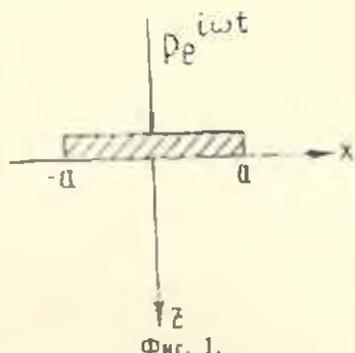
$$\Phi = \int_{\Gamma_+} A_2(\lambda) e^{-\gamma_2 z} \sin \lambda x d\lambda \quad (1.9)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

$A_1(\lambda)$ ,  $A_2(\lambda)$  — неизвестные функции, имеющие особенности: точки ветвления при  $\lambda = k_1$ ,  $k_2$  и разрывный полюс  $\lambda = k_R$ ; контур  $\Gamma_+$  (фиг. 2) выбран с учетом этих особенностей и условия Зоммерфельда [6].

Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.1) — (1.3), приходим к следующим парным уравнениям:

$$\int_{\Gamma_+} C(\lambda) [1 + \rho(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda = -\delta^{-1/2}, \quad 0 < x < a \quad (1.10)$$

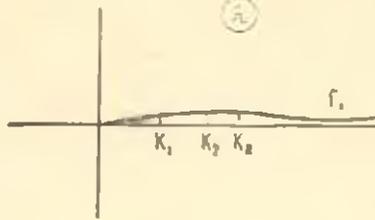


$$\int_{\Gamma} \gamma_1(i) C(i) \cos i x di = 0, \quad a < x < \infty \quad (1.11)$$

где  $\varphi(i) = \frac{2k_2^2 \gamma_{12}^2 - \theta [(2i^2 - k_2^2)^2 - 4i^2 \gamma_{11} \gamma_{12}]}{\theta [(2i^2 - k_2^2)^2 - 4i^2 \gamma_{11} \gamma_{12}]}$ , причем  $\varphi = O(i^{-2})$  при  $i \rightarrow \infty$ .

Кроме того,

$$\theta = -2(1 - \nu) \quad (1.12)$$



$$A_1(i) = -\frac{2i^2 - k_2^2}{k_2^2} \theta |1 + \varphi(i)| C(i) \quad (1.13)$$

$$A_2(i) = \frac{2i}{k_2^2} \theta |1 + \varphi(i)| C(i)$$

Фиг. 2.

Здесь важно отметить одну существенную особенность плоской динамической задачи: при построении решения парных интегральных уравнений необходимо учитывать, что в плоской статической задаче перемещения, возникающие в полуплоскости под действием неуравновешенной нагрузки на границе, имеют логарифмическую особенность на бесконечности [12]. Эту логарифмическую часть следует выделить особо в решении динамической задачи, если частоты колебаний невелики.

Согласно методу, развитому для аналогичного электродинамического случая в работе [13], будем искать решение уравнений (1.10), (1.11) в виде

$$C(i) = x \gamma_{11}^{-1} J_0(\alpha_{11}) + ik_2 \int_0^a t \gamma_1(t) J_1(t \gamma_1) dt \quad (1.14)$$

Здесь  $x$  — неизвестная пока постоянная,  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  — функции Бесселя.

Не останавливаясь на подробностях решения парных уравнений, которые хорошо известны [13, 14], отметим лишь разрывные интегралы, лежащие в основе решения:

$$\int_0^t J_0(t \sqrt{t^2 - k^2}) \cos i x di = \begin{cases} \frac{\text{ch } k |t^2 - x^2|}{\sqrt{t^2 - x^2}}, & x < t \\ 0, & x > t \end{cases} \quad (1.15)$$

$$i \int_0^t \frac{k}{\sqrt{t^2 - k^2}} J_1(t \sqrt{t^2 - k^2}) \cos i x di = \begin{cases} \cos kx, & x < t \\ \cos kx - \frac{x \cos k \sqrt{x^2 - t^2}}{\sqrt{x^2 - t^2}}, & x > t \end{cases} \quad (1.16)$$

