

Г. А. АВЕТИСЯН

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ОДНОРОДНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО  
 СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В УСЛОВИЯХ  
 НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается неустановившаяся ползучесть по теории течения изги-  
 баемого поперечной силой однородного призматического стержня с сече-  
 нием, имеющим ось симметрии. Один из торцов стержня заделан. Изги-  
 бающая сила приложена к другому торцу стержня и направлена по его оси  
 симметрии. На торцах стержня условия удовлетворяются в смысле Сен-  
 Венана. В качестве конкретного примера рассмотрен поперечный изгиб  
 стержня прямоугольного сечения.

Задача о чистом изгибе стержня, находящегося в условиях неустано-  
 вившейся ползучести, исследована на основании различных теорий ползу-  
 чести [1—4]. В работе [5] рассмотрена неустановившаяся ползучесть  
 призматического стержня под комбинированным действием изгибающего и  
 крутящего моментов и продольной силы. Задача о поперечном изгибе со-  
 ставного стержня решена [6] с учетом линейной ползучести [7] материалов.  
 Изгиб железобетонной балки с учетом ползучести сжатой зоны бетона рас-  
 смотрен в работе [8]. Релаксация напряжений в изгибаемом стержне, на-  
 ходящемся в условиях неустановившейся ползучести, исследована в рабо-  
 те [9]. Поперечный изгиб однородного стержня с учетом ползучести мате-  
 риалов при помощи осреднения рассмотрен в [10].

1. Начало координат поместим в центре тяжести заделанного торца  
 призматического стержня, направляя ось  $z$  параллельно образующим бо-  
 ловой поверхности стержня, а ось  $x$  — по оси симметрии сечения. К свобо-  
 дному концу стержня по оси симметрии приложена сила  $P$ .

Материал стержня принимается несжимаемым и в соотношении между  
 интенсивностями напряжений и скоростей деформаций пренебрегаются ка-  
 сательные напряжения.

Для распределения скоростей осевой деформации примем выражение

$$v_{zz} = A_0(z, t) x + B_0(z, t) \quad (1.1)$$

где  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$  — пока неизвестные функции.

Соотношение (1.1) является следствием геометрической гипотезы  
 плоских сечений.

Примем также, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \quad (1.2)$$

Имеем условие несжимаемости материала стержня

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0 \quad (1.3)$$

Воспользуемся квазилинейными уравнениями неустановившейся ползучести [11]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{v(\varepsilon_0, t)}{\sigma_0} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — тензоры напряжений и скоростей деформаций,  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{ii}}{3}$ ,

$\varepsilon_{ij}^0$  — символ Кронекера, а  $\varepsilon_0$  — интенсивность напряжений

$$\varepsilon_0 = 1 \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + 3(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2)} \quad (1.5)$$

Воспользуемся степенным законом ползучести

$$v(\varepsilon_0, t) = A(t) \varepsilon_0^n \quad (1.6)$$

где  $A(t) > 0$  и зависит также от температуры.

На основании (1.2) и (1.4) получим

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yy} = -\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{2} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.7)$$

При помощи (1.2), (1.4) — (1.7) находим

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{A(t)} [\varepsilon_{zz}^0 + 3(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2)]^{\frac{1-n}{n}} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.8)$$

Учитывая, что в зоне интенсивного деформирования стержня  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  малы по сравнению с  $\varepsilon_{zz}$ , при помощи (1.5) и (1.8) получаем

$$\varepsilon_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}-1} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_0 = |\varepsilon_{zz}| = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}} \quad (1.10)$$

Функции  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$  определяются из условий равновесия части стержня, лежащего между произвольным и торцевым сечениями

$$\int_0^x \int_0^y \varepsilon_{zz} x dx dy = P(l-z) \quad (1.11)$$

$$\int_0^x \int_0^y \varepsilon_{zz} dx dy = 0$$

Используя здесь (1.9), находим

$$[A(t)]^{-\frac{1}{n}} \int_0^x \int_0^y |A_0(z, t) x + B_0(z, t)|^{\frac{1}{n}-1} [A_0(z, t) x + B_0(z, t)] x dx dy = P(l-z) \quad (1.12)$$

