ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 5, 1977 Механика

Р. М. БАРСЕГЯН

КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Задачи безнапорной установившейся и неустановившейся фильтрации жидкости (по закону Дарси) в одном пласте и в многослойных грунтах приводятся к решению нелинейных дифференциальных уравнений.

Так, например, для трехслойного грунта, когда верхний безнапорный горизонт через слабопроницаемую перемычку разделяется от нижнего напорного горизонта, при установившемся и неустановившемся режимах фильтрации имеем соответственно

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right)-\omega^2(h-H)+\varepsilon(x)=0, \quad \left(\omega^2=\frac{\bar{k}}{k\bar{T}}\right) \tag{1.1}$$

$$m\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\bar{k}}{\bar{T}}(h-H)+\varepsilon(x) \tag{1.2}$$

где $h(x, t)$ — глубина фильтрационного потока верхнего безнапорного горизонта, $k(x)$ и $\bar{k}(x)$ — коэффициенты фильтрации соответственно напорного горизонта и слабопроницаемой перемычки, $\bar{T}(x)$ — мощность слабопроницаемого слоя, $H=\text{const}$ — напор нижнего напорного горизонта, m — коэффициент недостатка насыщения или отдачи грунта, $\varepsilon(x)$ — интенсивность инфильтрации.

При осесимметричном движении вместо уравнений (1.1) и (1.2) имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rh\frac{dh}{dr}\right)-\omega^2(h-H)+\varepsilon(r)=0 \tag{1.3}$$

$$m\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh\frac{\partial h}{\partial r}\right)-\frac{\bar{k}}{\bar{T}}(h-H)+\varepsilon(r) \tag{1.4}$$

Из уравнений (1.2) и (1.4), как частный случай, можно получить уравнение неустановившейся фильтрации в одном пласте (уравнение Буссинеска) при $\bar{k}=0$

$$m\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\varepsilon(x) \tag{1.5}$$

$$m\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\varepsilon(r) \tag{1.6}$$

К решению уравнений (1.1)—(1.6) приводятся многообразные и практически важные вопросы фильтрации такие, как вопросы орошения и осушения земель вертикальными и горизонтальными дренами, вопросы взаимодействия совершенных и несовершенных скважин, работающих в одном безнапорном водоносном горизонте и в безнапорном горизонте, имеющем гидравлическую связь с нижележащими горизонтами, а также вопросы искусственного понижения уровня грунтовых вод, связанного с разнообразными земляными работами — например, при выемке котлованов и некоторых видов карьеров и т. д.

Как известно, точное решение уравнений (1.1)—(1.6) связано с определенными трудностями математического характера. Указанная трудность явилась стимулом для разработки приближенных методов решения этих уравнений. Наиболее эффективное приближенное решение вышеуказанных уравнений основано на приближенной их аппроксимации линейным уравнением (линеаризация).

В настоящее время существуют четыре способа линеаризации уравнений (1.1)—(1.6).

В первом способе линеаризации [1] принимается, что глубина h, стоящая множителем в первых круглых скобках уравнений (1.1)—(1.6), может быть приближенно заменена некоторой постоянной средней глубиной $h_{ср}$, и в результате нелинейные уравнения заменяются линейными уравнениями. Второй способ линеаризации был предложен Н. Н. Веригиным [2], третий — И. А. Чарным [3]. Широкое применение нашел четвертый способ линеаризации, предложенный П. Я. Полубариновой-Кочиной [4] для уравнения (1.1). Преимущество четвертого способа (относительно других) численным методом доказано в работе [5].

Ниже рассматривается вопрос применения квазилинеаризации к уравнениям безнапорной установившейся и неустановившейся фильтрации жидкости в одном пласте и в гидравлически связанных водоносных горизонтах. С помощью квазилинеаризации дается строгое математическое обоснование способов линеаризации. Метод позволяет найти оценки способов линеаризации.