Эти формулы позволяют свести парные уравнения к двум интегральным уравнениям Фредгольма II рода для  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ , с которыми  $\varphi(t)$  связана соотношением

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \kappa\varphi_2(t) \tag{1.17}$$

Итак,

$$\varphi_n(t) = f_n(t) - \int_0^a K_n(s, t) \varphi_n(s) ds, \quad 0 < t < a, \quad n = 1, 2 \tag{1.18}$$

$$f_1(t) = -b^{-1/2} J_1(ik_1 t), \quad f_2(t) = -\frac{1}{ik_1 \Gamma} \int_{\Gamma} [1 + \varphi(\lambda)] J_0(\alpha_{11}) J_1(t\gamma_1) d\lambda \tag{1.19}$$

$$K(s, t) = \int_0^{\lambda_1} \gamma_1 J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1) d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\infty} (\gamma_1 - \lambda) J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1) d\lambda + \int_{\Gamma_+} \gamma_1 \varphi(\lambda) J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1) d\lambda \tag{1.20}$$

Для окончательного определения  $\varphi(t)$  остается найти постоянную  $\kappa$ . Полагая  $z = 0$  в уравнении (1.10) и подставляя туда выражение для  $C(\lambda)$ , получим

$$\kappa = -\frac{b^{-1/2} - ik_1 \int_{\Gamma} \gamma_1(t) X d\lambda}{Z + ik_1 \int_0^a \varphi_2(t) X dt} \tag{1.21}$$

$$Z = \int_{\Gamma} [1 + \varphi(\lambda)] \gamma_1^{-1} J_0(\alpha_{11}) d\lambda \tag{1.22}$$

$$X = \int_{\Gamma} [1 + \varphi(\lambda)] J_1(t\gamma_1) d\lambda \tag{1.23}$$

Ряд величин, представляющих особый интерес, можно выразить непосредственно через функцию  $\varphi(t)$ . Так, из (1.8), (1.9), (1.3), (1.4) при помощи (1.15) получаем формулу для контактного напряжения

$$\sigma_x(x, 0) = -2G \left\{ [x - ik_1 a \varphi(a)] \frac{\operatorname{ch} k_1 \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + k_1 \int_0^a [\varphi(t)] \frac{\operatorname{ch} k_1 \sqrt{t^2 - x^2}}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right\}, \quad 0 < x < a \tag{1.24}$$

откуда следует выражение для коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{2(a-x)} \sigma_z(x, 0) = \frac{2G [ik_1 a z(a) - x]}{a} \quad (1.25)$$

Выражение (1.24) позволяет также замкнуть решение, исключив неизвестное смещение штампа  $\delta$ , для которого из уравнения движения штампа получаем следующее выражение:

$$Q - \omega^2 M \delta = P$$

$$Q = -2G \left\{ [x - ik_1 a z(a)] I_0(k_1 a) + k_1 \int_0^a [z(t)]' I_1(k_1 t) dt \right\} \quad (1.26)$$

где  $M$  — масса штампа, приходящаяся на единицу его длины,  $Q$  — реакция полуплоскости,  $I_0(z)$ ,  $I_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя.

2. Полученное решение позволяет эффективно построить асимптотические разложения искомых величин в случае низких частот ( $k_1 a \rightarrow 0$ ). Интегралы, входящие в (1.18)–(1.21) и имеющие бесконечный предел интегрирования, необходимо преобразовать к конечному промежутку интегрирования, чтобы найти их асимптотику. Эта трудность преодолевается использованием методики [13], модифицированной подходящим для нашего случая образом.

Так, например,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) \gamma_1 J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1) d\lambda = \\ & = \int_{\gamma_1}^i \frac{-2\bar{\gamma}_1^2 k_1^2 - 9[(2i^2 - k_1^2)^2 + 4i^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2]}{9[(2i^2 - k_1^2)^2 + 4i^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2]} J_1(is\bar{\gamma}_1) Y_1(it\bar{\gamma}_1) d\lambda + \\ & + 8i \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_1^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1) d\lambda}{9[(2i^2 - k_1^2)^2 + 16i^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2]} + 8 \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_1^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 J_1(s\gamma_1) Y_1(t\gamma_1) d\lambda}{9[(2i^2 - k_1^2)^2 + 16i^2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2]} d\lambda - \\ & - \pi i \operatorname{Res}[\varphi_1(\lambda) J_1(s\gamma_1) J_1(t\gamma_1)]|_{\lambda=k_R} \\ & 0 \leq s < t \leq a; \quad \bar{\gamma}_n = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}, \quad n = 1, 2 \end{aligned}$$