Это условие для произвольного  $z$  будет выполняться, если

$$A_0(z, t) = \alpha(t) B_0(z, t) = \gamma(t)(l-z)^n \quad (\gamma(t) > 0) \quad (1.13)$$

Внося (1.13) в (1.12) и приравнявая коэффициенты при  $(l-z)$ , получаем уравнение

$$[A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \iint \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| x \right. dx dy = P \quad (1.14)$$

Из второго уравнения (1.11) с учетом (1.9) и (1.13) будем иметь

$$\iint_Q \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. dx dy = 0 \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) определяются  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$ , следовательно, и  $A_0(z, t)$  и  $B_0(z, t)$ .

Тогда из (1.9), имея ввиду (1.13), получим

$$\sigma_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. (l-z) \quad (1.16)$$

2. Уравнения равновесия для рассматриваемого случая будут

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. = 0$$

Первые два уравнения (2.1) показывают, что касательные напряжения не зависят от координаты  $z$ .

Введя функцию напряжений  $F(x, y, t)$ , удовлетворяем третьему уравнению (2.1)

$$\tau_{yz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{n}{1+n} [A(t)]^{-\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \right. + f(y) \\ \tau_{xz} = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (2.2)$$

где  $f(y)$  — произвольная функция.

Из условия совместности скоростей деформаций с учетом (1.7) и (1.13) находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = n \gamma(t) (l-z)^{n-1} \quad (2.4)$$

Два соотношения, к которым приводятся остальные условия совместности скоростей деформаций, удовлетворяются с точностью отношения порядков  $\gamma_{xy}$  и  $\gamma_{xz}$ .

Интегрируя (2.3) и (2.4), получим

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -n \gamma(t) (l-z)^{n-1} y + C(z, t) \quad (2.5)$$

где  $C(z, t)$  — произвольная функция интегрирования.

Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании (1.6), (1.10) и (1.13) находим

$$\frac{v(\sigma_0, t)}{\sigma_0} = [A(t)]^{\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{n-1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} (l-z)^{n-1} \quad (2.7)$$

При помощи (2.2) и (2.5)–(2.7) находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{n-1}{n} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right| \frac{\partial F}{\partial x} + \\ & + \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{n-1}{n}} f'(y) = \frac{2}{3} [A(t)]^{\frac{1}{n}} [\gamma(t)]^{\frac{1-n}{n}} [-n \gamma(t) y + C_0(t)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь принято

$$C(z, t) = (l-z)^{n-1} C_0(t)$$

3. В качестве приложения рассмотрим призматический стержень прямоугольного сечения при установившейся ползучести. Учитывая симметрию поперечного сечения относительно оси  $x$  и используя (1.9) и (1.11), получаем

$$|A_0(z)|^{\frac{1}{n}} = \frac{\left( \frac{1}{n} + 2 \right) A^{\frac{1}{n}} P(l-z)}{4ba^{\frac{1}{n-1}}} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P(l-z)}{J} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} x = \frac{P(l-z)}{J} |x|^{\frac{1}{n}-1} x \quad (3.2)$$

где  $J = \frac{4ba^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2}$  — обобщенный момент инерции сечения изгибаемого стержня.

Используя (2.2), (2.5) и (2.6), получим

$$\frac{v(z_0)}{\sigma_0} \Delta F + \frac{\sigma}{\partial x} \frac{v(z_0)}{\sigma_0} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{v(z_0)}{\sigma_0} f'(y) = \frac{2nAP^n(l-z)^{n-1}}{2J^n} y + \frac{2}{3} C(z) \quad (3.3)$$

Имеем

$$\frac{v(z_0)}{\sigma_0} = A \left| \frac{P(l-z)}{J} \right|^{n-1} |x|^{\frac{n-1}{n}} \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4) и принимая

$$C(z) = \left| \frac{P(l-z)}{J} \right|^{n-1} C_0$$

из (3.3) находим

$$|x|^{\frac{n-1}{n}} \Delta F + \frac{n-1}{n} |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} x \frac{\partial F}{\partial x} + |x|^{\frac{n-1}{n}} f'(y) = \frac{2nP}{3J} y + \frac{2C_0}{3A} \quad (3.5)$$

Граничное условие задачи записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = - \left[ \frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f'(y) \right] \frac{dy}{ds}$$

На сторонах  $y = \pm b$  (фиг. 1) контура  $\frac{dy}{ds} = 0$ , поэтому, чтобы на всем контуре было  $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ , достаточно положить

$$\frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f'(y) = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (3.6)$$

то есть  $F = \text{const} = C$  при  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$ .