Рассмотрим уравнение (1.1) при отсутствии инфильтрации. С помощью подстановки $\frac{h^2}{2} = u$ получим

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \omega^2 (\sqrt{u} - H) = 0 \tag{1.7}$$

которое напишем в общем виде

$$u'' = f(u) \tag{1.8}$$

Пусть требуется найти решение уравнения (1.8) с условиями

$$u(0) = u_1 = \frac{H_1^2}{2}, \qquad u(l) = \frac{H_2^2}{2}$$

С помощью квазилинеаризации (1.6) из (1.8) получим следующую последовательность линейных уравнений:

$$u''_{n+1} = f(u_n) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) \tag{1.9}$$

Задача нахождения решения уравнения (1.9) для каждого n при граничных условиях

$$u_{n+1}(0) = u_1, \quad u_{n+1}(l) = u_2$$

равносильна нахождению функции $u_{n+1}(x)$ из следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$u_{n+1} = f_0(x) + \int_0^l G(x, y)\,[f(u_n) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n)]\,dy \tag{1.10}$$

где

$$f_0(x) = \frac{H_1^2}{2} + \frac{H_2^2 - H_1^2}{2l}x$$

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x-l)}{l} & \text{при} \quad y \leqslant x \\ \dfrac{x(y-l)}{l} & \text{при} \quad x \leqslant y \end{cases}$$

Составим интегральное уравнение для разности $(n+1)$-го и n-го шагов

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^l G(x, y)[f(u_n) - f(u_{n-1}) + f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) - $$

$$- f'_u(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})]\,dy \tag{1.11}$$

Предположим, что функция $f(u)$ имеет частные производные по u включительно до второго порядка, тогда по формуле Тейлора второго порядка имеем

$$f(u_n) = f(u_{n-1}) + f'_u(u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + \frac{1}{2}f''_u(\theta)(u_n - u_{n-1})^2$$

где θ заключено между u_{n-1} и u_n. Подставляя в (1.11) вместо $f(u_n)$ правую часть последнего равенства, получим

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^l G(x, y)\left[f'_u(u_n)(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}f''_u(\theta)(u_n - u_{n-1})^2 \right] dy \tag{1.12}$$

Пусть

$$\max|f'_u(u_n)| = q, \quad \max|f''_u(0)| = p$$

и замечая, что

$$\max|G(x, y)| = \frac{l}{4}$$

из (1.12) получим

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{l}{4}\int_0^l \left[q\,|u_{n+1} - u_n| + \frac{1}{2}\,p\,|u_n - u_{n-1}|^2\right] dy$$

откуда, с помощью максимизации и интегрирования имеем

$$\max|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{pl^2}{2(4 - ql^2)} \max|u_n - u_{n-1}|^2 \tag{1.13}$$

Таким образом, сходимость метода зависит от величины

$$c = \frac{pl^2}{2(4 - ql^2)} \max|u_1 - u_0| = R_0 \max|u_1 - u_0| \tag{1.14}$$

Если $c < 1$, то, учитывая монотонность последовательности $\{u_n\}$, заключаем, что она равномерно сходится к функции u ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$) и, как показывает (1.13), эта сходимость будет квадратичной. Далее, так как функция u удовлетворяет уравнению

$$u(x) = f_0(x) + \int_0^l G(x, y)\, f(u)\, dy$$

то она является решением исходного уравнения (1.8).

Оценка погрешности при квадратичной сходимости имеет вид c^{2^n} вместо c^n при обычных итерациях. Этим обстоятельством обусловлена быстрота сходимости метода.

Поэтому при этом методе в приложениях достаточно ограничиться первыми двумя шагами, а иногда даже одним первым шагом.

Из неравенств (1.13) и (1.14), учитывая монотонность последовательности $\{u_n\}$, а также выпуклость графиков функций u_n в интервале $(0, l)$ при $H_1 < H_2 < H$ или вогнутость — при $H < H_1 < H_2$, получим для любого x следующие оценки:

$$\max|u - u_1| \leqslant \frac{1}{R_0}\sum_{n=1}^{\infty} c^{2^n} = \frac{1}{R_0}\,\frac{c^2}{1 - c^2}$$

$$\max|u - u_m| \leqslant \frac{1}{R_0}\sum_{n=m}^{\infty} c^{2^n}$$

Докажем, что линеаризованное четвертым способом уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\omega^2}{H}(u - \bar{u}_0) = 0 \qquad (\bar{u}_0 = H^2) \tag{1.15}$$