$k_R$  — решение уравнения Релея и определяется по формуле [16]

$$k_R = \frac{1 + \nu}{0.862 + 1.14\nu} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} k_1$$

В дальнейшем для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} t &= k_1 u, \quad s = a\tau, \quad t = a^{-1}, \quad \bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(\tau) \\ \bar{\varphi}_n(t) &= \bar{\varphi}_n(\tau), \quad n = 1, 2; \quad \varepsilon = k_1 a \end{aligned} \quad (2.1)$$

Необходимые разложения цилиндрических функций получаются при помощи интегрального представления

$$J_1(is\sigma_1) Y_1(is^{-1}\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Y_0[\lambda \tau (s^2 + \tau^2 - 2s\tau \cos \xi)^{1/2}] \cos \xi d\xi$$

и разложения в ряд  $Y_n(z)$ .

В результате ядро интегральных уравнений (1.18) представляется рядом:

$$K(s, t) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(z, \tau) + b_n(z, \tau) \varepsilon^2 \ln \varepsilon] \varepsilon^{2n} \quad (2.2)$$

где коэффициенты определяются непосредственно из (1.19).

Опуская, ввиду громоздкости, их общие выражения, приведем значения первых трех:

$$\begin{aligned} a_0(z, \tau) &= -\alpha_0 \tau z^{-1}; \quad a_1(z, \tau) = \sigma \tau [\alpha_1 + \alpha_2 \ln \tau] - \alpha_3 \tau^2; \\ b_0(z, \tau) &= \beta_0 \tau z; \quad 0 < \tau < 1; \quad a_n, b_n(z, \tau) = b_n, \quad b_n(z, \tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

причем постоянные  $\alpha_n, \beta_n$  являются квадратурами от весовой функции  $\rho(\lambda)$  (1.12) и зависят лишь от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Для случая  $\nu = 0.3$  имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.0519; \quad \beta_0 = -1.3510; \quad \alpha_1 = 0.0162 + i0.7273; \\ \alpha_2 &= -0.0658; \quad \alpha_3 = 0.1061 \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем и далее все числовые выражения относятся к случаю  $\nu = 0.3$ .

Свободные члены уравнения (1.20) также представляются рядами по параметру  $\varepsilon$ :

$$f_1(t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau) \varepsilon^{2n}; \quad c_n(\tau) = \frac{(-\tau)^{n+1}}{(2^{n+1}) n! (n+1)!} \quad (2.5)$$

$$f_2(t) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} [p_n(\tau) + q_n(\tau) \ln \varepsilon] \varepsilon^{2n}$$

$$p_0(\tau) = l_1 \tau; \quad q_0(\tau) = l_0 \tau; \quad l_0 = -i0.1886; \quad l_1 = 0.2316 - i1.1980$$

$$p_1(\tau) = l_2 \tau^2; \quad q_1(\tau) = l_3 \tau^2$$

Разыскивая, наконец,  $\bar{\varphi}_n(\tau)$ ,  $n = 1, 2$ , в виде разложений

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = \bar{\sigma}_2 \left| \Phi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \Phi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right| \quad (2.6)$$

$$\bar{\varphi}_m(\tau) = \varepsilon \left| \varphi_{1,0}(\tau) \ln \varepsilon + \psi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \psi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right|$$

и подставляя (2.2)—(2.6) в уравнения Фредгольма (1.18), определяем искомые коэффициенты (2.6) через известные величины, входящие в (2.2)—(2.5):

$$\Phi_{0,0}(\tau) = C_0(\tau); \quad \Phi_{0,n}(\tau) = C_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{0,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau) d\sigma$$