Так как рассматриваемая область односвязна, то можно принять [12]  $C=0$ .

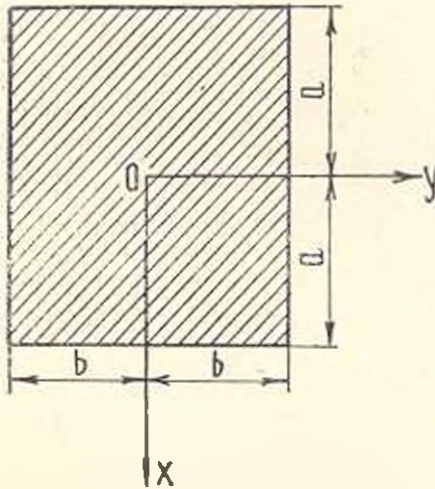
В случае, когда изгибающая сила проходит через центр изгиба, то есть изгиб не сопровождается кручением, в (3.5) для сечения с двумя осями

симметрии будем иметь  $C_0 = 0$  [12]. Тогда при помощи (3.6) окончательно находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$|x|^{\frac{n-1}{n}} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{n-1}{n} |x|^{\frac{1-n}{n}} \operatorname{sign} x \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2nP}{3f} y \quad (3.7)$$

и граничному условию

$$F = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad y = \pm b \quad (3.8)$$



Фиг. 1.

4. Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8), ищем в виде ряда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.1)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{b} \int_{-b}^b F(x, y) \sin \frac{k\pi}{b} y dy \quad (4.2)$$

и функции  $\varphi_k(x)$  должны быть подчинены граничному условию  $\varphi_k(\pm a) = 0$ .

Чтобы найти  $\varphi_k(x)$ , умножим уравнение (3.7) на  $\frac{1}{b} \sin \frac{k\pi}{b} y dy$  и проинтегрируем по  $y$  в интервале  $(-b, b)$ .

Используя обозначение (4.2), имеем

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{x} \frac{d\varphi_k}{dx} - \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 \varphi_k = (-1)^k \frac{4bnP}{3k\pi f} x^{\frac{1-n}{n}} \quad (4.3)$$



Ввиду симметричности сечения относительно  $x$  достаточно решение рассмотреть при  $x \geq 0$ .

При помощи замены переменных уравнение (4.3) приводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\zeta^2 \frac{d^2 u_k}{d\zeta^2} + \zeta \frac{du_k}{d\zeta} + (\zeta^2 - \nu^2) u_k = (-1)^{k+1} \frac{2P}{3\nu f i_k^3} \frac{\zeta^{\nu+1}}{(i\lambda_k)^{\nu-1}} \quad (4.4)$$

$$u_k = \frac{\zeta_k}{x^{\frac{1}{2\nu}}}, \quad \zeta_k = \frac{ik\pi}{b} x = i\lambda_k x, \quad \nu = \frac{1}{2n} \quad (4.5)$$

Общее решение этого уравнения будет [13]

$$u_k(\zeta) = c_{1k} J_\nu(\zeta) + c_{2k} J_{-\nu}(\zeta) + u_{1k}(\zeta)$$

Здесь  $J_\nu(\zeta)$  и  $J_{-\nu}(\zeta)$  — функции Бесселя мнимого аргумента порядка  $\nu$  и  $-\nu$  соответственно, а  $u_{1k}(\zeta)$  — частное решение уравнения (4.4)

$$u_{1k}(\zeta) = (-1)^{k+1} \frac{P}{3\nu f i_k^3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^\nu}{i_k^{\nu-1}} L_\nu(\zeta) \quad (4.6)$$

где  $L_\nu(\zeta)$  — функция Струве.