которое получается из (1.7), совпадает с первым приближением последовательности (1.9). Действительно, первое приближение последовательности (1.9) есть уравнение

$$u_1^{''} = f(u_0) + f_u^{'}(u_0)(u_1 - u_0) \tag{1.16}$$

где u_0 — некоторое нулевое приближение. Так как

$$f(u_0) = \omega^2(\sqrt{2u_0} - H), \qquad f_u^{'}(u_0) = \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}}$$

то из (1.16) получим уравнение

$$u_1^{''} - \omega^2(\sqrt{2u_0} - H) - \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}}(u_1 - u_0) = 0$$

которое будет совпадать с (1.15), если только за нулевое приближение примем $u_0 = \frac{H^2}{2}$.

С помощью линеаризации четвертым способом из (1.3) (при $\varepsilon=0$) получим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{\omega^2}{H}(u_1 - \bar{u}_0) = 0$$

что совпадает с первым приближением в последовательности квазилинейных уравнений, то есть с уравнением

$$u_1^{''} = f(u_0^{'}, u_0, r) + f_{u^{'}}^{'}(u_0^{'}, u_0, r)(u_1^{'} - u_0^{'}) + f_u^{'}(u_0^{'}, u_0, r)(u_1 - u_0)$$

или же с уравнением

$$u_1^{''} = \omega^2(\sqrt{2u_0} - H) + \frac{\omega^2}{\sqrt{2u_0}}(u_1 - u_0) - \frac{1}{r}u_1^{'}$$

при выборе нулевого приближения $u_0 = \frac{H^2}{2}$.

С помощью линеаризации первым способом из (1.1) ($\varepsilon=0$) получим

$$\frac{d^2H}{dx^2} - \frac{\omega^2}{h_{cp}}(h - H) = 0 \tag{1.17}$$

Тогда из первого приближения последовательности квазилинеаризованных уравнений

$$h_1^{''} = f(h_0^{'}, h_0) + f_{h^{'}}^{'}(h_0^{'}, h_0)(h_1^{'} - h_0^{'}) + f_h^{'}(h_0^{'}, h_0)(h_1 - h_0)$$

где h_0 — нулевое приближение и

$$f'_{h'} = -\frac{2h'}{h}, \qquad f'_h = \frac{\omega^2 H}{h^2} + \frac{(h')^2}{h^2}$$

при $h_0 = \text{const}$ имеем

$$h''_1 - \frac{\omega^2 H}{h_0^2}(h_1 - h_0) + \frac{\omega^2}{h_0}(H - h_0) = 0 \tag{1.18}$$

Уравнения (1.17) и (1.18) совпадут, если принять $h_0 = h_{\text{ср}} = H$. Аналогичный результат при линеаризации первым способом можно получить для уравнения осесимметричного движения (1.3).

Таким образом, доказано, что для уравнений установившейся безнапорной фильтрации первый и четвертый способы линеаризации являются вполне обоснованными приближенными методами решения нелинейных уравнений, так как линеаризованные этими способами уравнения являются первыми приближениями в соответственных последовательностях квазилинеаризованных уравнений, решения которых быстро сходятся к решению исходного нелинейного уравнения.

Рассмотрим вопрос квазилинеаризации относительно нелинейных уравнений безнапорной неустановившейся фильтрации на примерах уравнений (1.2) и (1.4).

Напишем уравнения (1.2) и (1.4) в общем виде

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = f(h'', h', h, z) \tag{1.19}$$

Для (1.2) $z = x$, а для (1.4) $z = r$.

Следуя методу квазилинеаризации, получим следующую последовательность линейных уравнений:

$$m\frac{\partial h_{n+1}}{\partial t} = f(h''_n, h'_n, h_n, z) + f'_{h''}(h''_n, h'_n, h_n, z)(h''_{n+1} - h''_n) +$$
$$+ f'_{h'}(h''_n, h'_n, h_n, z)(h'_{n+1} - h'_n) + f'_h(h''_n, h'_n, h_n, z)(h_{n+1} - h_n) \tag{1.20}$$