$n = 1, 2, \dots$

$$\Phi_{m,n}(\tau) = - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[ \sum_{k=m+1}^{n-1} \Phi_{m,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=m}^{n-2} \Phi_{m-1,k}(\sigma) b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\psi_{1,0}(\tau) = q_0(\tau); \quad \psi_{0,0}(\tau) = p_0(\tau) \quad (2.7)$$

$$\psi_{0,n}(\tau) = p_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{0,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau); \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\psi_{1,n}(\tau) = q_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[ \psi_{1,0}(\sigma) a_{n-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-1} \psi_{1,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=0}^{n-2} \psi_{0,k}(\sigma) b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\psi_{2,n}(\tau) = - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[ \sum_{k=3}^{n-1} \psi_{2,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-2} \psi_{1,k}(\sigma) b_{n-k-2}(\sigma, \tau) + \psi_{1,0} b_{n-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 3, 4, \dots$$

$$\psi_{m,n}(\tau) = - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[ \sum_{k=m+1}^{n-1} \psi_{m,k}(\sigma) a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=m}^{n-2} \psi_{m-1,k}(\sigma) b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]$$

$$n = 4, 5, \dots; \quad m = 2, 3, \dots, n-1;$$

причем пустые суммы и величины с отрицательными индексами принимаются равными нулю.

В частности, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(z) &= -\frac{\beta_5}{2\theta} \varepsilon \left[ 1 - \frac{1}{4} (\beta_0 z^2 + iz - 2\beta_1 z^2 - \frac{1}{5} \beta_0 z^2 \ln z + O(\varepsilon^4)) \right] \\ \bar{\varphi}_2(z) &= \varepsilon \left[ l_0 \ln \varepsilon + l_1 + \left( l_2 z^2 + \frac{1}{4} l_0 z_0 \right) \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( l_1 - \frac{1}{4} z_0 l_1 \right) \varepsilon^2 + \frac{1}{2} z_0 l_1 \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Найденные формулы позволяют установить вид разложений для всех искомых величин. Так, комплексная амплитуда колебаний штампа представляется разложением

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{P\beta_5}{2-\bar{G}} [d_0 \ln \varepsilon + d_1 - C_1 d_0 \varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon + (d_2 - C_1 d_1 - C_2 d_0) \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \\ &\quad + d_3 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon)] \end{aligned} \quad (2.9)$$

а постоянная  $\chi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{P}{2\pi C_2} \left[ 1 - d_0 C_1 \frac{\varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon}{p} - (d_1 C_1 + d_0 C_2) \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon}{p^2}\right) \right] \\ p &= d_0 \ln \varepsilon + d_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты  $d_n$  находятся из (1.22), а коэффициенты  $C_n$  — из (1.26)

$$\begin{aligned} d_0 &= -0.1224; & C_1 &= -0.0381 - i0.0843 - 0.1224 T \\ d_1 &= 0.3678 - i0.3377; & C_2 &= 1.0990 + i0.2990 + (0.3678 - i0.3377) T \\ d_2 &= 0.0189; & C_3 &= 0.2645 - i0.2411 + (0.0234 - i0.5057) T \\ d_3 &= 0.0234 + i0.5057; & T &= \theta \frac{M}{2-\alpha^2 d}; \quad \nu = 0.3 \end{aligned}$$

Окончательно для контактного напряжения имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, 0) &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{Pae^{i\omega t}}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[ 1 + j_1 z^2 \ln z + \left( j_2 + j_3 \frac{x^2}{a^2} \right) z^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + j_4 \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon}{p}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Pe^{i\omega t}}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\alpha} \left[ j_1' z^2 \ln z + j_2' z^2 + O(\varepsilon^4 \ln^2 z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$j_1 = -0.1886; \quad j_1 = 0.4300 + i0.5050 + (0.0450 - i0.0433) \theta \frac{M}{2\pi a^3 d}$$

$$j_2 = -0.6980 - i0.2316; \quad j_1 = -i0.3108$$

$$j_3 = 0.5 \quad j_2 = 0.3377 + i0.3678$$

3. Рассмотрим теперь осесимметричный случай, когда на полупространство действует жесткий круглый в плане штамп радиуса  $a$ , совершающий гармонические колебания с неизвестной комплексной амплитудой  $b$  под вертикальной нагрузкой  $P$ .