Согласно (4.5) будем иметь

$$\zeta_k(x) = x^\nu \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \quad (4.7)$$

Для функции напряжений получается выражение

$$F(x, y) = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.8)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) P}{3\nu f i_k^{\nu+2}} \quad (4.9)$$

При помощи (2.2) и (4.8) находим напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{b} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right. \\ & \left. + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \cos \frac{k\pi}{b} y + \frac{P}{(2\nu+1)J} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\tau_{yz} = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \Big| \sin \frac{k\pi}{b} y - \\
 - x^\nu & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{1k} I_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + c_{2k} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Так как  $\tau_{yz}$  на линии  $x=0$  — конечная величина, то коэффициент  $c_{2k}$  должен быть равным нулю. Из условия  $F(a, y) = 0$  определяем  $c_{2k}$

$$c_{2k} = - \frac{a_k L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \quad (4.12)$$

Таким образом, учитывая (4.9) и (4.12), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+2} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+3/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times \\
 & \times \left[ - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \\
 \tau_{xz} &= \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+1} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+1/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}} \left[ - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \times \right. \\
 & \times \left. I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \cos \frac{k\pi}{b} y + \frac{P}{(2\nu+1)f} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz} &= - \frac{2^\nu \Gamma \left( \nu + \frac{1}{2} \right) b^{\nu+2} P}{3 \sqrt{\nu} \pi^{\nu+3/2}} x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times \\
 & \times \left( - \frac{L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} a \right)}{I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} a \right)} \left[ I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + \frac{x}{\nu} I_{-\nu} \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[ L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) + \frac{x}{\nu} L_\nu \left( \frac{k\pi}{b} x \right) \right] \right) \sin \frac{k\pi}{b} y \quad (4.14)
 \end{aligned}$$



При помощи (4.13) и (4.14) находим скорость деформации

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xz} = & \frac{2^{\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) b^{\nu+1} AP}{J \nu \pi^{\nu+1/2}} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} \times \\ & \times x^{1-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}} \left[ -\frac{L_-(i_k a)}{L_-(i_k a)} L_-(i_k x) + L_+(i_k x) \right] \cos i_k y + \\ & + \frac{3}{2} \frac{PA}{(2\nu+1)J} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} x^{1-2\nu} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} = & -\frac{2\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) b^{\nu+2} AP}{J \pi^{\nu+3/2}} \left[ \frac{P(l-z)}{J} \right]^{\frac{1}{2\nu}-1} \times \\ & \times x^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \left[ -\frac{L_-(i_k a)}{L_-(i_k a)} \left[ L_-(i_k x) + \frac{x}{\nu} L_-(i_k x) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ L_+(i_k x) + \frac{x}{\nu} L_+(i_k x) \right] \right] \sin i_k y \quad i_k = \frac{k\pi}{b} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отметим, что из найденного решения при  $\nu=1$  получается классическое решение задачи Сен-Венана об изгибе консольной балки прямоугольного сечения.

Используя связь [13] между функциями  $L_+$  и  $L_-$ ,

$$L_+(x) = L_-(x) - \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \sin(x, u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du$$

и рекуррентные соотношения [13] для  $L_+(x)$  и  $L_-(x)$ , после некоторых преобразований выражения (4.13—4.14) представляются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xz} = & \frac{2ba^{\nu} P x^{\nu}}{3J \nu \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left[ \frac{L_-(i_k x)}{L_-(i_k a)} \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du - \right. \\ & \left. - \left(\frac{x}{a}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \sin(i_k x u) (1+u^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} du \right] \cos i_k y + \\ & + \frac{P}{(2\nu+1)J} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{2b^2 a^2 P x^{v-1}}{3j\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left\{ \frac{I_{-\nu}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} du + \right. \\ & + \frac{i_k x}{2} \frac{1}{v} \left[ \frac{I_{-\nu-1}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} + \frac{I_{-\nu+1}(i_k x)}{I_{-\nu}(i_k a)} \right] \int_0^{\infty} \sin(i_k a u) (1+u^2)^{-\frac{1}{2}} du \\ & \left. - \frac{2}{v} \left( v - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{x}{a} \right)^v \int_0^{\infty} \sin(i_k x u) (1+u^2)^{-\frac{3}{2}} du \right\} \sin i_k y \quad (4.18) \end{aligned}$$