Для первого приближения из (1.20) имеем

$$m\frac{\partial h_1}{\partial z} = f(h''_0, h'_0, h_0, z) + f'_{h''}(h''_0, h'_0, h_0, z)(h''_1 - h''_0) +$$
$$+ f'_{h'}(h''_0, h'_0, h_0, z)(h'_1 - h'_0) + f'_h(h''_0, h'_0, h_0, z)(h_1 - h_0) \tag{1.21}$$

и так как для уравнения (1.2) $(z = x)$

$$f'_{h''} = kh, \qquad f'_{h'} = 2kh', \qquad f'_h = kh'' - \frac{k}{\overline{T}}$$

то принимая за нулевое приближение $h_0 = \text{const}$, получим

$$m\frac{\partial h_1}{\partial t} = kh_0\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h_1 - h_0) - \frac{k}{\overline{T}}(h_0 - H) + \varepsilon(x) \tag{1.22}$$

Если в (1.22) примем $h_0 = H$, то полученное уравнение

$$m\frac{\partial h_1}{\partial t} = kH\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h_1 - H) + \varepsilon(x)$$

совпадает с линеаризованным первым способом уравнением

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = kh_{\text{ср}}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h - H) + \varepsilon(x)$$

при $h_{\text{ср}} = H$.

Для уравнения (1.4) аналогично получим первое приближение в виде (за нулевое приближение принято $h_0 = \text{const}$)

$$m\frac{\partial h_1}{\partial t} = kh_0\frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r}h_0\frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h_1 - h_0) - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h_0 - H) + \varepsilon(r)$$

которое тоже совпадает с линеаризованным первым способом уравнением (при $h_0 = H$)

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = h_{\text{ср}}\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h}{\partial r}\right) - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(h - h_0) + \varepsilon(r)$$

если в последнем уравнении принять $h_{\text{ср}} = H$.

Совпадение линеаризованных первым способом уравнений неустановившейся безнапорной фильтрации с первым приближением сходящейся последовательности квазилинеаризованных уравнений дает основание считать линеаризацию первым способом как обоснованный метод приближенного решения этих уравнений.

Следуя второму способу линеаризации, из (1.2) и (1.4) после подстановки $u = \frac{h^2}{2}$ получим соответственно

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = kh_{\text{ср}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}}{T}(2u - Hh_{\text{ср}}) + h_{\text{ср}}\varepsilon_1(x) \tag{1.23}$$

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{kh_{\text{ср}}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(2u - Hh_{\text{ср}}) + h_{\text{ср}}\varepsilon_1(r) \tag{1.24}$$

Чтобы получить соответственные квазилинеаризованные уравнения первого приближения, напишем уравнения (1.2) и (1.4) в общем виде, заранее переходя к функции u $\left(u = \frac{h^2}{2}\right)$

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = f(u'', u', u, z)$$

где для уравнения (1.2) $(z = x)$

$$f(u'', u', u, x) = k\sqrt{2u}\,u'' - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(2u - \sqrt{2u}\,H) + \sqrt{2u}\,\varepsilon(x)$$

а для (4) $(z = r)$

$$f(u'', u', u, r) = \frac{k\sqrt{2u}}{r}u' + k\sqrt{2u}\,u'' - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(2u - \sqrt{2u}\,H) + \sqrt{2u}\,\varepsilon(r)$$

Тогда обычным путем при постоянном нулевом приближении u_0 находим первое приближение для (1.2)

$$m\frac{\partial u_1}{\partial t} = k\sqrt{2u_0}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left[\frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{2u_0}} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}\left(2 - \frac{H}{\sqrt{2u_0}}\right)\right](u_1 - u_0) -$$

$$- \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(2u_0 - \sqrt{2u_0}H) + \sqrt{2u_0}\,\varepsilon(x) \qquad (1.25)$$

а для (1.4)

$$m\frac{\partial u_1}{\partial t} = k\sqrt{2u_0}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{k\sqrt{2u_0}}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \left[\frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{2u_0}} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}\left(2 - \frac{H}{\sqrt{2u_0}}\right)\right](u_1 -$$

$$- u_0) - \frac{\overline{k}}{\overline{T}}(2u_0 - \sqrt{2u_0}H) + \sqrt{2u_0}\,\varepsilon(r) \qquad (1.26)$$

Как видно, при любом выборе начального приближения u_0 уравнения (1.23) и (1.25), а также (1.24) и (1.26) не совпадают. Совпадение этих уравнений будет лишь при $\overline{k}=0$ и $\varepsilon=0$, то есть второй способ линеаризации можно считать обоснованным приближенным способом решения нелинейных уравнений (1.5) и (1.6) при $\varepsilon=0$.