$$\int_0^a [1 + \gamma(t)] C(t) J_0(ir) dt = b, \quad 0 < r < a \quad (3.1)$$

$$\int_a^\infty \gamma_1(t) C(t) J_0(ir) dt = 0, \quad a < r < \infty \quad (3.2)$$

$$\gamma(t) = \frac{2k_1^2 \gamma_1^2 - b [(2t^2 - k_2^2)^2 - 4t^2 \gamma_1 \gamma_2]}{b [(2t^2 - k_2^2)^2 - 4t^2 \gamma_1 \gamma_2]} \quad b = -2(1 - \nu) \quad (3.3)$$

Следуя подходу работы [15], положим

$$C(t) = \frac{\lambda}{\gamma_{10}} \int_0^a \psi(t) \cos t \gamma_{10} dt \quad (3.4)$$

где  $\psi(t)$  подлежит определению,  $\psi(t) \in C^1[0, a]$ .

Принимая во внимание разрывные интегралы:

$$\int_0^a \frac{\sin t \sqrt{t^2 - k^2}}{\sqrt{t^2 - k^2}} J_0(ir) dt = \begin{cases} \frac{\text{ch } k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

$$\int_0^a \frac{\cos t \sqrt{t^2 - k^2}}{\sqrt{t^2 - k^2}} J_0(ir) dt = -\frac{i \text{sink} \sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}} +$$

$$+ \begin{cases} 0, & r < t \\ \frac{\cos k \sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > t \end{cases} \quad (3.5)$$

из (3.1)—(3.3) получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно  $\psi(t)$

$$\psi(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^a \psi(s) \left[ G(s+t) - G(s-t) + \frac{\operatorname{sh} k_1(s+t)}{i(s+t)} + \frac{\operatorname{sh} k_1(s-t)}{i(s-t)} \right] ds = \frac{2\gamma}{\theta z} \operatorname{ch} k_1 t, \quad 0 \leq t \leq a \quad (3.6)$$

причем

$$G(u) = \int_{\Gamma_+} \lambda \gamma_1^{-1} \psi(t) \cos u \gamma_1 dt$$

Выражение для контактного напряжения  $\sigma_z(r, 0)$  имеет вид

$$\sigma_z(r, 0) = 2G \left[ \psi(a) \frac{\operatorname{ch} k_1 \sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_0^a \psi'(t) \frac{\operatorname{ch} k_1 \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right] \quad (3.7)$$

$$0 < r < a$$

откуда для коэффициента интенсивности следует выражение

$$K_I = \frac{2G\psi(a)}{\sqrt{a}}$$

Амплитуда колебаний штампа  $\delta$  определяется из уравнения движения штампа согласно формулам

$$(Q - M\omega^2 \gamma) = P$$

$$Q = -2z \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr = \frac{4\pi G}{k_1} \left[ \psi(a) \operatorname{sh} k_1 a - \int_0^a \psi'(t) \operatorname{sh} k_1 t dt \right] = 4\pi G \int_0^a \psi(t) \operatorname{ch} k_1 t dt \quad (3.8)$$

4. Низкочастотное асимптотическое разложение решения строится в данном случае значительно проще, чем в плоской задаче, ибо не содержит логарифмических членов, так как предельная статическая задача не имеет особенностей.

Переходя к безразмерным переменным (2.1), из (3.7) при помощи контурного интегрирования получаем разложение ядра интегрального уравнения (3.6)

$$K(z, \tau) = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \tau^{2n+1} \right] \quad (4.1)$$

$$\alpha_n(z, \tau) = \alpha_n [(z + \tau)^{2n} + (z - \tau)^{2n}], \quad \beta_n(z, \tau) = \beta_n [(z + \tau)^{2n+1} - (z - \tau)^{2n+1}]$$

$$\alpha_n, \beta_n = \text{const}$$

здесь

$$z_0 = -i0.8957; \quad z_1 = i0.7301; \quad \beta_0 = 0.2991 + i0.1609$$

при  $\nu = 0.3$

поэтому

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^+(z) z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^-(z) z^{2n+1}$$