5. Рассмотрим изгиб однородного стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами  $2a$  и  $a$  из стали марки ЭИ-69. При температуре  $t=600^\circ\text{C}$  характеристики ползучести этого материала имеют следующие значения [14]:

$$n = 3; \quad A = 1.95 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{8.3}$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

и вычисляя интегралы в (4.17) и (4.18) с точностью  $10^{-4}$  для  $\frac{a}{8} < x < a$  и  $k > 1$ , получим расчетные выражения для касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{P^*} = & \frac{3}{\pi} \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \frac{I_{-1/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6}(2k\pi)} \left[ \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right] - \right. \\ & \left. - \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \left[ \frac{1}{2k\pi \frac{x}{a}} + \frac{0.666}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^3} - \frac{0.0036}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^5} \right] \right\} \cos \frac{k\pi}{b} y + \\ & + 1.125 \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^{4/3} \right] \\ \frac{\tau_{yz}}{P^*} = & -\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{x}{a} \right)^{5/6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left\{ \frac{I_{-1/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6}(2k\pi)} \left[ \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right] + 4 \left( \frac{x}{a} \right)^{1/6} \left[ \frac{1}{2k\pi \frac{x}{a}} + \frac{2.666}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^3} + \frac{0.083}{\left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)^5} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ 6k\pi \frac{x}{a} \left[ \frac{I_{-7/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6} (2k\pi)} + \frac{I_{5/6} \left( 2k\pi \frac{x}{a} \right)}{I_{-1/6} (2k\pi)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2k\pi} + \frac{0.666}{(2k\pi)^3} - \frac{0.0036}{(2k\pi)^5} \right\} \sin \frac{k\pi}{b} y$$

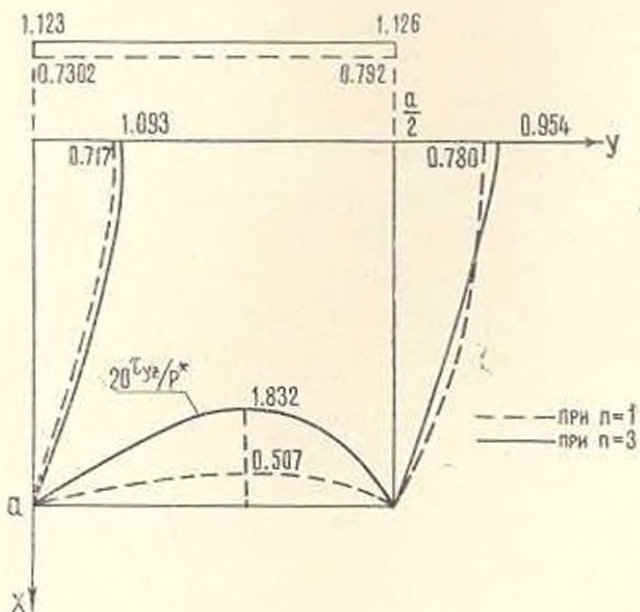
где

$$P^2 = \frac{7P}{18ab}$$

Значения  $\tau_{xz}$  при  $x = 0$  вычисляются непосредственно по (4.13).

Так как сечение стержня симметрично относительно осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1) выражения напряжений приводятся для нижней правой четверти сечения стержня  $\left( 0 < x < a, 0 < y < \frac{a}{2} \right)$ .

На фиг. 2 приведены эпюры распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  при  $x = 0, y = 0, y = \frac{a}{2}$  и  $\tau_{xy}$  при  $x = a$ .



Фиг. 2.