С помощью четвертого способа линеаризации, предложенного для уравнений установившейся безнапорной фильтрации, из (1.2) и (1.4) получим соответственно

$$\frac{m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}H}(u - u_0) + \varepsilon(x)$$

и

$$\frac{m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\overline{k}}{\overline{T}H}(u - u_0) + \varepsilon(r)$$

где $u = \frac{h^2}{2}$ и $u_0 = \frac{H^2}{2}$. Заменяя функцию h, входящую в левые части этих уравнений, некоторым средним значением $h = h_{\text{ср}} = \sqrt{2u_0}$, получим

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = k\sqrt{2u_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\overline{k}\sqrt{2u_0}}{\overline{T}H}(u - u_0) + \sqrt{2u_0}\,\varepsilon(x) \qquad (1.27)$$

и

$$m\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k\sqrt{2u_0}}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\overline{k}\sqrt{2u_0}}{\overline{T}H}(u - u_0) + \sqrt{2u_0}\,\varepsilon(r) \qquad (1.28)$$

и тогда, положив в (1.25)—(1.28) $\sqrt{2u_0}=H$, обнаружим совпадение уравнений (1.25) и (1.27), а также (1.26) и (1.28). Следовательно, четвертый способ линеаризации является обоснованным способом приближенного решения не только для уравнений безнапорной фильтрации. Этот способ успешно можно применять и при решении нелинейных уравнений неустановившейся фильтрации, как первое приближение сходящейся последовательности.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 XII 1975

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ԵՎ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՈՉ ՃՆՇՈՒՄԱՅԻՆ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՔՎԱԶԻԳԾԱՅՆԱՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ոչ ճնշումային մեկ հողաշերտում կամ հիդրավլիկորեն կապակցված բազմաշերտ միջավայրում հեղուկի ֆիլտրացիայի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներից կարելի է անցնել գծային հավասարումների քվազիգծայնացման միջոցով: Քվազիգծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հաջորդականության սահմանը հանդիսանում է որոնելի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը: Այս հանգամանքը հնարավորություն է տալիս գնահատելու ֆիլտրացիայի տեսության մեջ լայն կիրառություն գտած գծայնացման եղանակները: Աշխատանքում ցույց է տրված, որ այդ գծայնացման եղանակները սկզբնական մոտավորության այս կամ այն ընտրության դեպքում համընկնում են կվազիգծայնացված հավասարումների հաջորդականության առաջին մոտավորության հետ: Գծայնացման եղանակներից մեկի համար կայունացված ֆիլտրացիայի դեպքում գտնված է գնահատական: Չկայունացված ֆիլտրացիայի համար քվազիգծայնացման մեթոդը թույլ է տալիս առաջարկել գծայնացման նոր եղանակներ, որոնց օգտագործման դեպքում քվազիգծայնացված հավասարումների լուծումները բավականին մոտ կլինեն խնդրի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

QUASI-LINEAR EQUATIONS OF STABLE AND UNSTABLE NONRAMMING FILTRATION OF LIQUID

R. M. BARSEGHIAN

Summary

Nonlinear equations of nonramming filtration of liquid are reduced to linear ones by means of quasi-linearization. It is proved that equations linearized in such a way and with adequate selection of null approach coincide with the equations linearized by various methods known in the theory of liquid filtration. The method of linearization for a multilayer soil is estimated. New methods of linearization are suggested for non-linear equations of nonramming filtration of liquid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гостеолтехиздат, 1953.
2. *Веригин Н. Н.* О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилищ. Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 6.
3. *Чарный И. А.* О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 6.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О дебите скважин в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1960, № 3.
5. *Меламед В. Г.* К расчету дебита скважин в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1963, № 5.
6. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Изд. Мир, 1968.