и

$$\begin{aligned} \psi_n^+(z) &= \frac{2z}{\pi} \frac{z^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 dz \sum_{k=0}^{n-1} (i\beta_k \bar{\alpha}_{n-k-1} + \beta_k \bar{\beta}_{n-k-1}) \\ \psi_n^-(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 dz \sum_{k=0}^n (i\beta_k \bar{\alpha}_{n-k} + \beta_k \bar{\beta}_{n-k-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

На основе (4.2) получаются разложения для искомых величин

$$\begin{aligned} z_x(r, 0) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \left[ 1 + \left( j_1 + j_2 \frac{r^2}{a^2} \right) \varepsilon^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( j_3 + j_4 \frac{r^2}{a^2} \right) \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} [j_1 \varepsilon^2 + j_2 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)] \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$j_1 = 0.4048 + i0.4488; \quad j_3 = -0.2267 - i0.8140; \quad j_1 = 1$$

$$j_2 = -0.5; \quad j_4 = -i0.2851; \quad j_2 = -i1.500$$

Сходимость этих рядов для достаточно малых  $\varepsilon$  может быть легко обоснована методом мажорант. Подобное обоснование проводится и в плоском случае, хотя и несколько сложнее.

Авторы выражают признательность А. Н. Златину за помощь в вычислениях.

Ա. Ս. ՉԻԲԵՐԿԵՅՏ, Ի. Ն. ՉԼԱՏԻՆԱ

ԿՐԱՆԱՐՔՈՒԹՅԱՆ, ԵՎ ԿՐՍԱՏԱՐԱՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ  
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Զույգ խնտեղրայ հալասաբումների մեթոդով կատուցվել է կոշտ դրոշմի ազդեցության տակ գտնվող կիսահարթության և կիսատարածության կալուծացված ստատանումների խնդրի լուծումը: Խնդրի լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի խնտեղրայ հալասարմանը, որը թույլ է տալիս ցածր հաճախականության դեպքում տպավորիչ ասիմպտոտական լուծում: Ստացվել են կոնտակտային լարման, դրոշմի տատանումների ամպլիտուդայի և լարումների ինտենսիվության գործակցի համար արտահայտություններ:

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR THE HALF-PLANE  
AND HALF-SPACE

A. S. SILBERGLEIT, I. N. ZLATINA

## S u m m a r y

The stationary vibration problem for a rigid stamp placed on the elastic half-plane or half-space is solved by the method of dual integral equations. The problem is reduced to Fredholm integral equation of the second kind, its effective asymptotic low-frequency solution is obtained. The expressions for the contact stress, the amplitude of the stamp vibration and the stress intensity factor are given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н. М. Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, 3.
2. Буряк В. Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости МТТ, Изв. АН СССР, 1972, № 6.
3. Бородачев Н. М. О решении динамической контактной задачи для полупространства в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и машиностроение 1960, № 4.
4. Awojndi, Grootenhuis P. Vibration of rigid bodies on semiinfinite elastic media. Proc. of the Royal Society, Ser. A, Math. and Phys. Sci., 1955, vol. 287, No. 1408.
5. Karasudhi P., Keer L. M., Lee S. L. Vibratory motion of a body on an elastic half plane. J. Appl. Mech., 1968, 35, 4.
6. Зоммерфельд А. Оптика. М., Изд. «Иностранная литература», 1953.
7. Cooke J. A solution of Tranters' dual integral equations problem. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1955, 9, 1.
8. Лебедев Н. Н. Распределение электричества на тонком параболическом сегменте. Докл. АН СССР, 1957, 114, 3.

9. Григорян Э. Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изд. АН СССР, 1975, 5.
10. Григорян Э. Х. О динамической задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, 1974, 38, 2.
11. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., ОНТИ, 1937.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд. «Наука», 1968.
13. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте. ЖТФ, 1972, XLII, 4.
14. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины. ЖТФ, 1973, XLIII, 1.
15. Ахисезер Н. И., Ахисезер А. Н. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. Докл. АН СССР, 1956, 109, 1.
16. Achenbuech J. D. Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publishing Company, 1976.