Сопоставляя результаты вычисления с распределением касательных напряжений в случае упругого стержня ( $n=1$ ), замечаем, что напряжение  $\tau_{xz}$  при ползучести на осях симметрии при  $n=3$  незначительно больше соответствующего напряжения при линейной упругости. На некотором расстоянии от оси симметрии ( $y=0$ ) эта разница меняет знак.

Около нейтральной оси максимальные касательные напряжения при ползучести больше, а в зонах интенсивного деформирования около углов сечения стержня меньше соответствующих напряжений при линейной упругости.

Максимальное значение напряжения  $\tau_{yz}^*$  при ползучести мало, как и в случае упругого изгиба, но значительно больше (около трех раз) соответствующего значения напряжения при линейной упругости.

6. С целью установления степени точности принятого приближения и выражении для интенсивности напряжений (1.8) учтем известные из нулевого приближения  $\tau_{xz}^0$  и  $\tau_{yz}^0$ .

При  $n=3$  из (1.8) будем иметь

$$A_0 \tau_{xz}^{*3} + 3A_0 \tau_{xz}^* (\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2}) - \frac{A_0(z)x}{P^{*3}} = 0 \quad (6.1)$$

где

$$\tau_{xz}^* = \frac{\tau_{xz}^0}{P^{*3}}, \quad \tau_{yz}^* = \frac{\tau_{yz}^0}{P^{*3}}, \quad \tau_{yz}^0 = \frac{\tau_{yz}^0}{P^{*3}}, \quad P^* = \frac{7P}{18ab}$$

Уравнение (6.1) относительно  $\tau_{xz}^*$  имеет действительный корень

$$\tau_{xz}^* = (2A)^{-\frac{1}{3}} \left\{ \left[ \frac{A_0(z)x}{P^{*3}} + \sqrt{\frac{A_0^2(z)x^2}{P^{*6}} + 4A^2(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[ \sqrt{\frac{A_0^2(z)x^2}{P^{*6}} + 4A^2(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} - \frac{A_0(z)x}{P^{*3}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (6.2)$$

Для поперечного изгиба стержня прямоугольного поперечного сечения в первом приближении относительно  $A_0(z)$  получаем уравнение

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[ A_0(z) \zeta^2 + \sqrt{A_0^2(z) \zeta^2 + 4A^2 P^{*3} (\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[ \sqrt{A_0^2(z) \zeta^2 + 4A^2 P^{*3} (\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} - A_0(z) \zeta^2 \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \zeta d\zeta d\eta = \frac{(2A)^{\frac{1}{3}} P}{2a^2} \left( \frac{l-z}{a} \right) \quad (6.3)$$

где

$$x = a\zeta, \quad y = \frac{a}{2}\eta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq z \leq l$$

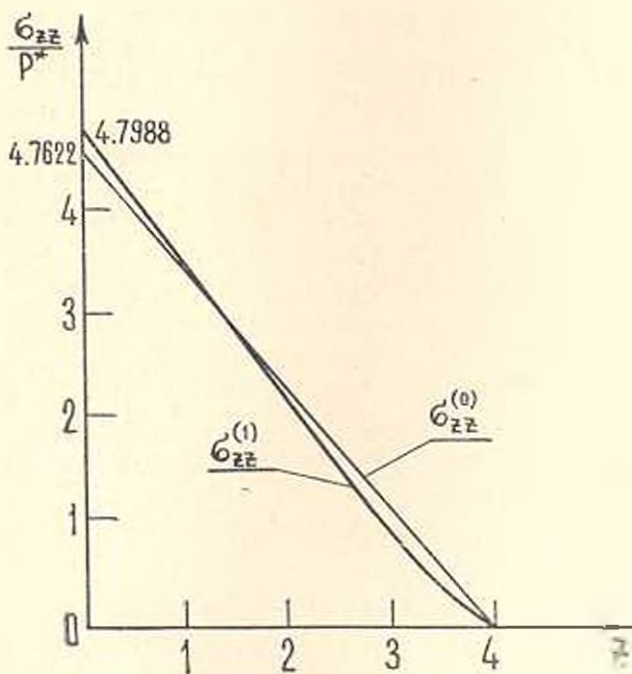
Нулевые приближения  $\tau_{xz}^0$  и  $\tau_{yz}^0$  аппроксимированы с избытком и получены следующие значения:

$$\tau_{xz} = -2.18(\zeta^2 - 1) \quad 2 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 3\eta^2 & 0 \leq \eta < \frac{1}{2} \\ 1.5\zeta & \frac{1}{2} \leq \eta < \frac{3}{4} \\ \zeta [1.5 - 22.65(\eta - 0.75)^2] & \frac{3}{4} \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) с учетом (6.4) решено численно при  $\frac{l}{a} = 4; 16; 32; 64$ .

На фиг. 3 приведены графики зависимости  $\sigma_{zz}$  от  $z$  в нулевом и первом приближениях.



Фиг. 3.

Результаты вычислений показывают, что учет касательных напряжений в выражении интенсивности напряжений для коротких стержней увеличивает максимальные нормальные напряжения (3.2) менее, чем на 4%. Для длинных стержней это изменение незначительно.



## Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԿՈՆՏՈՆԱՑԱՄ ՄՈՂՔԻ ՊԼՅԻՄԱՆԵՐՈՒՄԻ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՄԱՆԵՌ  
ՊՐԻՉԻՄՈՒՄԻ ԶՈՂԻ ԼՈՑՆԱԿԱՆ ՄԵՌՈՒՄԸ

Ա. մ. փ. ս. փ. ս. փ.

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ կայունացած սողքը համասեռ պրիզմատիկ ձողի լայնական ծոման դեպքում: Չողի լայնական հատվածքը ունի համաչափության մի առանցք, որով ուղղված է ծոռղ ուժը:

Օդատազործվում են ոչ կայունացած սողքի քվադրիգծային հավասարումները

$$z_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(z_0, t)}{c_0} (z_{ij} - z_{ij}^0)$$

որտեղ բնորոշվում է

$$V(z_0, t) = A(t) z_0^3$$

Լարումների ֆունկցիայի համար ստացվում է փոփոխական դործակիցներով երկրորդ կարգի գիֆերենցիալ հավասարում: Ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող ձողի ծոման դեպքում այդ հավասարումը բերվում է Բեսսելի անհամասեռ հավասարման:

Բերվում են շոշափող լարումների բաշխման դժադրերը, ՅՈՒՆԵՍԿՈՒՄԻ 69 մակերչի պողոպատի համար, երբ ձողն ունի ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք:

THE TRANSVERSE BENDING OF A HOMOGENEOUS  
PRISMATIC BAR UNDER UNSTEADY CREEP

H. A. AVETICIAN

## S u m m a r y

An unsteady creep for the transverse bending of a homogeneous prismatic bar of axisymmetric cross-section is treated in terms of the theory of ageing.

The quasi-nonlinear equation

$$z_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(z_0, t)}{c_0} (z_{ij} - z_{ij}^0)$$

is used, where

$$V(z_0, t) = A(t) z_0^3$$

is assumed.

A differential equation of the second order with variable coefficients is derived for the function of stresses. For the bending of a rectangular cross-section bar this equation is reduced to the nonhomogeneous Bessel equation.

Some graphs of shear-stress distribution are presented for ЭИ-69 steel of a rectangular cross-section.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М., Машгиз, 1948.
2. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести. Инж. сб., 1951, т. 10.
3. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
4. *Качанов Л. М.* Некоторые вопросы теории ползучести. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1949.
5. *Plechnik S., Chrzapowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending. „Int. j. solids and struct“, 1970, т. 6, No. 4.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
7. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
8. *Манукян М. М.* Изгиб железобетонной балки с учетом неустановившейся ползучести только сжатой зоны бетона. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1960, т. 13, № 2.
9. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
10. *Манукян М. М.* Некоторые задачи нелинейной теории ползучести. диссертация, Ереван, 1964.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., Изд. «Наука», 1966.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1975.
13. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., изд. ИЛ, 1949.
14. *Серенсен С. В. и др.* Несущая способность и расчеты деталей машины на прочность. М., Машгиз, 1963.